高等学校教材

高等数学

(物理类专业用)

(第三版)

第一册

四川大学数学系高等数学教研室 编

高等教育出版社

本书第二版在 1991 年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获国家教委二等奖

ISBN 7-04-005141-9

9 787040 051414 >

定价 12.70 元

高等学校教材

高等数学

（物理类专业用）

（第三版）

第一册

四川大学数学系高等数学教研室 编

高等教育出版社

内容简介

本书是四川大学数学系高等数学教研室编《高等数学》第一册的第三版。本版保持了第二版说理浅显、叙述详细、便于教学的特点。主要内容为函数和极限、微分学、不定积分、微分方程初步、定积分等。

本书由周城璧同志编写，贾瑞霞同志选配习题及答案。本书可供综合大学和师范院校物理类专业作为教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/四川大学数学系高等数学教研室编．—3版．第一册
北京：高等教育出版社，1995(2001重印)
高等学校教材·物理类专业用
ISBN 7-04-005141-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．四…Ⅲ．高等数学-高等学校-教材Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第00624号

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	河北省香河县印刷厂	版　次	1978年3月第1版
开　本	850×1168　1/32		1995年3月第3版
印　张	13.125	印　次	2001年1月第8次印刷
字　数	340 000	定　价	12.70元

第三版序言

为使本书符合国家教育委员会高等教育司1989年印发的《综合大学本科物理类专业高等数学课程教学基本要求》，并进一步提高本书质量，现对第一册、第二册的第二版进行修订，本版仍保持原书通俗易懂、便于自学的特点，主要改动有：按基本要求对个别内容作了增删（如增加了实数的基本理论和闭区间上连续函数的性质的证明）；改正了第二版的错漏；对习题作了小量补充；引入了少量数学符号。与此同时，对本书的一些定义和定理的叙述，定理的证明作了相应的改动。

高等数学教材建设组对这次修订给予很大的帮助，专门召开了修订本书的研讨会。高等数学教材建设组组长曹之江教授亲自主持研讨会，参加会议的中山大学范达教授，北京师范大学王家鸾教授、李天林教授，广西大学曾纪雄教授，以及武汉大学侯友良老师，贵州师范大学的几位老师对第二版提出了全面、系统的批评意见和修改建议。复旦大学秦曾复教授认真细致地审阅了修改稿，提了许多宝贵的意见，对提高本书的质量，起了很大的作用。在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书责任编辑高等教育出版社的杨芝馨同志，为本书第二、三版作了许多深入细致的工作，为提高本书质量付出了艰辛劳动，在此向她表示衷心感谢。

虽然本书已是第三版，但限于我们的水平，错误和不妥之处仍在所难免，请广大读者给予批评指正。

编者

1994年4月于四川大学

第二版序言

本套书(共四册)自1978年2月起陆续出版以来,收到许多读者的来信,对本书的内容安排,习题配备等方面提出了很多宝贵意见,有的读者还为书中出现的错误编制了勘误表,这对我们的修改工作起了很大的作用。借此再版之机,向关心和支持我们工作的广大读者,表示衷心的感谢。

本套书是根据原教育部制定的"高等数学教学大纲"(由北京大学拟订供物理类专业使用)修订的,我们对第一版书中未严格证明的定理补充了证明(少数证明较复杂,或涉及内容超出大纲的例外)。考虑到与高中内容的衔接,函数和极限部分的讲法尽量与中学的讲法一致,极限一节中略为补充了一些内容,习题的配备也作了一定的修改。书后备有答案。

中山大学范达副教授细致地审阅了修订稿,提了许多宝贵的意见,对提高本书的质量起了很大的作用,我们非常感谢。

由于我们水平有限,虽然这次修订我们尽了很大的努力,但错误和不妥之处仍可能出现,希望广大读者予以指正。

编者

1987年1月于四川大学

第一版序言

本书是根据1977年10月在上海召开的理科教材编写大纲讨论会所拟订的物理类高等数学和数学物理方法编写大纲写成的。

全书分四册出版。前三册为高等数学部分；第四册为数学物理方法部分。具体内容为：第一册包括函数与极限、微分学、不定积分、微分方程初步、定积分；第二册包括立体解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、场论初步、无穷级数（包括傅氏级数）、反常积分；第三册包括线性代数、微分方程、概率论初步；第四册包括复变函数、数学物理方程、特殊函数等。

由于物理类各专业所需要的数学不尽相同，本教材除共同需要的部分外，增加了一些加 * 号的内容，各专业可根据需要，自行选用。

本书初稿完成后承有关兄弟院校的同志进行审稿，提供了许多修改意见，特此表示衷心的感谢。

由于水平所限，又兼仓促完稿，本书在内容安排、文字修饰和习题选配等方面，还存在许多问题，希望同志们指正。

编者

1978 年 2 月

常用符号简介

读者在中学学过的知识，本书不再重复，这里仅将后面内容中常用的符号作些复习和介绍.

1．本书所说的数都是实数．全体实数组成的集合称为实数集，记为**R**．本书所说的数集都是实数集**R**的子集．常用的子集有：

N表示自然数集；**Z**表示整数集；**Q**表示有理数集.

2．$\in$表示属于；$\overline{\in}$表示不属于.

如A是集合，x是元素，$x\in A$表示元素x属于A．$x\overline{\in}A$表示元素x不属于A.

3．区间　现将各种区间的符号、名称、定义列表如下(a，$b\in\mathbf{R}$，且$a<b$)：

定　义	名　称	符　号	图　象
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	半开区间	$(a,b]$	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开区间	$[a,b)$	
$\{x\mid a<x\}$	无限区间	$(a,+\infty)$	
$\{x\mid a\leqslant x\}$	无限区间	$[a,+\infty)$	

定　义	名　称	符　号	图　象
$\{x \mid x<a\}$	无限区间	$(-\infty, a)$	
$\{x \mid x \leqslant a\}$	无限区间	$(-\infty, a]$	
$\{x \mid x \in \mathrm{R}\}$	无限区间	$(-\infty, +\infty)$	

注意：这里“∞”并不表示数量，它只是一个记号，前面的“+”，“-”表示方向。

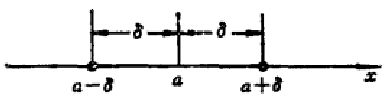
4．邻域　设$a \in \mathbf{R}$，任意$\delta>0$，数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为a的δ邻域．记为

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

a的δ邻域是一个以a为中心，长度为2δ的开区间$(a-\delta, a+\delta)$，如下图所示。



在a的邻域内去掉a，即$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$称为$a$的去心邻域。记为

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

5．$\Longrightarrow$表示“蕴涵”；“推得”或“若……，则……”。

$\Longleftrightarrow$表示“必要充分”；“当且仅当”或“等价”。

设A，B为两命题

$A \Longleftrightarrow B$表示命题A与命题B等价；若命题A成立则命题B成立，同时若命题B成立则命题A也成立。

6．$\forall$表示“任意”或“任意一个”，“所有”。

$\exists$ 表示“存在”或“能找到”.

如数集 A 有上界 $\quad\exists\, b\in\mathbf{R},\forall\, x\in A$,有 $x\leqslant b$.

7. max 表示最大(它是 maximum 的缩写).

min 表示最小(它是 minimum 的缩写).

$\min(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$表示 n 个数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 中的最小数.

$\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$表示 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的最大数.

8. $n!$ 表示“不超过 n 的所有自然数的连乘积”,读作“n 的阶乘”,即

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1,$$

$$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1.$$

我们规定 $0!=1$.

9. $C_n^m(n,m\in\mathbf{N}$,且 $m\leqslant n)$表示“从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数”,即

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!},$$

有公式 $\quad C_n^m=C_n^{n-m}\quad$ 与 $\quad C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

目　录

第一章 函数与极限

17世纪笛卡尔(Descartes)把变量引入数学,对数学产生了巨大的影响,它反映了社会的客观发展对数学这门科学的推动.在此基础上促使高等数学的一个重要部分——微积分学——的形成和进一步的发展.微积分学以极限为基本工具分析研究变量和变量间的依赖关系——函数关系,以及表示这些关系的函数的重要性质.

作为讨论微积分的准备,本章将介绍函数、极限和连续这些基本概念,并着重说明极限这个重要的工具.

第一节 函 数

我们以前所学的初等数学是研究常量的数学.它只能反映相对不变的现象,而现实世界则普遍存在着矛盾、运动和不断变化的量,初等数学无法反映变量的变化规律.高等数学就是研究变量的数学.对实际中的变量进行研究,就抽象出了函数的概念.

§1.1.1 函数概念

1. 函数定义

在某个自然现象或技术过程中,往往同时遇到两个或更多个的变量.这些变量不是孤立地在变化,而是互相联系、互相依赖且循着一定的规律变化着.下面先看几例:

例1 圆的面积S与它的半径r间的关系由公式$S=\pi r^2$确定,即$\forall\ r\in[0,+\infty)$,圆面积S相应有一个确定的数值.

例2 在初速为0的落体运动中,路程s和时间t是两个变量,当时间变化时,所经历的路程也跟着改变,它们之间有下列关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad (t\geqslant 0, g\text{是重力加速度、常量})。$$

例3 在电阻两端加直流电压V(V)，电阻中有电流 I(A) 通过．V改变时，I随之改变．若电阻$R=2(\Omega)$，求I随V变化的规律（图1.1）。

解（1）由欧姆定律，

$$I=\frac{V}{R}.$$

当$R=2(\Omega)$ 时，

$$I=\frac{V}{2}. \qquad (1)$$

（2）当电压V改变时，电流I按（1）式相应改变；并且加反向电压（即电源反接，这时V取负值）电流也反向（即I也取负值），它们的数值可按公式（1）算出，列表如下

V (V)	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
I (A)	…	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…

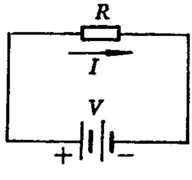


图 1.1

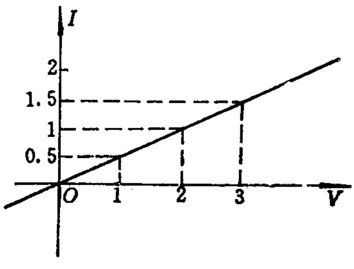


图 1.2

（3）以V为横坐标，I为纵坐标，在平面直角坐标系中描出表中各点，这些点联成一条直线．这条直线也表示I随V变化

的规律(图 1.2).

由上面三个例子,我们看到它们都表达了两个数集之间的一种对应规律,根据这一规律在一个实数集内取定一个数值时,按照对应规律,另一数集内有唯一的数与之对应.

定义 设有非空数集X与实数集R,f是一个确定的对应规律,如果对数集X中的每一个数x,按照对应规律f,实数集$\mathbf{R}$中有唯一一个数y与之相对应,我们称f是从数集X到$\mathbf{R}$的一个函数,记为

$$f: X \longrightarrow \mathbf{R}.$$

函数f在x点的值记为$y=f(x)$. x称为自变量,y称为因变量,X 称为函数 f 的定义域.

当 x 取遍 X 中一切数时,与它对应的 y 组成数集,记为

$$f(X)=\{y \mid y=f(x), x \in X\},$$

称为函数的值域,显然 $f(X) \subseteq \mathbf{R}$.

几点说明:

(1)为了使用方便,我们将符号"$f: X \longrightarrow \mathbf{R}$"记为"$y=f(x)$",或说"$f(x)$是 x 的函数(值)".

(2)符号$y=f(x)$表示两个数集间的一种对应关系,因此也可以用$y=\varnothing(x)$,$y=F(x)$等表示,但一个函数在讨论中应取定一种记法;同一问题中涉及多个函数时,则应取不同的符号分别表示它们各自的对应规律,以避免混淆.

(3)用$y=f(x)$表示一个函数时,f所代表的对应规律已完全确定,对应于 $x=x_0$ 的函数值记为 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$.

例如,设$y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$,它在$x=0$,$x=-1$的函数值为

$$y|_{x=0}=f(0)=\sqrt{4-0^2}=2,$$

$$y|_{x=-1}=f(-1)=\sqrt{4-(-1)^2}=\sqrt{3}.$$

下面给出一些函数的例子.

例4 前面提到的圆面积S是其半径r的函数,故可记为