供中医药、管理、计算机各类专业用

新世纪全国高等中医药院校创新教材

XIN SHI JI QUAN GUO GAO DENG ZHONG YI YAO YUAN XIAO CHUANG XIN JIAO CAI

线性代数

主编 周仁郁

中国中医药出版社

新世纪全国高等中医药院校创新教材

线性代数

（供中医药、管理、计算机各类专业用）

主　编　周仁郁（成都中医药大学）
副主编　于鹤丹（黑龙江中医药大学）
王世钦（甘肃中医学院）
关明云（辽宁中医药大学）
李秀昌（长春中医药大学）
陈世红（江西中医学院）
武京君（山东中医药大学）
郑洁刚（湖南中医药大学）
赵文峰（河南中医药大学）

中国中医药出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/周仁郁主编．—北京：中国中医药出版社，2006.9

新世纪全国高等中医药院校创新教材

ISBN 7-80231-066-0

Ⅰ．线…　Ⅱ．周…　Ⅲ．线性代数—中医学院—教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 094482 号

中国中医药出版社出版

北京市朝阳区北三环东路 28 号易亨大厦 16 层

邮政编码：100013

传真：64405750

北京市燕鑫印刷厂印刷

各地新华书店经销

*

开本　850×1168　1/16　印张 12.75　字数　290 千字

2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 7-80231-066-0　册数 5000

*

定价：16.00 元

网址　www.cptcm.com

社长热线　010 64405720

读者服务部电话：010 64065415　010 84042153

书店网址：csln · net/qksd/

前　言

高等数学、线性代数、中医药统计学，是中医药院校的三大数学课程。高等数学重在研究确定性现象的连续变化规律，研究的工具是极限，研究的内容是微积分、数学模型。中医药统计学重在研究随机性现象的统计规律，研究的工具是概率，研究的方法是由样本描述和推断总体的特征。线性代数则是研究确定性现象的系统变化规律，研究的工具是矩阵，研究的内容是矩阵理论，直接应用是线性方程组、投入产出分析、线性规划和非线性规划。随着科学技术的进步，特别是计算机技术的迅速发展，线性代数已经渗透到从自然科学技术到工农业生产建设，从经济活动到管理活动的各个领域。

传统的线性代数教学模式，是教师在黑板上演算，学生在纸上演算。本书是突破这种教学模式的一种尝试，它具有理论与实际、动脑与动手、教学与实验、教学与自学相结合的四大优点。理论与实际相结合，是指它既较完整地介绍线性代数的基本理论，又广泛地介绍医药、管理等多方面的实际问题，引导学生把学的知识用于实践。动脑与动手相结合，是指它既注重建立数学模型的思想，又注重对系统分析方法的总结，引导学生用脑指挥手。教学与实验相结合，是指它引导学生用数学软件简化繁杂的线性代数运算，降低学习线性代数的难度。教学与自学相结合，是指它按教学进度编排，既方便教师用多媒体讲授，又方便学生课前及课后自学。

本书共十章，第一至第五章为基本的矩阵理论，第六至第九章为系统分析应用方法，第十章为线性代数实验。第一章由赵文峰、崔红新编写，第二章第一、二节由王世钦、周菲编写，第二章第三、四节由陈世红、何雁、艾国平编写，第三章由于鹤丹、谢国粱编写，第四章由王金虹、谢海林编写，第五章由郑洁刚、黄爱武编写，第六章由关明云、李新编写，第七章由汪旭升编写，第八章由李秀昌、王淑媛、孙健编写，第九章第一节由陈世红、赵莹、何雁、艾国平编写，第九章第二节由陈世红、武京君、杨佩璐、付爽编写，第十章由周仁郁、曹治清、杨胤清、刘敏编写。使用时，可以根据需要选择内容进行教学，跳过部分定理的证明或计算机实验，不会影响学习的科学性、系统性和完整性。

本书既是中医药院校线性代数教学经验的结晶,又是建立和完善中医药院校数学课程体系的见证。愿更多的中医药院校开设线性代数课程,欢迎更多的中医药院校使用线性代数教材,发展和完善线性代数教材,让线性代数教学为培养合格的高等中医药人才作出更大的贡献。

《线性代数》编委会

2006 年 8 月

新世纪全国高等中医药院校创新教材

《线性代数》编委会

主　　编　周仁郁（成都中医药大学）

副 主 编　（按姓氏笔画排序）

于鹤丹（黑龙江中医药大学）

王世钦（甘肃中医学院）

关明云（辽宁中医药大学）

李秀昌（长春中医药大学）

陈世红（江西中医学院）

武京君（山东中医药大学）

郑洁刚（湖南中医药大学）

赵文峰（河南中医学院）

曹治清（成都中医药大学）

编　　委　（按姓氏笔画排序）

王金虹（山西中医学院）

王淑媛（长春中医药大学）

艾国平（江西中医学院）

付　爽（山东中医药大学）

刘　敏（成都中医药大学）

孙　健（长春中医药大学）

杨佩璐（山东中医药大学）

杨胤清（成都中医药大学）

李　新（辽宁中医药大学）
何　雁（江西中医学院）
汪旭升（广西中医学院）
周　菲（甘肃中医学院）
赵　莹（上海中医药大学）
黄爱武（湖南中医药大学）
崔红新（河南中医学院）
谢国梁（黑龙江中医药大学）
谢海林（山西中医学院）

目　录

第一章 行列式

第一节 行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

下面，我们从求解二元一次方程组的问题中引出二阶行列式的定义。

例 1 求解二元线性方程组，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

解 应用加减消元法，在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时得到

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{11}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

我们发现，方程的解 x_1、x_2 一般表达式中，分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。

为方便记忆和书写，引入记号和规定运算，称为**二阶行列式**（2 order determinant)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

其中，每个数 a_{ij}（i，$j=1$，2）称为该行列式的**元素**。二阶行列式，共有 $2^2=4$ 个元素。元素的第一个下标 i 表示该元素在行列式的**行序**，第二个下标 j 表示元素的**列序**，任一元素 a_{ij} 可以通过其行序与列序唯一交叉确定。显然，二阶行列式的值为 2! 个项的代数和，且可以视为左上角与右下角乘积减去右上角与左下角乘积，称**对角线法则**（Sarrus 规则）。

例 2 利用对角线法则计算二阶行列式的值。

① $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

解 由二阶行列式的对角线法则，得到

① $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\times2-(-1)\times3=13$

② $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x+\sin^2 x=1$

与二阶行列式类似，三阶行列式也是从求解三元一次方程组的问题中引出。这里，我们直接给出其定义。

由 $3^2=9$ 个数，排成三行三列的式子，并规定：实线上元素的乘积前加正号，虚线上元

素的乘积前加负号，称为**三阶行列式的对角线法则**，如图 1-1 所示。

这样规定的记号和运算，即称为**三阶行列式**（3 order determinant），即

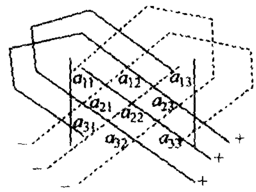

图 1-1 三阶行列式对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (1\text{-}2)$$

显然，三阶行列式的值为 3! =6 个项的代数和。

例 3 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 利用对角线法则得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$=1\times0\times(-1)+2\times1\times3+3\times(-1)\times1-3\times0\times3-1\times(-1)\times1-(-1)\times1\times2$$
$$=6$$

二、排列与逆序

作为定义 n 阶行列式的准备，我们先给出一些有关排列的基本概念。

由 n 个不同数码 1，2，…，n 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 n **级排列**。如，由 1，2，3 组成的三级排列有且仅有 3! =6 个，即

123，132，213，231，312，321

同理，n 级排列一共有 $n!$ 个。

定义 1 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，任意找出两个数，若较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 之前（$i_s<i_t$），则称 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**。一个 n 级排列的逆序总数，称为这个排列的**逆序数**，记为 τ（$i_1i_2\cdots i_n$）。

例如，在排列 231 中，2 与 1 构成一个逆序，3 与 1 构成一个逆序，共有 2 个逆序，这个排列的逆序数为 2，记为 τ（231）=2。

例 4 计算排列的逆序数。

①2431　　②$n(n-1)(n-2)\cdots321$

解 分别计算逆序的个数，得到

①2431 的逆序有 21、43、41、31，故 $\tau(2431)=4$。

②$n(n-1)(n-2)\cdots321$ 的逆序有

$$[n(n-1)、n(n-2)、\cdots、n1],[(n-1)(n-2)、\cdots、(n-1)1],\cdots,[32、31],21$$

故得到

$$\tau[n(n-1)(n-2)\cdots 321]=(n-1)+(n-2)+\cdots 3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义 2 逆序数 τ ($i_1 i_2 \cdots i_n$) 是偶数或 0 的排列称为**偶排列**，逆序数 τ ($i_1 i_2 \cdots i_n$) 为奇数的排列称为**奇排列**。

如：由于 $\tau(2431)=4$，排列 2431 是偶排列。$\tau(45321)=9$，排列 45321 是奇排列。

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样的一个变换称为一个对换。例如，排列 2134 施以对换（1，4）后得到排列 2431。

定理 1 对换改变排列的奇偶性。

也就是说，任意一个排列经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

证明 先看一个特殊的情形，即对换的两个数在排列中是相邻的情形。设排列为

$$\cdots jk \cdots$$

经过（j，k）对换变成新排列

$$\cdots kj \cdots$$

这里，"…"表示那些不动的数，显然新排列仅比原排列增加或减少了一个逆序，显然与原排列的奇偶性相反。

再看一般的情形，设排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$$

经过（j，k）对换变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$$

可以视为原排列将数码 j 依次与 i_1，i_2，…，i_s，k 作 $s+1$ 次相邻对换，变为

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k j \cdots$$

再将 k 依次与 i_s，i_2，…，i_1 作 s 次相邻对换得到新排列。即，新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到。$2s+1$ 是奇数，显然，奇数次这样的对换的最终结果还是改变奇偶性。

定理 2 n 个数码（$n>1$）共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半。

证明 n 级排列的总数 $n!$ 为偶数个（$n>1$）。若奇偶排列个数不等，则不妨设奇排列个数少于偶排列个数。若将所有的排列都施以相同对换，例如都对换（1，2），则 n 级排列的全体在施以相同对换后还是相同的 n 级排列全体。但由定理 1，对换后的偶排列个数少于奇排列个数，因而矛盾。所以，奇偶排列数的个数相等，各占一半。

三、n 阶行列式

有了排列的一些基础知识，我们就可以在分析三阶行列式表达式特点的基础上，给出 n 阶行列式的定义。

由 1-2 式可以看出，每一项都是取自不同行不同列的 3 个元素的积。在书写时，可以把每项元素的行标排成 123 自然排列，得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-3}$$

行标排成 123 自然排列，3 个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-4}$$

由于 3 个数 $j_1j_2j_3$ 为三级排列共有 6 个，正好可以用来决定三阶行列式 6 项的符号。现在分析（1-3）式中的一、二、三项为什么带正号，四、五、六项为什么带负号？可以看出，符号与列标排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数有关。显然 123，231，312 都为偶排列，321，213，132 都为奇排列。当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时前面带正号，相反带负号。故，每项前所带符号可以表示为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$。从而，三阶行列式可以表示为所有取自不同行、不同列的三个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的代数和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-5}$$

其中，$\sum$表示把所有通项 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 加起来，而 $j_1j_2j_3$ 要取完所有三级排列。

定义 3 ***n* 阶行列式**（*n* order determinant），是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 代数和，各项符号由 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 决定，偶排列带正号，奇排列带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-6}$$

n 阶行列式在 $n>3$ 时，不能使用对角线法则计算。

例 5 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 此行列式中有很多元素为 0，则通项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中就有很多项为 0，我们只需找出所有元素都不为 0 的项加起来即可。

由于每项取自不同的行与不同的列，第一行只有选 a_{14} 才不为 0，第二行只有选 a_{23}，第三行只有选 a_{32}，第四行只有选 a_{41}。这样 4！＝24 项中，只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 不为 0，故行列式的值为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

习 题

1. 计算下列行列式的值。

① $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} a^x & a^{-x} \\ c^x & 2 \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ ④ $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

⑤ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ⑥ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. 求下面排列的逆序数，从而判断它们的奇偶性。

①41253 ②35247 ③987654321

3. 在 6 阶行列式中，$a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$，$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 这两项应该带什么符号。

4. 由行列式定义计算下式中 x^4 与 x^3 的系数，并说明理由。

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

第二节 行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题，但当阶数 n 较大时，运算相当麻烦，而直接应用定义来计算行列式的值也不太可能。因此有必要介绍一些有关行列式的重要性质，在计算行列式时，应用其性质往往可以简化计算过程，起到事半功倍的效果。由于行列式的性质对任何阶数的行列式都成立，在这里为了便于叙述与举例，我们只讨论三阶行列式的性质，n 阶行列式同样适用。