

新课程



高中数学

疑难全解



主 编◎邵丽云



南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

新课程



高中数学

疑难全解

主 编：邵丽云

编 者：王立明 彭 侠 周广庆 徐成周

周明君 王 虎 邵丽云



南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高中数学疑难全解 / 邵丽云主编. —南京: 南京师范大学出版社, 2006. 12

ISBN 7-81101-506-4/G · 1004

I. 高... II. 邵... III. 数学—高中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 122621 号

书 名	高中数学疑难全解
主 编	邵丽云
责任编辑	王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地 址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电 话	(025)83598077(传真) 83598412(营销部) 83598297(邮购部)
网 址	http://press.njnu.edu.cn
E-mail	nspzbb@njnu.edu.cn
照 排	江苏兰斯印务发展有限公司
印 刷	南京新洲印刷有限公司
开 本	850×1168 1/32
印 张	10.25
字 数	295 千
版 次	2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 7-81101-506-4/G · 1004
定 价	14.00 元

南京师大版图书若有印装问题请与销售商调换
版权所有 侵犯必究

前 言

高中新课程启动后,解决呈现在广大学生面前的疑难问题,既是教学实践中不可避免的重要环节,又是课改顺利推进的关键所在。这关系是否能够实现“由强调科学知识内容获取向理解科学过程转变,由强调单纯积累知识向探索知识转变”的初衷。

新课程内容广、难度大。如化学中的物质结构、反应原理,数学中的算法初步、概率、统计,物理中的力与机械、电磁感应、碰撞与动量守恒,生物中的遗传与进化、稳态与环境等。另外,英语中的语法也一直是个头疼的问题。新教材中部分内容在以前的教材中从来没有出现过,有不少还是原来大学里才学习的内容。与以往教科书相比,内容大幅拓展与部分难度有所加深,给同学们的学习甚至不少老师的教学带来了困难。这些问题得不到及时解决,在后续学习中将出现知识“夹生”,影响知识的系统掌握不说,更大的问题在于,这些疑难可能成为大家探求和理解新知识的心理障碍,严重影响对有关学科的学习兴趣。

为此,我社组织了全国最早实施高中新课程的山东、广东和 2005 年进入课改的教育大省江苏省的特、高级教师(详见“主编简介”),对同学们学习中碰到的疑难问题展开大面积调查,并在此基础上梳理与筛选,最终各学科确定了 200 个左右的疑难问题,一一加以进行深入剖析,供同学们在学习时参考。

本书采用了简洁实用的编排方式:**问题提出**——以一句话概括出疑难问题;**释疑解难**——针对问题,从知识脉络、拓展、学法进行深入剖

析,透彻讲解;**疑难突破练习**——根据疑难问题,编制1~2个针对性强的配套练习,并提供参考答案。丛书共有5本,涵盖英语、数学、物理、化学、生物等学科,其主要特点如下:

◆**集中破解学习中的疑难问题**。学习的进步不仅在于掌握已经熟悉的内容,更在于弄懂你还不懂的内容。本书就是要引领你去理解并一一攻克这些难关。

◆**强力改造学习中的错题惯性**。错了一次不要紧,严重的是错了还错。本书在讲解疑难过程中,将为你透彻分析为什么难、为什么易错,并通过针对性极强的“疑难突破练习”,帮助你彻底理解所学知识,重点掌握知识链上的关键内容,从根本上消除错题惯性。

◆**全面总结名师的经验与秘诀**。将特、高级教师从教以来的经验与智慧浓缩于这套《疑难全解》。拥有《疑难全解》,你就掌握了名师的点金术。

书海茫茫,发现本书,是你与南京师范大学出版社基础教育图书事业部结缘的第一步;选择本书,意味着你选择了我们的服务,并通过我们和名师结缘。相信你的慧眼,感谢你的信任!

南京师范大学出版社

目 录

必修 1 集 合

1. 如何区分 $\emptyset$ 、 $\{\emptyset\}$ 、 0 、 $\{0\}$?	001
2. 集合的运算有哪些常用性质与结论?	002
3. 对应、映射、函数有何关系?	004

必修 1 函 数

4. 求函数解析式有哪些常用方法?	006
5. 判断函数单调性有哪些常用方法?	010
6. 函数的单调性有哪些应用?	013
7. 判断函数奇偶性要注意什么? 判断函数奇偶性常用的方法有哪些?	017
8. 函数的奇偶性有哪些性质?	019
9. 函数一定存在反函数么? 什么样的函数存在反函数?	023
10. 如何求二次函数在区间上的最值?	024
11. 函数的零点是函数的图像与 x 轴的交点吗? 它与方程的根有何关系?	027
12. 分数指数幂与根式有何关系?	031
13. 指数式 $a^b = N$ 与对数式 $\log_a N$ 中, a, b, N 三者之间有何关系?	032
14. 指数函数、对数函数有哪些常见问题?	034
15. 幂函数的图像有哪几种形式? 有哪些性质?	037

必修 2 立体几何

16. 如何证明线线、线面、面面之间的平行和垂直?	040
17. 四面体中有哪些常见的数量关系和位置关系?	043
18. 立体几何中分割与补形有哪些常见技巧?	047
19. 经度、纬度分别指的是什么角? 如何求两点间的球面距离?	050

必修 2 直线和圆的方程

20. 直线的倾斜角和斜率有何关系?	052
21. 直线方程的五种形式有哪些限制条件?	053
22. 两直线平行、垂直的等价条件是什么?	055
23. 什么是直线系? 常见的直线系有哪些? 有何应用?	056
24. 平面解析几何中常用的对称公式有哪些?	058
25. 求圆的方程常用的方法有哪些?	060
26. 直线与圆有几种位置关系? 如何判断?	062
27. 圆与圆有几种位置关系? 如何判定?	064
28. 会写出过两圆交点的圆系方程吗? 它有何应用?	066

必修 3 算 法

29. 算法有哪些特征? 它的描述方法有哪些?	068
30. 画程序框图有什么规则?	069
31. 算法有几种基本的逻辑结构? 共同点是什么? 如何用框图表示?	069
32. 基本的算法语句有哪几种? 如何使用?	072

002

必修 3 统计——抽样

33. 简单随机抽样有什么特点? 它有哪些具体的方法?	076
34. 系统抽样有什么特点? 当总体容量不能被样本容量整除时怎么办?	078
35. 分层抽样、简单随机抽样、系统抽样有什么共同点和不同点?	080

必修 3 统计——样本分布

36. 样本频率分布直方图与总体密度曲线有何关系?	082
37. 什么是众数、中位数、平均数? 这些数字特征在反映总体时有哪些优缺点?	082
38. 方差和标准差在反映总体时有什么意义?	083

必修 3 概 率

39. 频率和概率有何关系?	086
40. 互斥事件与对立事件有何关系? 如何判断互斥事件与对立事件?	087

41. 概率的加法公式有哪些应用?	090
42. 古典概型有哪些特征? 有哪些常见问题?	091
43. 几何概型有哪些特征? 有哪些常见问题?	096

必修 4 三角函数

44. 三角函数线有哪些应用?	100
45. 三角函数图像有哪些变换技巧?	102
46. 如何求三角函数的周期?	105
47. 如何求三角函数的最值?	106
48. 三角函数的求值、化简、证明常用的方法有哪些?	111
49. 反正弦、反余弦、反正切的意义是什么?	116

必修 4 平面向量

50. 向量中有关模的结论有哪些? 有哪些应用?	118
51. 在三角形中, 有关向量的常用结论有哪些?	119
52. 向量有哪些常见应用?	121

003

必修 5 解三角形

53. 正、余弦定理有哪些应用?	125
------------------------	-----

必修 5 数 列

54. 数列的通项公式有哪些常用求解方法?	128
55. 如何判断或证明一个数列是等差数列或等比数列?	132
56. 等差数列有哪些性质? 会巧用等差数列的性质解题吗?	135
57. 等比数列有哪些性质? 会巧用等比数列的性质解题吗?	137
58. 数列求和的类型与策略有哪些?	140
59. 数列有哪些常见应用问题?	145

必修 5 不等式

60. 在应用不等式性质时要注意些什么?	150
61. 解不等式的常见类型与方法有哪些?	153

62. 如何利用基本不等式求最值?	157
63. 如何判断二元一次不等式(组)表示的平面区域?	160

选修 2—1(选修 1—1) 简单逻辑

64. 如何理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”?	163
65. 常用的正面叙述词语和它的否定词语有哪些?	164
66. 如何判断复合命题的真假?	166
67. 如何判断充分条件, 必要条件, 充要条件?	169
68. 如何对含有一个量词的命题进行否定?	171

选修 2—1(选修 1—1) 圆锥曲线

69. 圆锥曲线的定义有哪些应用?	174
70. 求圆锥曲线的标准方程有哪些常用方法? 其标准方程有哪些应用?	177
71. 圆锥曲线离心率的大小与圆锥曲线的形状有何关系? 如何求离心率?	180
72. 直线和圆锥曲线有几种位置关系? 如何判断?	182
73. 圆锥曲线的弦中点问题的解题策略有哪些?	188
74. 求动点的轨迹方程有哪些常用方法?	193
75. 如何求圆锥曲线中参数的取值范围?	199

选修 2—1 空间向量、角度及距离

76. 两条异面直线所成的角、直线和平面所成的角、二面角它们的取值范围 各是什么? 应该怎样求?	204
77. 空间的距离有几种? 如何求这些距离?	212

选修 2—2 导数、微积分定理

78. 导数的几何意义是什么? 物理意义是什么?	220
79. 如何求复合函数的导数?	221
80. 如何用导数研究函数的单调性?	223
81. 如何用导数研究函数的极值与最值?	225
82. 定积分与微积分基本定理有哪些应用?	226

选修 2-2(选修 1-2) 推理与证明 复数

83. 合情推理与演绎推理的联系与区别是什么?	231
84. 如何理解类比推理?	234
85. 反证法的思考过程与特点是什么?	236
86. 数学归纳法有哪些应用?	238
87. 复数方程 1 的立方根有哪些应用?	241
88. 复数的几何意义有哪些应用?	243

选修 2-3 排列组合、二项式定理、数据分布

89. 两个计数原理的各自特点是什么?	245
90. 解决排列应用问题的常用方法有哪些?	247
91. 解决组合应用问题的方法有哪些?	250
92. 二项式展开式的二项式系数有何特点? 关于二项式定理的常见问题有哪些?	253
93. 二项式定理有哪些应用?	257
94. 如何求离散型随机变量的分布列?	259
95. 条件概率 $P(A B)$ 与概率 $P(A)$ 有何区别与联系?	262
96. 如何理解超几何分布及其推导过程? 超几何分布有哪些应用?	269
97. n 次独立重复试验的模型及二项分布有哪些应用?	270
98. 如何用离散型随机变量的期望与方差解决实际问题?	273
99. 正态分布曲线的特点和曲线所表示的意义是什么?	278
100. 独立性检验的基本思想是什么? 步骤如何?	280
101. 如何理解推断原理与假设检验的基本思想? 何谓聚类分析?	282
102. 回归分析的基本思想是什么? 方法有哪些?	

选修 4-1 几何证明

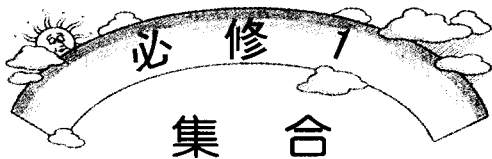
103. 几何证明的常用方法有哪些?	286
104. 圆有哪几方面的常见问题? 解决的方法有哪些?	291

选修 4—4 坐标系与参数方程

105. 利用圆锥曲线的统一极坐标方程解决哪些问题方便? 294
106. 曲线的参数方程有哪些应用? 296

选修 4—5 不等式选讲

107. 解含参数的不等式应怎样讨论? 有哪些常用方法? 300
108. 不等式恒成立问题的求解策略有哪些? 304
109. 如何解决与二次函数有关的含有绝对值不等式的证明问题? 307
110. 柯西不等式有哪些常见应用? 311



疑难 I 如何区分 $\emptyset$ 、 $\{\emptyset\}$ 、 0 、 $\{0\}$?

空集 $\emptyset$ 是不含任何元素的集合, $\{\emptyset\}$ 是只含有一个元素 $\emptyset$ 的集合, 两个集合的关系是 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$, 也可把集合 $\emptyset$ 看成集合 $\{\emptyset\}$ 的元素, 所以 $\emptyset \in \{\emptyset\}$ 也是对的. 0 是元素, $\{0\}$ 是只含有 0 一个元素的集合, 它们的关系是 $0 \in \{0\}$. $\{\emptyset\}$ 与 $\{0\}$ 都是只含一个元素的集合, 但是两个集合不相等. $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 也是不同的集合, 它们的关系为 $\emptyset \not\subseteq \{0\}$.

疑难突破练习

001

- 有下列命题: ①空集没有子集; ②任何集合至少有两个子集; ③空集是任何集合的真子集; ④若 $\emptyset \subsetneq A$, 则 $A \neq \emptyset$. 其中正确的有 _____ 个.
- 有下列六个关系式: ① $\{a, b\} = \{b, a\}$; ② $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; ③ $\emptyset = \{\emptyset\}$; ④ $\{\emptyset\} = \{0\}$; ⑤ $\emptyset \subsetneq \{0\}$; ⑥ $0 \in \{0\}$; ⑦ $\emptyset \in \{\emptyset\}$; ⑧ $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$. 其中正确的个数为 _____ 个.
- 下面四个集合中, 表示空集的是 ().
 A. $\{0\}$ B. $\{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$
 C. $\{x | x^2 - 1 > 0, x \in \mathbf{R}\}$ D. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$

答案及解析

1. 1 2. 6 3. B

疑难 2 集合的运算有哪些常用性质与结论?

集合运算的常用性质有:空集是任意集合的子集.两个集合之间,当有关系 $A \subseteq B$ 时,不要忽略对集合 A 有可能为空集情况的讨论.同样,对于性质:空集与任意集合 A 的交集还是空集;空集与任意集合 A 的并集还是集合 A ,在用这两个性质时也要注意空集的情况.还有几个常用性质如:

反演律(摩根法则): $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$, $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$.

传递性:若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$; $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.

常用结论: $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$; $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$. 注意该结论的应用,它是把集合的交并关系转化为包含关系,这是集合运算中常用的方法.

例 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$.

(1)若 $A \cap B = B$,求实数 a 的范围;

(2)若 $A \cup B = B$,求实数 a 的值.

解析 (1) $A \cap B = B \Leftrightarrow A \supseteq B$, 又 $A = \{0, -4\}$, $\therefore B \subseteq \{0, -4\}$.

①当 B 为单元素集时, $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = -1$, 此时 $B = \{0\}$ 满足题意;

②当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta < 0 \Leftrightarrow a < -1$;

③当 B 有两个元素时, $\begin{cases} 0 - 4 = -2(a+1), \\ 0 = a^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$.

综上所述: $a \leq -1$ 或 $a = 1$.

(2) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$, $\therefore \{0, -4\} \subseteq B$.

由 $\Delta > 0 \Leftrightarrow a > -1$, $A = B \Leftrightarrow a = 1$.

综上所述: $a = 1$.

疑难突破练习

1. 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是

().

A. $(\complement_I A) \cup B = I$

B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$

C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$

D. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \complement_I B$

2. 设集合 $A = \{(x, y) | 4x + y = 6\}$, $B = \{(x, y) | 3x + 2y = 7\}$, 则满足 $C \subseteq A \cap B$ 的集合 C 的个数为().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

3. 设集合 $I = \{1, 2, 3\}$, A 是 I 的子集, 如果把满足 $M \cup A = I$ 的集合叫做 A 的“配集”, 则当 $A = \{1, 2\}$ 时, A 的配集共有().

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

4. 已知集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则().

A. $M = N$

B. $M \subsetneq N$

C. $M \supsetneq N$

D. $M \cap N = \emptyset$

5. 已知集合 $M = \{y | y = -x^2 + 2, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{y | y = -x + 2, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 $M \cap N$ 等于().

A. $\{(0, 2), (1, 1)\}$

B. $\{(1, 2)\}$

C. $\{y | y \leq 2\}$

D. $\{y | 1 \leq y \leq 2\}$

6. 已知集合 $A = \{2, 3\}$, 集合 $B \subseteq A$, 则这样的集合 B 一共有().

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

7. 已知集合 $M = \{(x, y) | y = x + 1, x, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $N = \{(x, y) | y = 2x, x, y \in \mathbf{R}\}$, 那么 $M \cap N =$ _____.

8. 已知 $A = \{x | x^2 + (m+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

9. 已知 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$, 若满足 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

答案及解析

1. B 2. B 3. D 4. B 5. C 6. D 7. $\{(1, 2)\}$

8. $\because A \cap B = \emptyset$, ①当 $A = \emptyset$ 时, $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 0$;

②当 $A \neq \emptyset$ 时, 设方程 $x^2 + (m+2)x + 1 = 0$ 的两个根分别是 x_1, x_2 ,

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 x_2 = 1 > 0 \\ x_1 + x_2 = -(m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0. \text{ 综上所述, } m > -4.$$

9. $\because B \subseteq A$, 则①当 $B = \emptyset$ 时, 有 $2m-1 < m+1 \Leftrightarrow m < 2$;

$$\text{②当 } B \neq \emptyset \text{ 时, 则 } \begin{cases} m+1 \geq -2, \\ 2m-1 \leq 5, \\ m+1 \leq 2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 3. \text{ 综上所述可知 } m \leq 3.$$

疑难3 对应、映射、函数有何关系?

对应、映射、函数是三个不同而又相互联系的概念. 对应是一个原始的概念. 它指的是有两个集合 A 与 B , 如果有对应关系 f , 把集合 A 和集合 B 的一个子集的元素联系起来, 那么就形成了从集合 A 到集合 B 之间的一个对应. 两个非空集合 A 与 B 之间的对应有以下四种形式: 一对一对应, 一对多对应, 多一对对应, 多对多对应. 由映射的概念可知映射是一个特殊的对应, 是一对一或多对一的对应. 由函数的近代定义可知, 函数实质上是从集合 A 到集合 B 的一个特殊的映射, 其特殊性在于 A, B 都是非空的数集.

所以函数可以看成是两个非空数集上的映射, 而映射又可看成是一对一或多对一的特殊对应.

疑难突破练习

1. 下列对应是否为从集合 A 到 B 的映射? 是否为从集合 A 到 B 的函数?

(1) $A = \mathbf{R}, B = \mathbf{R}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x+1}$;

(2) $A = \{a \mid \frac{1}{2}a \in \mathbf{N}^+\}, B = \{b \mid b = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^+\}, f: a \rightarrow b = \frac{1}{a}$;

(3) $A = \{x \mid x \geq 0\}, B = \mathbf{R}, f: x \rightarrow y^2 = x$;

(4) $A = \{\text{平面 } \alpha \text{ 内的矩形}\}, B = \{\text{平面 } \alpha \text{ 内的圆}\}, f: \text{作矩形的外}$

接圆.

2. 设 $M = \{a, b, c\}$, $N = \{-1, 0, 1\}$.

(1) 求从 M 到 N 的映射的个数;

(2) 若从 M 到 N 的映射满足 $f(a) - f(b) = f(c)$, 试确定这样的映射 f 的个数.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 5]$, 在同一坐标系下, 函数 $y = f(x)$ 的图像与直线 $x = 1$ 的交点个数为().

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 0 个或 1 个均有可能

4. 在给定的映射 $f: (x, y) \rightarrow (2x + y, xy) (x, y \in \mathbf{R})$ 下, 点 $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$ 的原象是().

A. $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{36})$

B. $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ 或 $(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$

C. $(\frac{1}{36}, -\frac{1}{6})$

D. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ 或 $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{4})$

5. 由等式 $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x+1)^4 + b_1(x+1)^3 + b_2(x+1)^2 + b_3(x+1) + b_4$ 定义映射 $f: (a_1, a_2, a_3, a_4) \rightarrow (b_1, b_2, b_3, b_4)$, 则 $f(4, 3, 2, 1) = ()$.

A. (1, 2, 3, 4)

B. (0, 3, 4, 0)

C. (-1, 0, 2, -2)

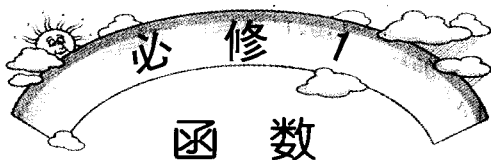
D. (0, -3, 4, -1)

答案及解析

1. (1) 不是映射 (2) 是映射是函数 (3) 不是映射 (4) 是映射, 不是函数

2. (1) 27 个 (2) 7 个

3. B 4. B 5. D



疑难1 求函数解析式有哪些常用方法?

1. 待定系数法.

根据已知条件设一个含有待定系数的代数式或函数式或方程,然后利用恒等的性质,或将已知的条件代入,求出待定系数的值,或者消去这些待定系数,找出原来已知系数间存在的关系.

例1 若一次函数 $f(x)$ 满足 $f[f(x)] = 1 + 2x$, 求 $f(x)$.

解析 令 $f(x) = ax + b$, $\therefore f[f(x)] = a(ax + b) + b = 1 + 2x$,

即 $a^2x + b(a + 1) = 1 + 2x$, $\therefore a^2 = 2, b(a + 1) = 1$,

$$\therefore \begin{cases} a = \sqrt{2}, \\ b = -1 + \sqrt{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\sqrt{2}, \\ b = -1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

故 $f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1$ 或 $f(x) = -\sqrt{2}x - (\sqrt{2} + 1)$.

2. 换元法.

通过引入一个或几个新的变量来替换原来的某些量的解题方法. 常见的换元如局部换元、整体换元、三角换元、分母换元、平均换元等等.

例2 已知函数 $f(x+1) = 2x^2 + 1$, 求 $f(x)$, $f(x-1)$.

解析 令 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, $\therefore f(t) = 2(t-1)^2 + 1$.

$\therefore f(x) = 2(x-1)^2 + 1$, $f(x-1) = 2x^2 - 8x + 9$.

3. 配凑法.

根据具体解析式凑出符合变量的形式,从而求出解析式.

例3 函数 $f(x - \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

解析 $f(x - \frac{1}{x}) = (x - \frac{1}{x})^2 + 2$, $\therefore f(x) = x^2 + 2$.