华夏英才基金学术文库

吴森堂 著

结构随机跳变系统理论及其应用

科学出版社
www.sciencep.com

[illegible]

[illegible] 著

结构随机跳变系统理论及其应用

[illegible]

華夏英才基金學術文庫

结构随机跳变系统理论及其应用

吴森堂　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书从结构随机跳变系统的系统分析、估计和控制及其应用角度，全面系统地阐述了结构随机跳变系统理论及其应用研究的新成果和发展动态。内容包括结构随机跳变系统的数学描述与分类；结构随机跳变系统的分析方法，特别是对于分布式、集中式结构跳变的马尔可夫系统的分析方法；结构随机跳变系统的滤波方法；结构随机跳变系统的最优控制和对策控制方法；结构随机跳变系统理论在多传感器组网反干扰跟踪问题以及导弹与反导系统攻防对抗等问题中的应用研究。

本书可供系统与控制科学、控制工程、应用数学以及与之相关的工程应用领域的教学与科研人员阅读，也可以作为相关专业的研究生教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

结构随机跳变系统理论及其应用/吴森堂著. —北京：科学出版社，2007
(华夏英才基金学术文库)
ISBN 978-7-03-018816-8

Ⅰ. 结…　Ⅱ. 吴…　Ⅲ. 工程结构-随机非线性系统-研究
Ⅳ. TU318　0211. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 047218 号

责任编辑：余　丁 / 责任校对：赵燕珍
责任印制：刘士平 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2007 年 4 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2007 年 4 月第一次印刷　印张：15 1/4
印数：1—2 500　字数：295 000

定价：40.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

20 世纪中叶前后，对于结构随机跳变系统（俄语为 система со случайной скачкообразной структурой，СССС；英语为 system with random changing structure，SRCS）的描述与系统分析研究就已经开始了，其最基本的系统理论和研究方法在 20 世纪 80 年代后得以迅速发展，Большаков И А、Казаков И Е、Емельянов С В、Артемьев В М、Мишулина О А、Бухалёв В А、Robinson V G、Sworder D D 等学者都为此做出了重要贡献。

由苏联学者 Казаков И Е、Артемьев В М 和 Бухалёв В А 在 1993 年联合发表的专著 *Analysis of Systems with Random Structure* 开创了结构随机跳变系统理论研究的新阶段，更加系统地给出了具有分布式跳变结构和集中式跳变结构的相关型结构随机跳变系统的分析方法。随后，Бухалёв В А 又在俄罗斯科学院 *Engineering Cybernetics* 发表了 *Game Control of System with Random Changing Structures* 论文，给出了一类结构随机跳变系统对策控制的一般形式解。Бухалёв 的结论对于解决系统结构的跳变过程受到来自两个利益冲突者控制的问题具有重要意义。

近年来，结构随机跳变系统的研究在国内外引起了许多学者的关注，以俄罗斯为代表的苏联国家的研究尤为突出。自 20 世纪 90 年代起，作者和不少同行们先后在国家自然科学基金和航空科学基金资助下开始了相关研究，在结构随机跳变系统估计和控制及其应用领域获得了一批成果。为此，十分有必要编撰一部专著，从结构随机跳变系统的系统分析、估计和控制及其应用角度，全面系统地介绍结构随机跳变系统理论及其应用研究的新成果和发展动态，以飨读者。

获得华夏英才基金资助出版此书，能够为促进结构随机跳变系统理论及其应用的深入研究尽绵薄之力，作者感到不胜荣幸，同时对给予作者很大帮助的张水祥、许仁牛和姜智超等以及同行们表示诚挚谢意。

作　者

目　　录

第一章　结构随机跳变系统的数学模型

1.1　结构随机跳变系统

随着科学技术的迅速发展，特别是计算机技术的广泛应用，现代化自动控制装置的性能亦日益完善，其工作的环境也越来越恶劣和复杂(例如，太空探险、火山爆发区域的勘查等)。在这类复杂的自动控制系统工作过程中，其系统的参数和结构发生随机跳变转换的情况是经常遇到的。诸如，系统的多个工作模式间的随机切换，某个子模块的突然故障以及外界环境的作用所导致的信息中断、恢复等因素，都会造成系统的结构发生突然剧烈变化。再如，在现代战争中由于采用了多层次、多兵种配合作战的方式，使得各种自动化装置所依赖的信息处理任务也越来越繁重，其需要处理的信息环境也越来越多变复杂，使得在复杂现象和控制过程中，广泛地涉及其功能和运行环境条件在随机时刻发生剧烈变化的动态系统，也就是说，在系统中存在着参数和结构的不确定性。这类不确定性又可以分为平稳和非平稳，以及参数和结构的不确定性[1~12]。

平稳不确定性在系统运行过程中是不变化的，即系统有不确定的定常参数和结构。实际上平稳不确定性在所有的动态系统中几乎都能遇到，因为在大多数的实际工程应用中，研究者并不掌握被控对象实际参数的准确信息，有时被控对象结构的准确信息也是未知的。系统运行的动态特性和完成任务的最终结果取决于随机参数和结构的具体变化情况。这些随机参数和结构的变化可能服从于确定的统计规律或者具有最小(最大)值。在系统运行的起始点这些随机参数和结构具有属于离散的或者连续集合的确定值，甚至不发生变化。参数和结构不确定性在系统运行过程中是不变化的，在随机信号和干扰作用下过程本身呈现的随机性是这类动态系统的特点。

非平稳参数和结构的不确定性是在系统的运行过程中发生变化的。在系统运行过程中，外作用条件突然而剧烈地发生变化使得这类系统的参数和结构不确定性离散地产生，这是对此类系统进行研究的实际意义所在。与具有平稳不确定性的问题相比，具有非平稳不确定性的系统和问题要更加普遍。因为与系统参数和结构的随机不确定性一样，在运行过程中当在随机信号和干扰作用下，由于内因而发生跳变的参数和结构不确定性是非平稳动态系统的特点。

具有非平稳参数和结构不确定性的动态系统称为具有随机变化结构的系统。对此类系统可以借助于仿真计算或者基于概率特征方程的数学分析理论进行研

究。基于间断马尔可夫过程(具有吸收和恢复随机结构的马尔可夫过程),得以成功地建立起此类系统更一般性的分析理论,并在此理论中分段连续的马尔可夫过程和具有连续和离散分量的混合过程特性得到了进一步的推广,使得此类具有随机变化结构的系统一系列新问题得以准确地表达和解决。

结构不确定性描述了在系统运行过程中结构在随机的时刻发生了转换,以及转换过程本身的随机性,具有随机性和结构不确定性这两个特点的系统称为结构随机跳变的动态随机系统,或者将其简称为结构随机跳变系统(俄语为 система со случайной скачкообразной структурой,CCCC;英语为 system with random changing structure,SRCS)。例如,信号的搜索(信号源探测)和跟踪(信号的参数跟踪)问题是在飞行器飞行控制、通信技术、船舶导航、机器人技术以及其他领域中的重要问题之一。这是一个综合问题,因为其中包含了两个阶段:信号搜索(识别)和控制。这两个阶段的每一个都需要用不同的仪器设备来完成,也就是说,会产生不同的系统结构。基于整个识别和控制过程自动化的需要又不得不将这些不同的子系统合并统一到一个具有两个结构的系统。子系统之间应该根据随机状态(信号的存在或者不存在)进行自动地切换。

为了解决在复杂的干扰对抗环境中提高信息处理的准确性问题,针对干扰环境随机剧烈地变化,适时地辨识当前干扰环境的态势,并作出相应的决策来优化和利用系统的资源(例如,异构多传感器组网的优化重组、多个信息融合算法之间的自动切换等),最大限度地降低干扰对信息处理的影响,从而有效地提高信息优化处理的品质。

另外典型的例子是,具有自动或半自动制导控制系统的飞行器,其制导控制系统要保证完成不同的制导和飞行控制模态,实现不同的飞行轨迹以及在随机的时间区间序列内使飞行轨迹发生变化。

可以作为具有多个确定性结构的系统(多结构系统)的自然推广,这类多结构系统结构的转换是发生在随机的时刻。例如,多工作模态工艺过程的自动控制问题,在数字计算机中由于软件缺陷导致算法的随机跳转,多飞行器自主编队飞行过程中的离/入队管理以及多传感器组网探测等问题。

此类结构随机跳变系统的物理模型有下列特点[11,12]:

① 系统是由不同或同类物理性质的子系统(环节)组成,其中有明确目的控制过程。

② 系统是动态的,即系统的状态是时变的。

③ 系统是随机的,因为输入信号和干扰是连续或连续值的时间随机函数,而时间是连续或离散变化的。

④ 在全部或局部的子系统中,系统的结构和参数值按照随机规律在随机时刻发生跳变,即系统由一个结构向另一个结构发生随机转换。

⑤ 动态系统当前所处的状态或结构是确定的。

⑥ 系统所处结构的数目是有限可数的。

1.2　结构随机跳变系统的随机方程

结构随机跳变系统的研究理论应该基于其相适应的数学模型。描述信息和控制的变换过程的算子或方程是动态系统的数学模型。

在工程实际和科学研究中被广泛应用的模型是具有集中参数的系统。这类系统的特征是由普通的微分方程和泛函关系来描述的，而对于分布参数系统则要应用偏微分方程。本书将采用集中参数系统的数学模型来描述结构随机跳变系统。

在现代控制理论中可采用多种不同的系统描述方法。线性的平稳系统是借助于传递函数和频率特征或者借助于权函数来描述的。非线性和线性非平稳系统是借助于微分方程或差分方程来描述的。最后一种方法是在状态空间或相空间里对系统的数学描述，更适合借助于数字计算机进行计算。

在一般情况下，任何动态系统都处于随机的控制信号和干扰的作用下。其任意时刻的状态是随机的，且在状态的相空间里由分量为 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 的 n 维随机向量 $\boldsymbol{X}(t)$ 描述。

用混合随机过程 $[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t)\quad s(t)]^{\mathrm{T}}$ 可以很方便地来描述结构随机跳变系统，其中，$\boldsymbol{X}(t)$ 是状态向量，可以是连续的随机过程、离散的连续值随机序列、离散的链或者是离散过程，$s(t)$ 是一个标量，是在有限可数集合 $\{\overline{1,M}\}$ 内取值的离散随机过程，$s(t)=\overline{1,M}$ 是系统结构的状态标号。在有些问题中，若将 $s(t)$ 看作 l 维的向量 $\boldsymbol{s}(t)=[s_1(t),\cdots,s_l(t)]^{\mathrm{T}}$ 会更为方便，每一个分量 $s_i(t)$ 的取值范围 $s_i(t)=\overline{1,M_i}$。当然如果取 $s(t)=\overline{1,M}$，其中 $M=\sum\limits_{i=1}^{l}M_i$，也可以将向量过程 $\boldsymbol{s}(t)$ 变换成标量的形式。

将非线性的连续动态的结构随机跳变系统写成柯西(Cauchy)方程的形式为

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},s,t)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},s,t)\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},s,t)\boldsymbol{\xi}(t),\ \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0 \tag{1.1}$$

式中，$\boldsymbol{X}(t)$ 是 n 维的连续向量，$s(t)=\overline{1,M}$ 是系统结构的状态标号，M 是系统所拥有的确定性结构的数目。$\boldsymbol{U}$ 是关于时间或状态的确定性 m 维向量函数(控制向量)。$\boldsymbol{\xi}(t)$ 是 n 维高斯白噪声向量，其强度矩阵为 $\boldsymbol{\Xi}(t)$，相关函数矩阵为 $\boldsymbol{\Omega}_\xi(t,t')=\boldsymbol{\Xi}(t)\delta(t-t')$，其中 $\delta(t-t')$ 为狄拉克(Dirac)函数。$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},s,t)$、$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},s,t)$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},s,t)$ 分别是由 $\boldsymbol{X}(t)$ 向量函数组成的矩阵。

可见，有白噪声向量输入的方程(1.1)是随机方程。当对方程(1.1)积分时，由于状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$ 和白噪声向量 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 函数的乘积所形成的随机积分关系，在对其计算时，将应用到伊藤(Ito)非对称积分和斯特拉达诺维奇(Стратонович)对称积分。

系统的初始状态为随机向量 $\boldsymbol{X}_0$，其分量是 x_{10}、x_{20}、…、x_{n0}，所给定的概率密度函数为 $f(\boldsymbol{X}_0,t_0)$或者数字特征（初始分布的矩）。

对于方程(1.1)的线性形式有：

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{F}(s,t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{G}(s,t)\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{B}(s,t)\boldsymbol{\xi}(t),\ \boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0$$

式中，$\boldsymbol{F}(s,t)$、$\boldsymbol{G}(s,t)$、$\boldsymbol{B}(s,t)$为相应的给定矩阵。

由于数字计算机技术的迅速发展，使得离散系统在现代技术和科学研究中广泛应用，在控制回路中采用数字计算机的系统就是其典型的代表。假定在足够小的时间离散区间 Δt 内系统的结构是不发生变化的，因为转移概率是与 Δt 成正比的。这样，离散系统可写成

$$\begin{gathered}\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},s,k)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},s,k)\boldsymbol{U}(k)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},s,k)\boldsymbol{\xi}(k)\\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0\quad(k=0,1,2,\cdots;s=\overline{1,M})\end{gathered}\tag{1.2}$$

式中，$\boldsymbol{X}(k)$是 n 维离散的连续值序列，$s(k)$是离散序列（链），$\boldsymbol{\xi}(k)$是离散的高斯白噪声，其相关函数矩阵 $\boldsymbol{\Omega}_\xi(k,h)=\boldsymbol{\Xi}(k)\delta_{kh}$，$\delta_{kh}$ 为克罗内克尔(Kronecker)函数。

对于方程(1.2)的线性形式有

$$\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{F}(s,k)\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{G}(s,k)\boldsymbol{U}(k)+\boldsymbol{B}(s,k)\boldsymbol{\xi}(k)$$

或者写成

$$\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{\Phi}(s,k,k+1)\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{G}(s,k)\boldsymbol{U}(k)+\boldsymbol{B}(s,k)\boldsymbol{\xi}(k)$$

式中，$\boldsymbol{\Phi}(s,k,k+1)=\boldsymbol{I}(k)+\boldsymbol{A}(s,k)$为状态转移矩阵，$\boldsymbol{I}(k)$为单位矩阵。

这里需要指出的是，上述所研究的离散系统可能存在这样的情况，即时间的离散区间过大，甚至是离散区间不均匀的情况，在这些时间区间内系统的结构有可能发生变化。

具有连续值状态向量 $\boldsymbol{X}(k)$的离散系统，更一般形式的非线性递归方程可写成

$$\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{X}(k),\boldsymbol{U}(k),s(k+1),s(k),\boldsymbol{\xi}(k),k+1]\tag{1.3}$$

式中，$\boldsymbol{f}$ 是确定性的非线性向量函数。

例 1.1　再入体的软着陆问题。

当再入体在着陆时，需要根据距离地面的高度和下落速度适时地开伞进行软着陆，由于大气的随机扰动和突然开伞会引起空气阻力的急剧变化，从而导致再入体的运动特性具有随机跳变的特点，如图 1.1 所示。

再入体的运动模型由下列方程描述

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ \dfrac{\gamma(s,x_1,x_2)}{2x_3}\rho_0\,\mathrm{e}^{-\frac{x_1}{k_\rho}}x_2^2-g\\ 0\end{bmatrix}+\boldsymbol{w}(s,x_1,x_2)$$

式中，x_1、x_2、x_3 分别为再入体的飞行高度、高度变化率和弹道系数（为待定参数），ρ_0、k_ρ 和 g 分别是海平面标准大气压、大气密度衰减常数和重力加速度，$\boldsymbol{w}(s,x_1,x_2)$

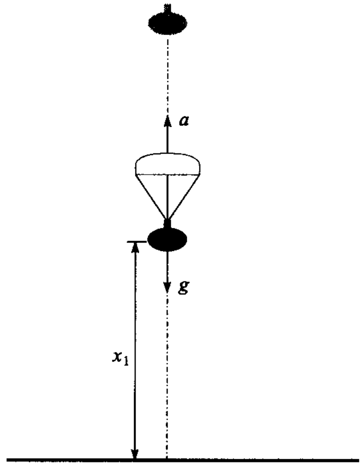


图 1.1　再入体软着陆示意图

为系统噪声，$\gamma(s,x_1,x_2)$为开伞后空气阻力的修正参数，$s=\overline{1,2}$表示开伞前后的运动状态，其状态的转移特性取决于开伞时刻与飞行高度及其高度变化率的相关关系。

这样，上述运动模型就可以写成方程(1.1)的标准形式

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},s,t)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},s,t)\boldsymbol{\xi}(t)$$

$s(t)=\overline{1,2}$是结构状态的标号。

1.3　结构随机跳变系统的分类

结构随机跳变系统的分类，主要是以 $s(t)$与 $\boldsymbol{X}(t)$的相关关系来确定的。这里 t 可以是连续的或者是离散的 $t_k=k\Delta t$。一般情况下，随机过程 $s(t)$对系统的状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$是有影响的。因为当结构状态的标号变化时，个别的子系统就会中断运行，而另外的子系统会接通运行。但是，状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$对随机过程 $s(t)$的反向影响却不见得一定存在。

定义 1.1　非相关型结构随机跳变系统　如果随机过程 $s(t)$只与时间有关，而与系统的状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$无关，那么此类结构随机跳变系统是非相关型的。

显然，对于非相关型结构随机跳变系统而言，随机过程 $s(t)$的统计特性是可以独立研究的，其基本特征是由随机过程 $s(t)$对状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$施加的作用所决定的。

定义 1.2　相关型结构随机跳变系统　如果随机过程 $s(t)$与系统的状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$之间存在着相互影响和相关关系，那么此类结构随机跳变系统是相关型的。

相关型结构随机跳变系统的主要特征是状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$ 对随机过程 $s(t)$ 所施加影响的特点。依据状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$ 对随机过程 $s(t)$ 施加影响的特点，又可将相关型结构随机跳变系统分为两类形式：

定义 1.3　分布式跳变系统　如果状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$ 对随机过程 $s(t)$ 施加的影响是统计意义的关系，即从一个结构状态向另一个结构状态转移的时刻是以随机形式取决于子系统状态向量的变化，那么此类相关型的结构随机跳变系统是分布式跳变系统。

也就是说，在分布式跳变系统中，系统从一个结构向另一个结构的跳变以及反向的跳变，可能以不同的概率发生在 $\boldsymbol{X}(t)$ 的任意值处。

定义 1.4　集中式跳变系统　如果结构的跳变时刻与状态向量变化的进程之间成泛函关系，即结构的跳变发生在当状态向量变化的进程达到某些确定的阈值或者边界(超曲面)的时刻，那么此类相关型的结构随机跳变系统是集中式跳变系统。

在例 1.1 中如果开伞时刻仅由定时器控制时，根据定义 1.1，那么由上述再入体软着陆运动方程所描述的系统就是非相关型的结构随机跳变系统；如果开伞时刻与再入体的飞行高度和高度变化率成一定的概率关系时，根据定义 1.3，那么系统就是分布式跳变的结构随机跳变系统；如果只有当再入体的飞行高度达到一定的设定值时才开伞，根据定义 1.4，那么系统就是集中式跳变的结构随机跳变系统。

结构随机跳变系统的概率分析问题是各种各样的，主要有以下四类问题[11,12]：

① 系统处于每一个可能结构状态的概率以及从一个状态到另一状态转移时间的估计。

② 概率分布以及所有或部分状态向量的概率数字特征的确定。

③ 在噪声背景中给定信号的恢复或变换的精度估计。

④ 在随机干扰作用下控制过程的精度与稳定性的研究等。

解决上面所列举的问题，目的是要按照一定的准则，评价系统在给定参数下的运行品质或选择最佳的参数。例如，对于搜索和跟踪系统而言，系统处于每一个可能结构状态的概率估计是重要的。研究者所感兴趣的是要对这些概率与噪声和系统参数值之间的相关关系进行估计。对于可能发生故障的系统而言，系统运行的精度、给定信号的恢复精度以及系统的稳定性等问题是重要的。对于结构重构的控制系统而言，系统的运行精度、稳定性、噪声影响程度和抗扰性等都是重要的。

状态向量的初始和中心矩是基本的数字概率估计：第一初始矩——数学期望向量 $\boldsymbol{m}(t)=\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{X}(t)\}$；第二中心矩——相关矩阵 $\boldsymbol{\Theta}(t)=\boldsymbol{E}\{[\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}(t)][\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{m}(t)]^{\mathrm{T}}\}$，相关函数矩阵 $\boldsymbol{\Omega}(t,t')=\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{X}^0(t)\cdot[\boldsymbol{X}^0(t')]^{\mathrm{T}}\}$。

第二初始矩与 $\boldsymbol{m}(t)$ 和 $\boldsymbol{\Theta}(t)$ 的关系如下

$$\boldsymbol{\chi}_2(t)=\boldsymbol{m}(t)\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{\Theta}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t) \tag{1.4}$$

高阶的概率初始矩是更加完全的数字特征，有：

$$\boldsymbol{\chi}_h(t)=\boldsymbol{E}\{x_1^{h_1}(t)\cdots x_n^{h_n}(t)\} \quad (h=h_1+\cdots+h_n;h=1,2,\cdots) \tag{1.5}$$

状态向量分布规律的确定是系统精度估计的基础，系统的误差是输出变量 $x_i(t)(i=\overline{1,n})$ 与其所要求理论值 $x_{iT}(t)$ 之间的差

$$\varepsilon_i=x_i(t)-x_{iT}(t) \quad (i=\overline{1,n}) \tag{1.6}$$

其向量形式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_T(t) \tag{1.7}$$

系统误差的数学期望向量 $\boldsymbol{m}_\varepsilon(t)$ 和相关矩阵 $\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon(t)$ 是结构随机跳变系统精度估计的基本问题。有时系统的精度也由二次型的标量值来表示

$$\eta_\varepsilon=\boldsymbol{m}_\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{m}_\varepsilon(t)+\mathrm{tr}[\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon(t)] \tag{1.8}$$

这里，$\boldsymbol{\Gamma}$ 是给定矩阵。

稳定性分析是自动化系统品质评价中更为重要的问题之一。稳定性概念是与不同条件下系统的运行特性有关。在确定性系统理论中存在着不同的稳定性形式。例如，局部稳定性与全局非渐近稳定性、渐近稳定性以及绝对稳定性等概念各不相同。当研究随机稳定性时还会涉及更多形式的稳定性概念。目前，对于随机系统还没有通用的稳定性研究方法。因此，具体的系统需要采用不同的数学方法来解决这些问题。在确定性系统的稳定性理论中广泛应用的方法是李雅普诺夫(Ляпунов)第一方法，这一方法的特点是直接研究微分方程或差分方程解的特性。而李雅普诺夫(Ляпунов)第二方法是构建具有一定特性且能保证所研究系统稳定性的函数。李雅普诺夫(Ляпунов)方法对于随机系统的相应推广，提供了基于过程实现及其概率特征分析来研究随机稳定性的可能。

确定状态向量的分布概率密度函数是结构随机跳变系统分析的基础。用来确定概率密度函数的方程是至关重要的，需很好地深入研究获得此类方程的传统方法并将其推广到结构随机跳变系统。通常对此类方程的求解是十分费力的，而非线性系统的精确求解方法实际上也是收效甚微的。

因此，更重要的意义在于将基于矩特征分析的相关理论应用到工程实际中。这一理论的方法和结果会在本书中广泛地应用。

第二章　结构随机跳变系统的随机过程

2.1　间断马尔可夫随机过程

2.1.1　间断马尔可夫随机过程

不失一般性，任意选择两个时刻 t 和 $t+\Delta t$，依据方程(1.1)可以得到状态向量 $\boldsymbol{X}(t+\Delta t)$ 的公式如下

$$\boldsymbol{X}(t+\Delta t)=\boldsymbol{X}(t)+[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},s,t)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},s,t)\boldsymbol{U}(t)]\Delta t+\int_t^{t+\Delta t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},s,\tau)\boldsymbol{\xi}(\tau)\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{O}(\Delta t) \tag{2.1}$$

假定噪声 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 为高斯(Gauss)白噪声且与 $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ 和 $\boldsymbol{X}(\tau)$ 独立(在 $\tau<t$ 时)，则在时刻 $t+\Delta t$ 的 $\boldsymbol{X}(t+\Delta t)$ 只与 $\boldsymbol{X}(t)$ 相关。由此可知，在给定结构状态 s 情况下，状态向量 $\boldsymbol{X}(t)$ 分布的条件概率密度满足下列公式

$$f[\boldsymbol{X}(t+\Delta t),s|\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}(t_k),\cdots,\boldsymbol{X}(t_1),s]=f[\boldsymbol{X}(t+\Delta t),s|\boldsymbol{X}(t),s]$$
$$(t_1<t_2<\cdots<t_k<t) \tag{2.2}$$

按照马尔可夫过程的相关定义，随机过程 $\boldsymbol{X}(t)$ 显然是马尔可夫过程。

类似地，对于方程(1.1)的离散形式也有相同的结论，即随机序列 $\boldsymbol{X}(k)$ 是马尔可夫的。在给定结构状态 s 情况下，马尔可夫过程 $\boldsymbol{X}(t)$ 和序列 $\boldsymbol{X}(k)$ 是符合结构随机跳变系统的数学模型(1.1)～(1.3)的，结构的标号 $s=\overline{1,M}$ 是离散随机过程 $s(t)$ 的实现。

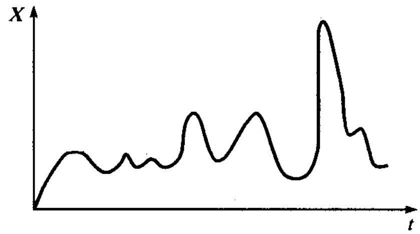
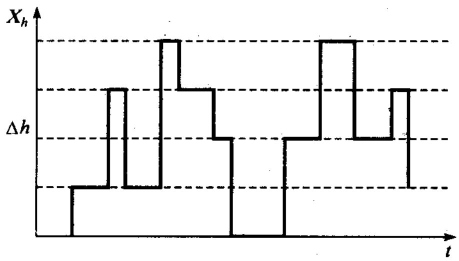
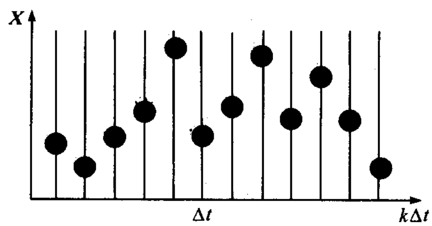
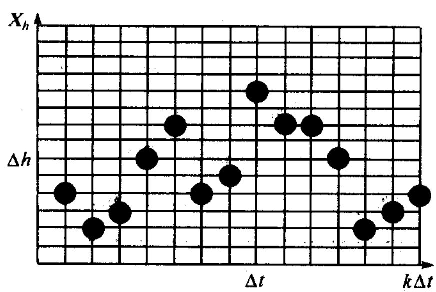
由连续或连续值的实随机向量 $\boldsymbol{X}(t)$ 和离散标量 $s(t)$ 组成的混合随机过程 $[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t)\quad s(t)]^{\mathrm{T}}$ 是很适合描述结构随机跳变系统的动态演化的。随机过程 $\boldsymbol{X}(t|s,t)$ 是满足处于第 s 个结构的系统方程的，且在不重叠的时间间隔内存在，是这类混合随机过程 $[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t)\quad s(t)]^{\mathrm{T}}$ 的特点，而这些时间间隔是在由过程 $s(t)$ 所决定的随机时刻发生跳变的。因此，混合随机过程 $[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t)\quad s(t)]^{\mathrm{T}}$ 是由给定概率特征的相同或不同维数的向量马尔可夫过程构成的分段连续(连续值)的随机过程，又称其为具有随机结构的过程[11,12]。这类随机过程虽然有着各种各样的物理特性和概率特征，但是，过程的结构状态在随机时刻发生跳变转换是其最主要的特点。

离散的随机过程 $s(t)$ 可以是与向量 $\boldsymbol{X}(t)$ 相关的任意的非马尔可夫、马尔可夫或条件马尔可夫随机过程。在本书中将研究 $s(t)$ 是离散的马尔可夫过程和条件马尔可夫过程的情况，因为这类随机过程 $s(t)$ 所描述的结构随机跳变系统的物理模

型有着很广泛的应用领域。

在表 2.1 中给出了在自动控制系统中常见的几类马尔可夫随机过程[12]。

表 2.1　马尔可夫随机过程

自变量 t	状态空间 $\boldsymbol{X}$	过程形式 $\boldsymbol{X}(t)$	过程名称
连续	连续		连续过程
连续	离散		离散过程
离散	连续		连续值序列
离散	离散		离散序列(链)