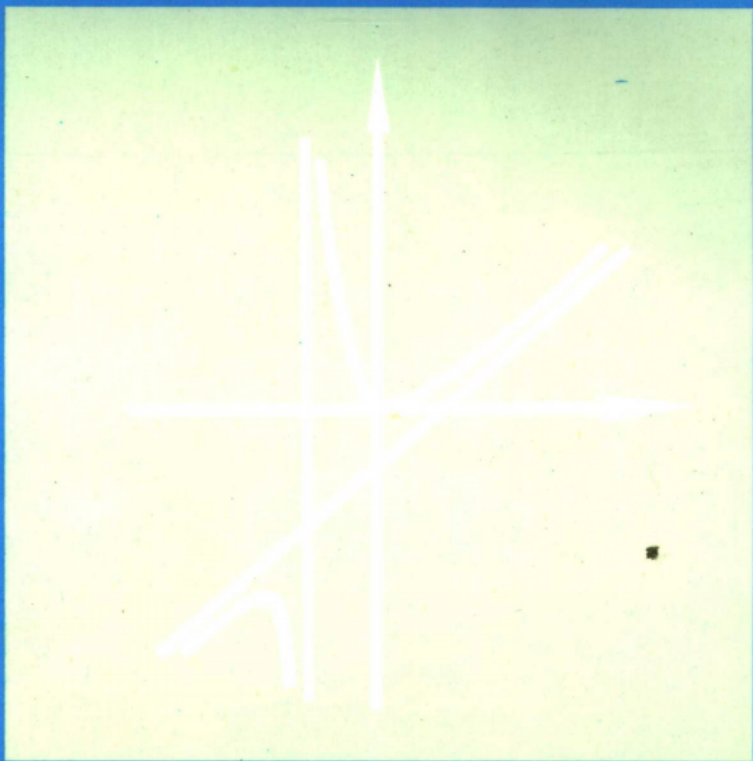


高等学校教材

高等数学

- (物理类专业用)
- (第三版)
- 第一册
- 四川大学数学系高等数学教研室 编



高等教育出版社

本书第二版在 1991 年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获国家教委二等奖

ISBN 7-04-005141-9



9 787040 051414 >

定价 12.70 元



高等学校教材

高等数学

(物理类专业用)

(第三版)

第一册

四川大学数学系高等数学教研室 编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书是四川大学数学系高等数学教研室编《高等数学》第一册的第三版。本版保持了第二版说理浅显、叙述详细、便于教学的特点。主要内容为函数和极限、微分学、不定积分、微分方程初步、定积分等。

本书由周城壁同志编写，贾瑞霞同志选配习题及答案。本书可供综合大学和师范学院物理类专业作为教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/四川大学数学系高等数学教研室编. —3版. 第一册
北京:高等教育出版社,1995(2001重印)
高等学校教材·物理类专业用
ISBN 7-04-005141-9

I. 高… I. 四… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O
13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 00624 号

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街55号 邮政编码 100009

电 话 010—64054588 传 真 010—64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 河北省香河县印刷厂 版 次 1978年3月第1版

开 本 850×1168 1/32 1995年3月第3版

印 张 13.125 印 次 2001年1月第8次印刷

字 数 340 000 定 价 12.70元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第三版序言

为使本书符合国家教育委员会高等教育司1989年印发的《综合大学本科物理类专业高等数学课程教学基本要求》，并进一步提高本书质量，现对第一册、第二册的第二版进行修订，本版仍保持原书通俗易懂、便于自学的特点，主要改动有：按基本要求对个别内容作了增删（如增加了实数的基本理论和闭区间上连续函数的性质的证明）；改正了第二版的错漏；对习题作了少量补充；引入了少量数学符号。与此同时，对本书的一些定义和定理的叙述，定理的证明作了相应的改动。

高等数学教材建设组对这次修订给予很大的帮助，专门召开了修订本书的研讨会。高等数学教材建设组组长曹之江教授亲自主持研讨会，参加会议的中山大学范达教授，北京师范大学王家鸾教授、李天林教授，广西大学曾纪雄教授，以及武汉大学侯友良老师，贵州师范大学的几位老师对第二版提出了全面、系统的批评意见和修改建议。复旦大学秦曾复教授认真细致地审阅了修改稿，提了许多宝贵的意见，对提高本书的质量，起了很大的作用。在此谨向他们表示衷心的感谢。

本书责任编辑高等教育出版社的杨芝馨同志，为本书第二、三版作了许多深入细致的工作，为提高本书质量付出了艰辛劳动。在此向她表示衷心感谢。

虽然本书已是第三版，但限于我们的水平，错误和不妥之处仍在所难免，请广大读者给予批评指正。

编者

1994年4月于四川大学

1

第二版序言

本套书(共四册)自1978年2月起陆续出版以来,收到许多读者的来信,对本书的内容安排,习题配备等方面提出了很多宝贵意见,有的读者还为书中出现的错误编制了勘误表,这对我们的修改工作起了很大的作用。借此再版之机,向关心和支持我们工作的广大读者,表示衷心的感谢。

本套书是根据原教育部制定的“高等数学教学大纲”(由北京大学拟订供物理类专业使用)修订的,我们对第一版书中未严格证明的定理补充了证明(少数证明较复杂,或涉及内容超出大纲的例外)。考虑到与高中内容的衔接,函数和极限部分的讲法尽量与中学的讲法一致,极限一节中略为补充了一些内容,习题的配备也作了一定的修改。书后备有答案。

中山大学范达副教授细致地审阅了修订稿,提了许多宝贵的意见,对提高本书的质量起了很大的作用,我们非常感谢。

由于我们水平有限,虽然这次修订我们尽了很大的努力,但错误和不妥之处仍可能出现,希望广大读者予以指正。

编者

1987年1月于四川大学

第一版序言

本书是根据1977年10月在上海召开的理科教材编写大纲讨论会所拟订的物理类高等数学和数学物理方法编写大纲写成的。

全书分四册出版。前三册为高等数学部分；第四册为数学物理方法部分。具体内容为：第一册包括函数与极限、微分学、不定积分、微分方程初步、定积分；第二册包括立体解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、场论初步、无穷级数（包括傅氏级数）、反常积分；第三册包括线性代数、微分方程、概率论初步；第四册包括复变函数、数学物理方程、特殊函数等。

由于物理类各专业所需要的数学不尽相同，本教材除共同需要的部分外，增加了一些加*号的内容，各专业可根据需要，自行选用。

本书初稿完成后承有关兄弟院校的同志进行审稿，提供了许多修改意见，特此表示衷心的感谢。

由于水平所限，又兼仓促完稿，本书在内容安排、文字修饰和习题选配等方面，还存在许多问题，希望同志们指正。

编者

1978年2月

常用符号简介

读者在中学学过的知识，本书不再重复，这里仅将后面内容中常用的符号作些复习和介绍。






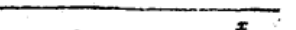
1. 本书所说的数都是实数。全体实数组成的集合称为实数集，记为 \mathbf{R} 。本书所说的数集都是实数集 \mathbf{R} 的子集。常用的子集有：

\mathbf{N} 表示自然数集， \mathbf{Z} 表示整数集， \mathbf{Q} 表示有理数集。

2. \in 表示属于； $\bar{\in}$ 表示不属于。

如 A 是集合， x 是元素， $x \in A$ 表示元素 x 属于 A 。 $x \bar{\in} A$ 表示元素 x 不属于 A 。

3. 区间 现将各种区间的符号、名称、定义列表如下
($a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$)；

定 义	名 称	符 号	图 象
$\{x a \leq x \leq b\}$	闭 区 间	$[a, b]$	
$\{x a < x < b\}$	开 区 间	(a, b)	
$\{x a < x \leq b\}$	半开区间	$(a, b]$	
$\{x a \leq x < b\}$	半开区间	$[a, b)$	
$\{x a < x\}$	无限区间	$(a, +\infty)$	
$\{x a \leq x\}$	无限区间	$[a, +\infty)$	

续表

定 义	名 称	符 号	图 象
$\{x x < a\}$	无限区间	$(-\infty, a)$	
$\{x x \leq a\}$	无限区间	$(-\infty, a]$	
$\{x x \in \mathbb{R}\}$	无限区间	$(-\infty, +\infty)$	

注意：这里“ ∞ ”并不表示数量，它只是一个记号，前面的“+”，“-”表示方向。

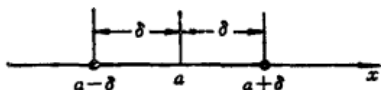
4. 邻域 设 $a \in \mathbb{R}$ ，任意 $\delta > 0$ ，数集

$$\{x||x-a| < \delta\}$$

称为 a 的 δ 邻域。记为

$$U(a, \delta) = \{x||x-a| < \delta\}.$$

a 的 δ 邻域是一个以 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ ，如下图所示。



在 a 的邻域内去掉 a ，即 $\{x|0 < |x-a| < \delta\}$ 称为 a 的去心邻域。记为

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x|0 < |x-a| < \delta\}.$$

5. \implies 表示“蕴涵”，“推得”或“若……，则……”。

\iff 表示“必要充分”，“当且仅当”或“等价”。

设 A, B 为两命题

$A \iff B$ 表示命题 A 与命题 B 等价，若命题 A 成立则命题 B 成立，同时若命题 B 成立则命题 A 也成立。

6. \forall 表示“任意”或“任意一个”，“所有”。

\exists 表示“存在”或“能找到”。

如数集 A 有上界 $\exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leq b$.

7. \max 表示最大 (它是 maximum 的缩写)。

\min 表示最小 (它是 minimum 的缩写)。

$\min(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 表示 n 个数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 中的最小数。

$\max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 表示 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 中的最大数。

8. $n!$ 表示“不超过 n 的所有自然数的连乘积”，读作“ n 的阶乘”，即

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

我们规定 $0! = 1$ 。

9. C_n^m ($n, m \in \mathbf{N}$, 且 $m \leq n$) 表示“从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数”，即

$$C_n^m = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

有公式 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 与 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ 。

目 录

常用符号简介	1
第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
§ 1.1.1 函数概念	1
§ 1.1.2 函数的几种特性	6
§ 1.1.3 复合函数和反函数	10
§ 1.1.4 初等函数	14
习题 1.1	21
第二节 极限	23
§ 1.2.1 数列的极限	24
§ 1.2.2 函数的极限	47
§ 1.2.3 函数极限的性质和运算	55
* § 1.2.4 函数极限与数列极限的关系	60
§ 1.2.5 函数极限存在判别准则	62
§ 1.2.6 无穷小量和无穷大量	67
§ 1.2.7 无穷小量的性质	71
§ 1.2.8 无穷小量的比较	72
习题 1.2	74
第三节 连续函数	79
§ 1.3.1 函数连续的概念	79
§ 1.3.2 函数的间断点	82
* § 1.3.3 在闭区间上连续函数的性质	85
§ 1.3.4 初等函数的连续性	92
§ 1.3.5 双曲函数	97
习题 1.3	99
第二章 微分学	102

第一节 导数及其运算	102
§ 2.1.1 导数的概念	102
§ 2.1.2 导数的基本公式与运算法则	108
§ 2.1.3 复合函数的导数	113
§ 2.1.4 反函数和隐函数的导数	117
§ 2.1.5 高阶导数	123
§ 2.1.6 由参数方程和极坐标方程所确定的函数的导数	125
§ 2.1.7 函数不可导情形	128
习题 2.1	130
第二节 微分	135
§ 2.2.1 微分概念	135
§ 2.2.2 微分公式和运算法则	139
§ 2.2.3 高阶微分	142
§ 2.2.4 微分在近似计算中的应用举例 误差估计	142
习题 2.2	145
第三节 中值定理 导数的应用	146
§ 2.3.1 中值定理(有限改变量定理)	147
§ 2.3.2 洛必达(L'Hospital)法则	152
§ 2.3.3 泰勒(Taylor)公式	157
§ 2.3.4 导数的应用	163
习题 2.3	198
第三章 不定积分	203
第一节 不定积分的概念与运算法则	203
§ 3.1.1 不定积分的概念	203
§ 3.1.2 基本积分公式与不定积分的运算法则	206
习题 3.1	208
第二节 积分法	210
§ 3.2.1 换元积分法	210
§ 3.2.2 分部积分法	217
§ 3.2.3 有理函数的积分	220
§ 3.2.4 三角函数有理式的积分	228

§ 3.2.5 简单无理函数的积分	233
习题 3.2	237
第四章 微分方程初步	243
第一节 微分方程的基本概念	243
§ 4.1.1 基本概念	243
习题 4.1	246
第二节 一阶微分方程	248
§ 4.2.1 解的存在与唯一性定理	248
§ 4.2.2 可分离变量的微分方程	249
§ 4.2.3 一阶线性微分方程	256
习题 4.2	263
第三节 二阶微分方程	265
§ 4.3.1 特殊二阶微分方程	265
§ 4.3.2 二阶线性微分方程	267
§ 4.3.3 二阶常系数线性微分方程	271
习题 4.3	292
第五章 定积分	295
第一节 基本概念	295
§ 5.1.1 积分问题举例	295
§ 5.1.2 定积分的定义	300
§ 5.1.3 可积准则	302
§ 5.1.4 定积分的性质	305
§ 5.1.5 定积分与不定积分的联系	312
习题 5.1	317
第二节 定积分的计算	319
§ 5.2.1 定积分的换元积分法和分部积分法	319
§ 5.2.2 定积分的近似计算	325
习题 5.2	332
第三节 定积分的应用	333
§ 5.3.1 定积分的几何应用	335
§ 5.3.2 定积分在物理上的应用	350

习题 5.3	364
不定积分表	368
答案	376

第一章 函数与极限

17世纪笛卡尔(Descartes)把变量引入数学,对数学产生了巨大的影响,它反映了社会的客观发展对数学这门科学的推动.在此基础上促使高等数学的一个重要部分——微积分学——的形成和进一步的发展.微积分学以极限为基本工具分析研究变量和变量间的依赖关系——函数关系,以及表示这些关系的函数的重要性质.

作为讨论微积分的准备,本章将介绍函数、极限和连续这些基本概念,并着重说明极限这个重要的工具.

第一节 函 数

我们以前所学的初等数学是研究常量的数学.它只能反映相对不变的现象,而现实世界则普遍存在着矛盾、运动和不断变化的量,初等数学无法反映变量的变化规律.高等数学就是研究变量的数学.对实际中的变量进行研究,就抽象出了函数的概念.

§ 1.1.1 函数概念

1. 函数定义

在某个自然现象或技术过程中,往往同时遇到两个或更多的变量.这些变量不是孤立地在变化,而是互相联系、互相依赖且循着一定的规律变化着.下面先看几例:

例1 圆的面积 S 与它的半径 r 间的关系由公式 $S = \pi r^2$ 确定,即 $\forall r \in [0, +\infty)$,圆面积 S 相应有一个确定的数值.

例2 在初速为0的落体运动中,路程 s 和时间 t 是两个变量,当时间变化时,所经历的路程也跟着改变,它们之间有下列关系

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad (t \geq 0, g \text{ 是重力加速度、常量}).$$

例3 在电阻两端加直流电压 V (V), 电阻中有电流 I (A) 通过. V 改变时, I 随之改变. 若电阻 $R=2(\Omega)$, 求 I 随 V 变化的规律 (图1.1).

解 (1) 由欧姆定律,

$$I = \frac{V}{R}.$$

当 $R=2(\Omega)$ 时,

$$I = \frac{V}{2}. \quad (1)$$

(2) 当电压 V 改变时, 电流 I 按 (1) 式相应改变, 并且加反向电压 (即电源反接, 这时 V 取负值) 电流也反向 (即 I 也取负值), 它们的数值可按公式 (1) 算出, 列表如下

V (V)	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
I (A)	...	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	...

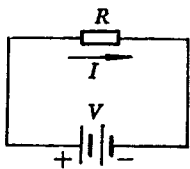


图 1.1

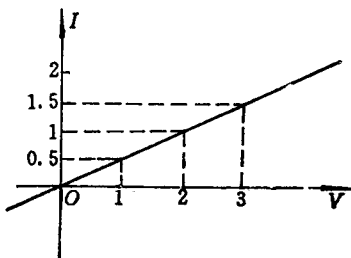


图 1.2

(3) 以 V 为横坐标, I 为纵坐标, 在平面直角坐标系中描出表中各点, 这些点联成一条直线. 这条直线也表示 I 随 V 变化

的规律(图 1.2).

由上面三个例子,我们看到它们都表达了两个数集之间的一种对应规律,根据这一规律在一个实数集内取定一个数值时,按照对应规律,另一数集内有唯一的数与之对应.

定义 设有非空数集 X 与实数集 \mathbf{R} , f 是一个确定的对应规律,如果对数集 X 中的每一个数 x ,按照对应规律 f ,实数集 \mathbf{R} 中有唯一的一个数 y 与之相对应,我们称 f 是从数集 X 到 \mathbf{R} 的一个函数,记为

$$f: X \rightarrow \mathbf{R}.$$

函数 f 在 x 点的值记为 $y=f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量, X 称为函数 f 的定义域.

当 x 取遍 X 中一切数时,与它对应的 y 组成数集,记为

$$f(X) = \{y | y = f(x), x \in X\},$$

称为函数的值域,显然 $f(X) \subseteq \mathbf{R}$.

几点说明:

(1)为了使用方便,我们将符号“ $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ ”记为“ $y=f(x)$ ”,或说“ $f(x)$ 是 x 的函数(值)”.

(2)符号 $y=f(x)$ 表示两个数集间的一种对应关系,因此也可以用 $y=\varnothing(x)$, $y=F(x)$ 等表示,但一个函数在讨论中应取定一种记法;同一问题中涉及多个函数时,则应取不同的符号分别表示它们各自的对应规律,以避免混淆.

(3)用 $y=f(x)$ 表示一个函数时, f 所代表的对应规律已完全确定,对应于 $x=x_0$ 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

例如,设 $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$,它在 $x=0$, $x=-1$ 的函数值为

$$y|_{x=0}=f(0)=\sqrt{4-0^2}=2,$$

$$y|_{x=-1}=f(-1)=\sqrt{4-(-1)^2}=\sqrt{3}.$$

下面给出一些函数的例子.

例4 前面提到的圆面积 S 是其半径 r 的函数,故可记为