初等数学能力训练

山东科学技术出版社

初等数学能力训练

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　18.75印张　340千字

1987年5月第1版　　1987年5月第1次印刷

印数：1—18600

ISBN 7—5331—0015—8

G・15

书号 13195・170　　定价 3.60元

编　　写（姓氏笔画为序）：

马　明（南京师范大学附中）　马　复（南京师范大学）
王儒钲（济南二十中学）　李庆胜（山东省实验中学）
苏　淳（中国科技大学）　余应龙（上海杨浦区教育学院）
杜锡录（中国科技大学）　严华祥（上海杨浦区教育学院）
严镇军（中国科技大学）　单　任（南京十五中学）
单　墫（中国科技大学）　康士凯（上海杨浦区教育学院）
程　龙（合肥市教育科研所）　舒五昌（复旦大学）

主　　审：曾　容（复旦大学附中，中国数学会理事）

责任编辑：宋德万

前　言

数学能力，是指运用数学知识、数学方法去分析、解决数学问题的能力。一个高中学生，要提高数学能力，不能仅对数学知识的单纯记忆和对例题、习题的机械搬套，而要依靠对数学知识和数学方法的理解和应用。

本书编写的宗旨是帮助具有高中水平的学生加深和加强对数学知识和数学方法的理解和应用，从而使他们的数学素质——数学能力得到培养、锻炼和提高。本书没有对数学知识和数学方法作系统的理论性、知识性论述和介绍，也没有对习题进行分类并给出对号入座的解法，而是引导学生对课程内的重点、难点和数学竞赛中常涉及到的某些内容和方法进行分类、探讨，使他们在思考中理解知识、掌握方法、受到训练。本书可作为高中学生课程学习、复习、研究的参考读物，也可作为数学竞赛训练的参考读物，还可供中学数学教师教学和第二课堂辅导作参考。

为保证本书的质量，特聘请了国内知名专家和有成就、有经验的中学教师参加编写。我们相信，广大读者通过本书的学习和阅读，定会获益非浅。

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 代　　数

第一讲　函数及其图象

一、映射与函数的概念

1. 映射

若 f 是集合 A 到集合 B 的一个单值对应，即对任何 $a\in A$，按照对应法则 f，有唯一的 $b\in B$ 与之对应，则称这个对应 f 为 A 到 B 的一个映射，记作 $b=f(a)$，又记 $f(A)=\{f(a)\,|\,a\in A\}$，则一般有 $f(A)\subseteq B$. 特别地若 $f(A)=B$，则称映射为满射. 若 $f(A)=B$，且当 $a_1\neq a_2$ 时，$f(a_1)\neq f(a_2)$，那么称映射 f 为 A 到 B 上的一一映射，这时 f 有一个逆映射 f^{-1}，满足：对任一 $a\in A$，有 $f^{-1}(f(a))=a$；对任一 $b\in B$，有 $f(f^{-1}(b))=b$.

函数是数集到数集的映射，中学阶段最普遍的是区间到区间的映射.

如果 $y=f(x)$ 是 D 到 M 的函数，称 D 为 $y=f(x)$ 的定义域，$f(D)$ 为 $y=f(x)$ 的值域. 因此，函数的本质在于对应关系，但函数永远是对应关系和定义域不可分开的整体概念.

函数 $y=f(x)$ 的图象就是在直角坐标系中描述下列点的集合 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$.

熟悉函数的一般性质和它的图象之间的关系，对研究和掌握一个函数的性质，形象地理解和记忆函数的本质属性有

很大的好处。

2. 反函数

如果函数 $y=f(x)$是它的定义域D到值域 M 的 1－1 映射，则称 f 的逆映射 f^{-1} 为函数 $y=f(x)$的反函数，习惯上，记作 $y=f^{-1}(x)$。它的定义域是M，值域是D，它的图象与函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称。

在定义域上单调的函数一定有反函数，且有相同的单调性（增减性）。

3. 复合函数

设 $x=\varphi(t)$是A到B的函数，而$y=f(x)$是C到D的函数，且 $B\leqslant C$，那么，$y=f(\varphi(t))$就是A到D的一个函数，称为复合函数。

二、函数的常见性质

函数的常见性质有单调性、对称性（奇偶性是特殊的对称性）、周期性、有界性等。

三、初等函数

1. 一次函数

一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$是单调函数，它的图象是直线。直线关于x轴的倾斜角的正切就是斜率k。一次函数($k\neq 0$)的反函数，也是一次函数。一次函数的特例（$b=0$）是正比例函数。

2. 二次函数

二次函数 $y=ax^2+bx+c=a(x-k)^2+m$ （$a\neq 0$)的图象关于直线$x=k=-\dfrac{b}{2a}$对称，在（$-\infty$，k)与(k，$+\infty$)上单

调，当 $x=k$ 时有极值 $m=c-\frac{b^2}{4a}$。二次函数 $y=ax^2$ 是一般二次函数的特例，它是偶函数。

两个和为定值 c 的变量 x 和 y 的积按二次函数 $u=cx-x^2$ 的规律变化，在 $x=\frac{c}{2}$ 时有极大值 $\frac{c^2}{4}$。

3．幂函数

$y=x^a$ 的定义域随幂指数 a 的不同而不同：当 $a>0$ 时，幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增大，当 $a<0$ 时，幂函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减小。

幂函数 $y=x^a$ 的图象都过点 $(1,1)$，它如果有反函数仍为幂函数。

4．指数函数

指数函数 $y=a^x(a>0,\ a\neq1)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，它的图象过点 $(0,1)$；当 $a>1$ 时是单调增的，当 $0<a<1$ 时是单调减的。指数函数总有反函数，它的反函数是对数函数。

5．对数函数

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上，它的图象过点 $(1,0)$，当 $a>1$ 时是单调增的，当 $0<a<1$ 时是单调减的。它的反函数是 $y=a^x$。对数函数与指数函数互为反函数。

换底公式：

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\quad(a,c,b>0,\ a\neq1,\ c\neq1)$$

四、例题

例1 设全集为R（实数集），$\varphi(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{11}$，$f(x)=\sqrt{x}$，试表述下列集合：(1)函数$\varphi(x)$的定义域$A$；(2)函数$f(x)$的定义域$B$；(3)函数$y=f(\varphi(x))$的定义域$D$；(4)方程$x^2-8x+7=0$的解集$E$；(5)用$D$、$E$、$R$表示函数$y=\frac{f(\varphi(x))}{x^2-8x+7}$的定义域$G$，并经集合的运算把它表述出来。

解 (1)函数$\varphi(x)$的定义域

$$A=\left\{x\left|\frac{2x+1}{11}>0\right.\right\}=\left\{x\left|x>-\frac{1}{2}\right.\right\}$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ +\infty\right);$$

(2) 函数$f(x)$的定义域$B=\{x|x\geqslant 0\}=[0,+\infty)$；

(3) 函数$y=f(\varphi(x))=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{11}}$的定义域

$$D=\left\{x\left|0<\frac{2x+1}{11}\leqslant 1\right.\right\}=\left(-\frac{1}{2},\ 5\right];$$

(4) 方程$x^2-8x+7=0$的解集$E=\{1,7\}$；

(5) 函数$y=\frac{f(\varphi(x))}{x^2-8x+7}=\frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{11}}}{x^2-8x+7}$的定义域

$$G=D\cap\bar{E}=\left(-\frac{1}{2},\ 5\right]\cap\{(-\infty,1)\cup(1,7)$$

$$\cup(7,+\infty)\}$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ 5\right)\cap(-\infty,\ 1)\cup\left(-\frac{1}{2},\ 5\right)$$

$$\cap(1,7)\cup\left(-\frac{1}{2},\ 5\right)\cap(7,+\infty)$$

$$=\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)\cup(1,5).$$

说明 本题从集合的角度在本质上回答了一个初等函数的定义域是如何求得的：$y=f(x)/g(x)$的定义域是$f(x)$的定义域与方程$g(x)=0$的解集的补取交得到的集合；$y=f(\varphi(x))$的定义域是$\varphi(x)$的定义域的子集。

例 2 已知集合 $A=\left\{(x,y)\left|\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{y}{x}<\sqrt{3}\right.\right\}$ 和集合 $B=\left\{(x,y)\left|\frac{y}{x}>0\right.\right\}$。求一个1－1映射，将$A$映射到$B$，并写出逆映射。

解 从已知集合A，B看出，它们分别是坐标平面上两直线所夹的角形区域内的点的集合(图 1.1)。

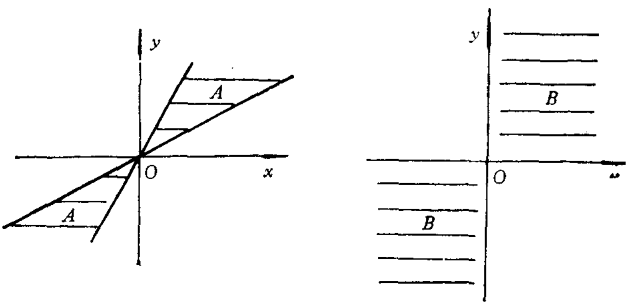

图 1·1

集合A为直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $y=\sqrt{3}x$ 所夹 $\frac{\pi}{6}$ 角内点的集合。集合B则是第一、三象限内点的集合，所要求的对

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

应实际上可使A区域展宽成B区域，要求没有“折叠”与“漏洞”。先用极坐标表示集合A和B

$$A=\left\{(\rho\cos\theta,\quad \rho\sin\theta)\middle|\rho\neq 0,\ \rho\in K,\ \frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}\right\},$$

$$B=\left\{(\rho\cos\alpha,\quad \rho\sin\alpha)\middle|\rho\neq 0,\ \rho\in R,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

显然，在所作的限制下直角坐标和极坐标表示都是唯一的，这在本质上也是一个1－1映射。

令f：$(\rho\cos\theta,\quad \rho\sin\theta)\to(\rho\cos\alpha,\quad \rho\sin\alpha)$，$\alpha=3\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$。在这个对应中，极径没有改变，幅角之间是一次函数：$\alpha=3\theta-\frac{\pi}{2}$，因而$\theta$和$\alpha$之间是1—1映射，其中$\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\alpha\in(0,\ \pi)$，于是$(\cos\theta,\ \sin\theta)$与$(\cos\alpha,\sin\alpha)$也是1—1对应的，映射$f$是$A$到$B$的1—1映射。

严格地讲，所要求的A到B的1—1映射应该由直角坐标$(x,y)\in A$到极坐标$(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$的1—1映射，极坐标$(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)$到极坐标$(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)$的1—1映射和由极坐标$(\rho\cos\alpha,\ \rho\sin\alpha)$到直角坐标$(x',\ y')\in B$的1—1映射连续完成的。

例3 已知函数$y=f(x)$的定义域是$|x|\leqslant\frac{1}{2}$，试表述下列函数的定义域：

(1) $f(\cos x)$；　(2)$f(a^x)(a>0)$；　(3)$f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a>0)$。

解 (1)$f(\cos x)$的定义域是

$$D=\left\{x\,\middle|\,|\cos x|\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\left\{x\,\middle|\,n\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant n\pi+\frac{\pi}{3},\ n\in J\right\};$$

(2) $f(a^x)$的定义域是 $D=\left\{x\,\middle|\,a^x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

当 $a>1$ 时，$D=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\log_a\frac{1}{2}\right\}$； 当 $a=1$ 时， $D=\phi$；

当$0<a<1$ 时，$D=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\log_a\frac{1}{2}\right\}$.

(3) $f(ax)+f\left(\dfrac{x}{a}\right)$的定义域是下列集合的交集：

$$D_1=\left\{x\,\middle|\,|ax|\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\left[-\frac{1}{2a},\ \frac{1}{2a}\right],$$

$$D_2=\left\{x\,\middle|\,\left|\frac{x}{a}\right|\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right].$$

∵ 当 $a\geqslant1$ 时$\dfrac{1}{2a}\leqslant\dfrac{a}{2}$；当 $a<1$ 时$\dfrac{1}{2a}>\dfrac{a}{2}$.

∴ 当 $a\geqslant1$ 时， $D_1<D_2$， $D_1\cap D_2=D_1$； 当 $a<1$ 时，$D_1>D_2$，$D_1\cap D_2=D_2$.

说明 本题表述一个抽象函数与一个具体函数复合或经有理运算后的函数的定义域，它主要依据的是函数概念. 显然，这里的方法是具有一般性的，由此想开去，当$f(x)$的定义域仍为$|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$时，不难得到下列函数的定义域：$f(\mathrm{tg}\,x)$，$f(\log_a x)$， $f(a+x)\pm f(a-x)$， $f\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)\cdots$. 注意，这里要对 a 进行讨论.

例 4　已知　$f(x)=\begin{cases}-2x-5 & x<-2,\\ -\dfrac{x^2}{2}+1 & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 1-x & x>2,\end{cases}$

求 $f(-3)$，$f\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f(-2)$，$f(-5)$并作图，再求集合 $A=\left\{x\,\middle|\,f(x)=\dfrac{1}{2}\right\}$。

解　$f(-3)=2\times3-5=1$，

$$f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1=\frac{5}{8},$$

$$f(-2)=-\frac{1}{2}(-2)^2+1=-1,$$

$$f(-5)=5。$$

该函数在 $x<-2$ 时为直线 $y=-2x-5$；在 $x\in[-2,2]$ 时为二次函数 $y=1-\dfrac{x^2}{2}$；在 $x>2$ 时，为直线 $y=1-x$。$f(x)$的图象如图 1.2 所示。

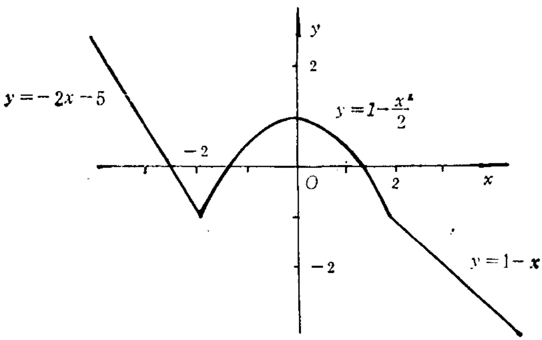

图 1·2

由 $-2x-5=\frac{1}{2}$，得 $x=-\frac{11}{4}\in(-\infty,\ -2)$；由 $1-\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}$，得 $x=\pm1\in[-2,\ -2]$；由 $1-x=\frac{1}{2}$，得 $x=\frac{1}{2}\bar{\in}[2,\ \infty)$。 $\therefore\ A=\left\{x\middle|f(x)=\frac{1}{2}\right\}=\left\{-\frac{11}{4},\ -1,\ 1\right\}$。

例 5　在下列各题的答案中选择一个正确的，需要时说明其它答案不正确。

(1) 若 $f(x)=\log_a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$，$|x|<1$，那么 $f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x}\right)$ 用 $f(x)$ 表示为 $a)\ -f(x)$；$b)\ 2f(x)$；$c)\ 3f(x)$；$d)\ (f(x))^2$；$e)\ f^3(x)-f(x)$。

(2) 若 $g(x)=1-x^2$，且当 $x\neq0$ 时，$f(g(x))=\frac{1-x^2}{x^2}$，那么 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 等于 $a)\ \frac{3}{4}$；$b)\ 1$；$c)\ 3$；$d)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$；$e)\ \sqrt{2}$。

(3) 定义在实数集 R 内的函数 $f(x)\neq0$，对任意 a，$b\in R$，有 $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)+2f(b)$，那么对任意 x、$y\in R$ 有 $a)\ f(0)=1$；$b)\ f(-x)=-f(x)$；$c)\ f(-x)=f(x)$；$d)\ f(x+y)=f(x)+f(y)$；$e)$ 有一正数 T，使 $f(x+T)=f(x)$。

(4) 定义在整数集的函数 $f(n)$，满足

$$f(n)=\begin{cases}n-3 & n\geqslant1000\\ f[f(n+5)] & n<1000,\end{cases}$$

那么 $f(84)$ 的值是：$a)\ 83$；$b)\ 84$；$c)\ 997$；$d)\ 89$；$e)\ 998$。

解 (1) $f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)=\log_a\frac{1+\frac{3x+x^3}{1+3x^2}}{1-\frac{3x+x^3}{1+3x^2}}$

$$=\log_a\frac{1+3x+3x^2+x^3}{1-3x+3x^2-x^3}=\log_a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$$

$=3\log_a\frac{1+x}{1-x}=3f(x)$，故选择 c)

(2) $f(g(x))=\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{1-g(x)}$， ∴ $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ 选择 b)。

(3) 在 $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)+2f(b)$ 中令 $b=0$，得 $f(0)=0$,再在上式中令 $a=0$，得 $f(b)+f(-b)=2f(b)$，得 $f(-b)=f(b)$。由 b 的任意性，c) 一定成立。

若 b) 成立，由 $f(-x)=f(x)$，得 $f(x)=0$，又与 $f(x)\neq 0$，矛盾。

若 d) 成立，令 $y=-x$，得 $0=f(x)+f(-x)=2f(x)$，又与 $f(x)\neq 0$，矛盾。

若 e) 成立，令 $x=0$，得 $f(T)=0$,也有 $f(-T)=f(T)=0$。在 $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)+2f(b)$中,令 $a=b=\frac{\pi}{2}$，得 $f(T)+f(0)=4f\left(\frac{T}{2}\right)$，即 $f\left(\frac{T}{2}\right)=0$。再在等式 $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)+2f(b)$中，令 $a=b$，得 $f(2a)+f(0)=4f(a)$，因 a 是任意的，有 $f(2x)=4f(x)$。令 $a+b=xT$，$a-b=T$，即 $a=\frac{(1+x)T}{2}$，$b=\frac{(x-1)T}{2}$，得 $f(xT)+$

$f(T)=2f\left(\frac{(x+1)T}{2}\right)+2f\left(\frac{(x-1)T}{2}\right)=f((x+1)T)+f((x-1)T)=f(x+xT)+f(xT-T)=f(xT)+f(xT)=2f(xT)$，$\therefore f(xT)=0$。由 x 的任意性，上式即 $f(x)\equiv 0$，这又导致矛盾因而 e)不能成立。

以上证明了唯有 c)成立。

(4) $f(999)=998$，$f(998)=997$，$f(997)=998$，$f(996)=997$，使用归纳法可以证得 $f(2n+1)=998$，$f(2n)=997$，$n<500$ 为整数，$\therefore f(84)=997$。

例 6　已知函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的图象与它的反函数的图象完全重合，其中实数 a，b，c，d，满足 $(a^2+c^2)(c^2+d^2)\neq 0$，那么函数应该具有怎样的形式？

解　函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数是 $y=\frac{b-dx}{cx-a}$，它们的图象完全重合，就是对定义域内的任一实数 x 都有

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-dx}{cx-a},$$

或者写成 $(ax+b)(cx-a)=(cx+d)(b-dx)$，即 $c(a+d)x^2-(a^2-d^2)x-b(a+d)=0$，故 a，b，c，d 满足关系式 $c(a+d)=0$，$a^2=d^2$，$b(a+d)=0$。

当 $c=0$ 时，由 $(a^2+c^2)(a^2+d^2)\neq 0$，有 $a\neq 0$，$d\neq 0$。这时，若 $b=0$，则 $d=\pm a$，函数是 $y=\frac{ax+b}{cx+d}=x$ 或 $y=-x$；若 $b\neq 0$，则 $d=-a$，这时函数是 $y=-x-k$。

当 $c\neq 0$ 时，必须 $d=-a$，这时函数 $y=\frac{ax+b}{cx-a}$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com