



数理化自学丛书

# 三角

姚劍初 余逸时編

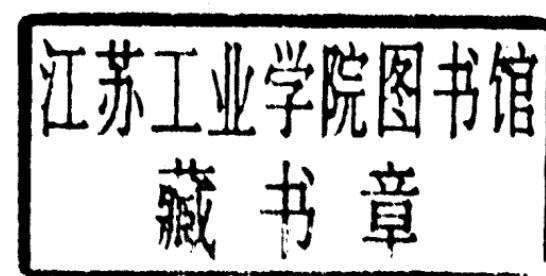


51.24  
01

数理化自学丛书

# 三 角

姚劍初 余逸时 編



上海科学技术出版社

## 內容提要

本书是数理化自学丛书中的一本，介绍中学三角課程的全部內容，只要具备平面几何和代数的初步知識即可閱讀。本书叙述淺显易懂，对关键性問題讲解得特別詳細，对于不易理解的內容适当分散，使逐步深入。书中附有大量习題可作为练习。

本书可供具有相当于初中三年級以上文化水平的青年自学之用。

数理化自学丛书

## 三 角

姚劍初 余逸时 編

---

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可證出 093 号

---

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32 印张 9 14/32 排版字数 234,000  
1963 年 10 月第 1 版 1963 年 10 月第 1 次印刷 印数 1—30,000

统一书号 T13119·532 定价(七) 0.80 元

## 出版者的話

在我們国家里，有千千万万青年人正在从事劳动和工作，他們都希望在祖国的社会主义和共产主义建設中貢献出力量，迫切要求数学文化知識以适应国家建設日益发展的需要。

这套自学丛书的出版，就是为滿足广大讀者学习数理化基础知識的需要。三門学科共出书十七册：数学有代數四册、平面几何二册，三角、立体几何、平面解析几何各一册；物理和化学各四册。具有高小毕业以上程度的讀者认真学好这套书，这三門学科的知识可基本上达到高中毕业的水平。

为照顾自学的特点，在編写中尽可能把重点、难点和关键性的內容讲深讲透；尽可能多举些例題，分析引导，使解題有所启发；尽可能把物理的化学的現象描述得詳尽些以补缺少实验的不足。总之，想尽可能减少自学中的困难。

一个人自学的时间总是比在校学习的时间长得多，要自学有成就，必須多想多練，更要持之以恒，鍥而不舍，也就是見到难处，抓住不放，不是知难而退。

学习必須从自己的实际水平出发。学一門学科要有一定的基础，选讀順序要根据前言的指导。希望循序漸进、踏踏实实地学习，一步不懂，不要跨第二步。刻苦自学，学有成就者不乏其人，愿广大讀者努力学好。

这套丛书由黃丹蘂、楊榮祥、余元希、楊逢挺、桂君協等同志負責主編。由于这是新的工作，經驗不足，难免有缺点或錯誤，希望讀者批評指教！

一九六三年七月

【出版者的話】

• I •

## 前　　言

三角学是初等数学中的一門基础課程，在以后学习高等数学和其他自然科学时，經常要用到，所以学好三角学是十分必要的。

本书內容包括中学三角課程的全部教材。但是编写体裁和学校課本不完全相同，主要表現在：第一，对于初步掌握三角学基本內容关系不大的某些概念，书中出現較迟，使概念的引进不太集中；第二，在課本中作为例題或习題，但应用比較广泛的某些內容，本书一般专列一节，以引起讀者的重視。这样处理，是为了减少讀者自学时的障碍，便于較全面地掌握三角課程的主要內容。

学习本书，除了应具有小学的算术知識外，只要再有平面几何和代数的初步知識就可以了。閱讀时要用心钻研，循序漸进。书中用小一号字体排印的某些章节，初次閱讀，如果觉得有困难，可以暂时略去。例如在代数中还没有学过对数的讀者，可以把第六章用对数解三角形留在以后閱讀。

学习任何一門数学課程，必須通过解答一定数量的习題，来深刻領会課文，培养解題的技能技巧和独立思考的能力。本书在每节，每章以及最后都附有习題，讀者应配合自学进度，依次解答书中的习題。題号前附有\*号的，是較难的題目，初学时可以暂时不做。书末附有习題答案，供讀者查对，但解題时不要先看答案。

坚持学习的讀者，讀完全书，領会了书中內容，并且演算了习題后，在掌握三角学的知識方面，可以达到中学毕业的水平。如果略去了用小号字体排印的章节，那末在学完其余部分后，也能够掌握这門課程的基本內容。

編　者

# 目 录

## 出版者的话

## 前言

## 第一章 钝角的三角函数 ..... 1

- § 1.1 钝角的三角函数的定义 ..... 1
- § 1.2 已知某钝角的一个三角函数,求作这个角 ..... 6
- § 1.3 余角的三角函数 ..... 8
- § 1.4  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  角的三角函数 ..... 10
- § 1.5 间隔为  $1^\circ$  的三角函数表 ..... 14
- § 1.6 角由  $0^\circ$  变到  $90^\circ$  时,三角函数的变化 ..... 18
- § 1.7 四位数学用表中的三角函数表 ..... 21
- § 1.8 直角三角形的解法 ..... 26
- 本章提要 ..... 33
- 复习题一 ..... 34

## 第二章 任意角的三角函数 ..... 37

- § 2.1 大于  $90^\circ$  的角和负角 ..... 37
- § 2.2 直角坐标系 ..... 40
- § 2.3 任意角的三角函数 ..... 44
- § 2.4 三角函数值的符号 ..... 47
- § 2.5 已知某角的一个三角函数的值,求作角 ..... 50
- § 2.6  $n \cdot 360^\circ + \alpha$  与任意角  $\alpha$  的三角函数间的关系 ..... 52
- § 2.7  $180^\circ - \alpha, 180^\circ + \alpha, 360^\circ - \alpha$  与锐角  $\alpha$  的三角函数间的关系 ..... 54
- § 2.8  $-\alpha$  与任意角  $\alpha$  的三角函数间的关系 ..... 59

- § 2.9 已知一个三角函数的值,求角 ..... 63
- § 2.10  $90^\circ + \alpha, 270^\circ - \alpha, 270^\circ + \alpha$  与锐角  $\alpha$  的三角函数间的关系 ..... 66
- § 2.11 誘导公式的一般性 ..... 69
- § 2.12 同角的三角函数间的关系 ..... 74
- 本章提要 ..... 81
- 复习题二 ..... 82

## 第三章 三角函数的图象和性质 ..... 85

- § 3.1 弧度制 ..... 85
- § 3.2 用线段表示三角函数 ..... 89
- § 3.3 三角函数的图象 ..... 93
- § 3.4 三角函数的定义域 ..... 101
- § 3.5 三角函数的性质 ..... 104
- § 3.6 一般正弦函数  
 $y = A \sin(nx + \alpha)$  的图象 ..... 111
- 本章提要 ..... 117
- 复习题三 ..... 118

## 第四章 加法定理和它的推论 ..... 120

- § 4.1 两角和的正弦和余弦 ..... 120
- § 4.2 两角和的正弦公式和余弦公式的一般性 ..... 123
- § 4.3 两角和的正切和余切 ..... 127
- § 4.4 两角差的三角函数 ..... 129
- § 4.5 二倍角的三角函数 ..... 132
- § 4.6 半角的三角函数 ..... 137
- § 4.7 三角函数的积化为和 ..... 142
- § 4.8 三角函数的和化为积 ..... 145

§ 4.9 化 $a \sin x + b \cos x$ 成一个角的正弦 .....	150	§ 6.10 三角形的面积 .....	204
§ 4.10 三角形內角的三角函数間的关系 .....	153	§ 6.11 三角形的外接圓的半徑 .....	207
本章提要 .....	155	§ 6.12 三角形的內切圓的半徑 .....	209
复习題四 .....	157	本章提要 .....	212
<b>第五章 斜三角形的解法.....</b>	<b>159</b>	复习題六 .....	213
§ 5.1 斜三角形解法的分类 .....	159	<b>第七章 反三角函数.....</b>	<b>215</b>
§ 5.2 正弦定理 .....	159	§ 7.1 反函数 .....	215
§ 5.3 已知两角和一边,解斜三角形 .....	163	§ 7.2 反正弦 .....	217
§ 5.4 已知两边和其中一边的对角,解斜三角形.....	165	§ 7.3 反余弦 .....	222
§ 5.5 余弦定理 .....	172	§ 7.4 反正切 .....	226
§ 5.6 已知两边和它們的夹角,用余弦定理解斜三角形 .....	175	§ 7.5 反余切 .....	230
§ 5.7 已知三边,用余弦定理解斜三角形 .....	177	§ 7.6 反三角函数的三角运算 .....	233
本章提要 .....	180	§ 7.7 反三角函数間的基本关系 .....	236
复习題五 .....	181	本章提要 .....	240
<b>第六章 利用对数解三角形.....</b>	<b>183</b>	复习題七 .....	241
§ 6.1 三角函数对数表 .....	183	<b>第八章 三角方程.....</b>	<b>243</b>
§ 6.2 利用三角函数对数表进行計算 .....	186	§ 8.1 最簡三角方程 .....	243
§ 6.3 利用对数解直角三角形 .....	188	§ 8.2 只含同角的同名三角函数的三角方程 .....	247
§ 6.4 已知两角和一边,利用对数解斜三角形 .....	190	§ 8.3 可化成含同角的同名三角函数的三角方程 .....	251
§ 6.5 已知两边和一边的对角,利用对数解斜三角形 .....	192	§ 8.4 可化成一边为零而另一边是若干个因式的积的三角方程 .....	254
§ 6.6 正切定理 .....	195	§ 8.5 形如 $a \sin x + b \cos x = c$ 的三角方程的解法 .....	257
§ 6.7 已知两边和它們的夹角,利用对数解斜三角形 .....	196	§ 8.6 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方程的解法 .....	260
§ 6.8 半角定理 .....	199	§ 8.7 三角方程的图象解法 .....	264
§ 6.9 已知三边,利用对数解斜三角形 .....	202	本章提要 .....	268
复习題八 .....	270	复习題八 .....	268
<b>总复习題.....</b>	<b>270</b>	<b>习題答案.....</b>	<b>281</b>

# 第一章 銳角的三角函数

## § 1·1 銳角的三角函数的定义

从平面几何学中，我們知道：

在直角三角形中，如果一个銳角等于 $30^\circ$ ，那末这个銳角所对的直角边等于斜边的一半。換句話說，也就是， $30^\circ$  的角所对的直角边和斜边的比等于 $\frac{1}{2}$ 。这个性质同三角形的大小是沒有关系的。

三角学首先要研究这样的問題：如果直角三角形的銳角不是 $30^\circ$ ，而是任何其他的銳角，它的对边和斜边的比是不是也有确定的值呢？

我們来看图 1·1。在这个图中，我們看到，以 A 为端点的两条射綫  $AD$  和  $AE$  組成了一个銳角。

如果从  $AD$  上任意的点  $B, B', B''$ ，…作  $AE$  的垂綫  $BC, B'C', B''C''$ ，…，那末，就得到一連串的直角三角形  $ABC, AB'C', AB''C''$ ，等等。因为这些直角三角形有一个公共角  $A$ ，所以它們是相似的。

我們知道，相似三角形对应边的比是相等的，所以在直角三角形  $ABC$  和  $AB'C'$  中，就有

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'},$$

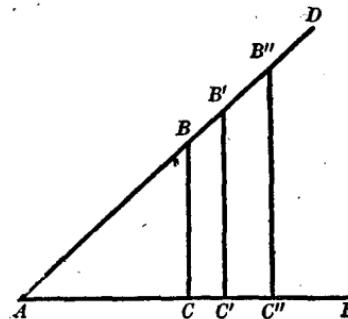


图 1·1

因而

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C''}{AB'}.$$

同样可以知道

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

因此，

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} = \dots\dots.$$

就是，在所有的直角三角形中， $\angle A$  的对边和斜边的比都是相等的。換句話說，只要  $\angle A$  的大小确定，那末，在用它做一个銳角画出的直角三角形中， $\angle A$  的对边和斜边的比就是一个确定的数。

当某一个量确定的时候，和它有关的另一个量如果有确定的值，那末，我們就把第二个量叫做第一个量的函数。

例如，当正方形的边长  $a$  有确定的值的时候，正方形的面积  $a^2$  就完全确定了。这里正方形的边长是一个量，正方形的面积是另一个量。我們說，正方形的面积是边长  $a$  的函数。

又如，假定圓的直徑用  $d$  表示，那末圓的周长就等于  $\pi d$ 。这里，圓的直徑是一个量，圓的周长是另一个量。因为当圓的直徑有确定的值的时候，圓的周长也就确定，所以我們說，圓的周长是直徑  $d$  的函数。

同样，在图 1·1 中， $\angle A$  是一个量；当这个量有确定的值的时候，在用它做銳角所画出的直角三角形中，也有一个量跟着确定了。这个量就是上面所說的对边和斜边的比。因此我們可以說，在直角三角形  $ABC$  中， $\angle A$  的对边和斜边的比  $\frac{BC}{AB}$  是  $\angle A$  的函数。

我們要注意，正方形的面积可以根据边长  $a$  計算出来；圓的周长也可以根据直徑  $d$  計算出来。所以看到算式  $a^2$ ，就知道它是  $a$  的函数；看到算式  $\pi d$ ，也就知道它是  $d$  的函数。但是  $\frac{BC}{AB}$  却不能简单地用一个算式根据  $\angle A$  的度数計算出来。为了要說明

$\frac{BC}{AB}$  是  $\angle A$  的函数，我們应用一个專門的記号“ $\sin A$ ”来表示。記号“ $\sin A$ ”讀做“ $\angle A$  的正弦”。

以后看到“ $\sin A$ ”这个記号，就应当聯想到它就表示：在以  $\angle A$  为銳角的直角三角形中， $\angle A$  的对边和斜边的比，就是

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}.$$

为了方便，我們通常用  $C$  表示直角三角形  $ABC$  的直角，并且用小写字母  $a$  表示  $\angle A$  的对边， $b$  表示  $\angle B$  的对边， $c$  表示斜边（图 1·2）。这样就有

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

一个直角三角形有三条边。任意取两条可以組成六个不同的比。它們是

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}.$$

大家很容易想到，不但  $\frac{a}{c}$  跟着  $\angle A$  的大小而确定，其他五个比一定也是跟着  $\angle A$  的大小而确定的。

第一个比  $\frac{a}{c}$  已經把它叫做  $\angle A$  的正弦了。其他五个比也都是  $\angle A$  的函数。我們都給它們規定一个名称。現在把所有六个函数的名称、定义和記号，一起列在第 4 頁的表里。

$\angle A$  的所有这些函数，总起来叫做  $\angle A$  的三角函数。

知道了銳角三角函数的定义以后，自然会引起下面的問題：已有了一个銳角，怎样算出它的三角函数值呢？我們举例說明如下：

例 1. 求  $35^\circ$  角的三角函数值。

【解】用量角器作一个  $35^\circ$  的角  $A$ （图 1·3）。过  $\angle A$  的一边上任意一点  $B$ ，例如取  $AB=10$  厘米，向另一边作垂綫  $BC$ 。尽可

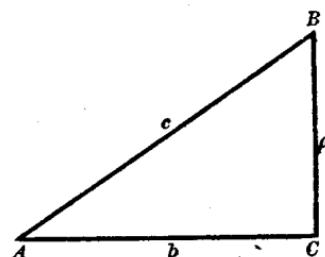


图 1·2

函数的名称	記号①	定    义
$\angle A$ 的正弦	$\sin A$	$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$
$\angle A$ 的余弦	$\cos A$	$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边} ②}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$
$\angle A$ 的正切	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{tg} A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}$
$\angle A$ 的余切	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\angle A \text{ 的对边}} = \frac{b}{a}$
$\angle A$ 的正割	$\sec A$	$\sec A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{c}{b}$
$\angle A$ 的余割	$\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{ 的对边}} = \frac{c}{a}$

能准确地量出直角三角形的其他两边的长, 得  $BC=5.7$  厘米,  $AC=8.2$  厘米. 于是, 我們就可把測量和計算的結果写成下面的形式:

$$A=35^\circ,$$

$$a=5.7, \quad b=8.2, \quad c=10.$$

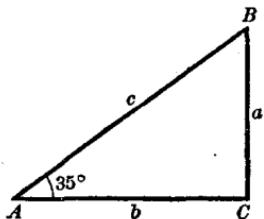


图 1·3

$$\sin 35^\circ = \frac{a}{c} = \frac{5.7}{10} = 0.57;$$

$$\cos 35^\circ = \frac{b}{c} = \frac{8.2}{10} = 0.82;$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{a}{b} = \frac{5.7}{8.2} = 0.70;$$

$$\operatorname{ctg} 35^\circ = \frac{b}{a} = \frac{8.2}{5.7} = 1.4;$$

$$\sec 35^\circ = \frac{c}{b} = \frac{10}{8.2} = 1.2;$$

① 表示  $\angle A$  的正切、余切和余割的記号, 有些書上分別寫做  $\tan A$ ,  $\cot A$ ,  $\csc A$ .

② 在直角三角形  $ABC$  里, 銳角  $A$  夾在斜邊  $c$  和直角邊  $b$  之間. 直角邊  $b$  可以簡單叫做  $\angle A$  的鄰邊.

$$\cosec 35^\circ = \frac{c}{a} = \frac{10}{5.7} = 1.7.$$

因为我們量  $a$  和  $b$  的長，都只量出两个數字，所以根据它們算出来的結果，从第一个不是零的數字起，也只有开头两个數字是可以信任的，以下就四舍五入。

在画直角三角形的时候，取  $c=10$  厘米，只是为了計算正弦和余弦的值可以方便一些。我們也可以取其他的值。

**例 2.** 在直角三角形  $ABC$  中，已知  $a=4$ ,  $b=5$ ，求  $\angle A$  的正弦，余弦，正切和余切。

**【解】** 先根据几何学里的勾股定理算出

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41},$$

然后根据三角函数的定义，求得

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{4}{41}\sqrt{41};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5}{41}\sqrt{41};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{5}{4}.$$

## 习題 1·1

1. 求  $50^\circ$  角的六个三角函数值。
2. 已知  $a=40$ ,  $c=41$ ; 求  $\angle A$  的六个三角函数值。
3. 已知  $a=5$ ,  $b=12$ ; 求  $\angle A$  的正弦，余弦，正切和余切。当  $a=10$ ,  $b=24$  时， $\angle A$  的这些三角函数值有沒有变化？为什么？
4. 已知斜边  $AB$  等于直角边  $AC$  的三倍；求  $\angle A$  的正弦，余弦，正切和余切。
5. 已知  $a=\frac{1}{2}b$ ; 求  $\angle A$  的正弦，余弦，正割和余割。
6. 已知  $a=2mn$ ,  $b=m^2-n^2$ ; 根據定义求  $\angle A$  的正弦，正切和正割及  $\angle B$  的余弦，余切和余割。比較它們的結果，你發現了什么？

\*7. 已知  $a=2\sqrt{mn}$ ,  $c=m+n$  ( $m>n>0$ ) ; 求  $\sin A$ ,  $\cos A$  和  $(\sin A)^2 + (\cos A)^2$  的值.

## § 1·2 已知某銳角的一个三角函数, 求作这个角

在上一节的例 1 中, 已知一个銳角, 我們用画图的方法求出了这个角的三角函数的近似值. 現在我們研究相反的問題: 已知某一銳角的一个三角函数, 怎样画出这个銳角? 举例說明如下:

例 1. 已知一个銳角的正弦等于  $\frac{4}{5}$ , 求作这个銳角.

【解】一个銳角的正弦, 就是在以它做一个銳角的直角三角形中, 这个角的对边和斜边的比. 現在已知它的正弦的值是  $\frac{4}{5}$ . 要画出这个銳角, 就应当画一个直角三角形, 使一条直角边和斜边的比等于  $\frac{4}{5}$ . 这样, 这条直角边的对角就是所求作的角.

因此, 我們可以任意取一个长度单位(例如1厘米), 作  $BC=4$  厘米(图 1·4). 从  $C$  作  $BC$  的垂線  $CD$ . 以  $B$  为圓心, 以5厘米为半徑, 作弧交  $CD$  于  $A$ , 并且連結  $AB$ . 这时, 直角三角形  $ABC$  中,  $\angle BAC$  就是所求作的銳角.

用量角器可以量得这个角約等于  $53^\circ$  (簡写做  $\angle A \approx 53^\circ$ ).

例 2. 已知一个銳角的余弦等于 0.79, 求作这个銳角.

【解】0.79 就是  $\frac{79}{100}$ . 为了使图形不要画得太大, 我們可以取1毫米(就是  $\frac{1}{10}$  厘米)作为长度单位.

因为銳角的余弦, 就是在直角三角形中, 这个角的邻边和斜边

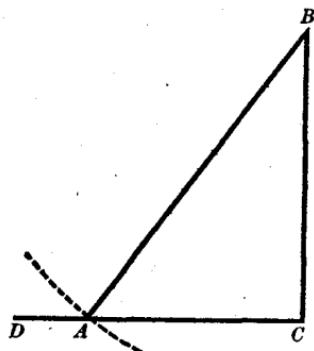


图 1·4

的比，所以我們先作  $AC=79$  毫米（图 1·5），从  $C$  作  $AC$  的垂綫  $CD$ ，然后以  $A$  为圆心，以 100 毫米为半徑作弧交  $CD$  于  $B$ ，并且連結  $AB$ .  $\angle A$  就是所求作的銳角.

用量角器可以量得  $\angle A \approx 38^\circ$ .

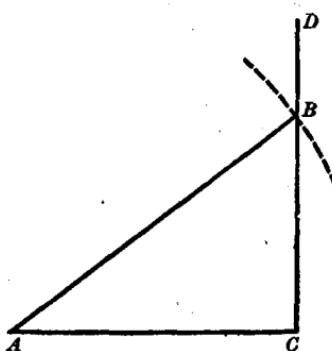


图 1·5

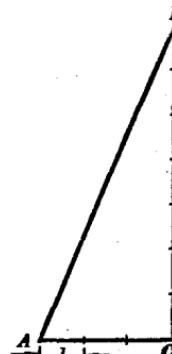


图 1·6

例 3. 已知  $\operatorname{tg} A = 2\frac{1}{3}$ ，求作銳角  $A$ .

【解】 我們把  $2\frac{1}{3}$  写成  $\frac{7}{3}$ . 取适当的长度单位  $l$  (图 1·6).

作直角  $C$ . 在它的一边上截取  $CB=7l$ ，在另一边上截取  $CA=3l$  連結  $AB$ . 那末，直角三角形  $ABC$  中的  $\angle A$  就是所求作的銳角.

例 4. 已知  $\operatorname{ctg} A = 1.4$ ，求作銳角  $A$ .

【解】 这里， $1.4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$ .

取适当的长度单位  $l$ . 我們在直角  $C$  (图 1·7) 的两边上分別取  $AC=7l$ ,  $CB=5l$ . 連結  $AB$ . 直角三角形  $ABC$  中的  $\angle A$  就是所求作的銳角.

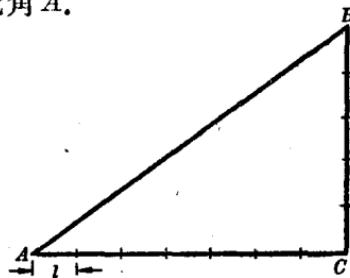


图 1·7

从上面的这些例題中，我們看到，要画出具有已知三角函数值的銳角  $A$ ，它的一般步驟是：

把已知的三角函数值表示成分数  $\frac{m}{n}$  的形式.

选取一个适当的长度单位，画直角三角形  $ABC$ ，使  $\angle C$  是直角，并且使  $\angle A$ ,  $\angle B$  和  $\angle C$  的对边  $a$ ,  $b$  和  $c$  分别适合于下面表中的条件：

已知	直角三角形的边长	
$\sin A = \frac{m}{n}$	$a = m$ ,	$c = n$
$\cos A = \frac{m}{n}$	$b = m$ ,	$c = n$
$\operatorname{tg} A = \frac{m}{n}$	$a = m$ ,	$b = n$
$\operatorname{ctg} A = \frac{m}{n}$	$b = m$ ,	$a = n$

这样，直角三角形  $ABC$  中的角  $A$  就是所求作的锐角。

### 习题 1·2

- 已知一个锐角的正弦等于 0.5，作出这个锐角；并量量看大約等多少度？
- 已知  $\cos A = 0.7$ ，作出锐角  $A$ ；并量出它的近似值。
- 已知一个锐角的正割等于 1.5；求作这个锐角。
- 已知  $\operatorname{cosec} A = 2$ ；求作锐角  $A$ 。
- 已知  $\operatorname{tg} A = \frac{5}{4}$ ；作出锐角  $A$ ，并量出它的近似值。
- 已知  $\operatorname{ctg} A = \frac{4}{5}$ ；作出锐角  $A$ ，并和前题中所求的角作比較。

### § 1·3 余角的三角函数

在 § 1·1 中我們已經知道，每一个锐角都有六个三角函数。在图 1·8 的直角三角形  $ABC$  中，除了  $\angle A$  是锐角以外， $\angle B$  也是锐角。因此， $\angle B$  也有六个三角函数。根据 § 1·1 中讲过的三角函数的定义，可以知道  $\angle B$  的六个三角函数是

$$\sin B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c};$$

$$\cos B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\angle B \text{ 的邻边}} = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\angle B \text{ 的对边}} = \frac{a}{b};$$

$$\sec B = \frac{\text{斜边}}{\angle B \text{ 的邻边}} = \frac{c}{a};$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{\text{斜边}}{\angle B \text{ 的对边}} = \frac{c}{b}.$$

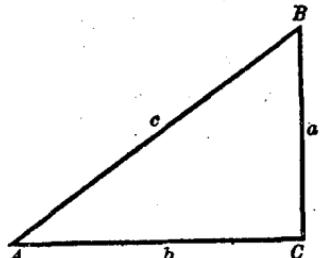


图 1·8

我們把  $\angle B$  的三角函数和  $\angle A$  的三角函数比較一下。例如，

$$\sin B = \frac{b}{c},$$

但

$$\cos A = \frac{b}{c},$$

因此，

$$\sin B = \cos A.$$

同样可以得到

$$\cos B = \sin A; \quad \operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A;$$

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} A; \quad \sec B = \operatorname{cosec} A;$$

$$\operatorname{cosec} B = \sec A.$$

直角三角形的两个銳角互为余角；也就是，它們的和等于  $90^\circ$ 。所以  $\angle B = 90^\circ - \angle A$ . 在上面的六个等式里，用  $90^\circ - \angle A$  代替  $\angle B$ ，便得到

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A;$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - A) = \operatorname{ctg} A;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - A) = \operatorname{tg} A;$$

$$\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A;$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A.$$

通常我們把正弦和余弦互相叫做余函数，就是正弦是余弦的余函数，余弦也是正弦的余函数。同样，也把正切和余切互相叫做余函数，正割和余割互相叫做余函数。这样，上面的六个公式，就可以概括成一句話：銳角  $A$  的余角的三角函数等于銳角  $A$  的余函数。

**例 1.** 已知  $\sin 35^\circ = 0.57$ ，求  $\cos 55^\circ$ 。

$$[\text{解}] \quad \cos 55^\circ = \cos(90^\circ - 35^\circ) = \sin 35^\circ = 0.57.$$

**例 2.** 設  $A, B$  和  $C$  是一个三角形的三个內角，求証

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}.$$

**【証】** 因为  $A+B+C=180^\circ$ ，所以  $A+B=180^\circ-C$ 。因此，

$$\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{180^\circ - C}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}.$$

### 习 题 1·3

1. 已知  $\operatorname{tg} 21^\circ 48' = 0.4$ ；求  $\operatorname{ctg} 68^\circ 12'$ 。
2. 已知  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ；求  $\cos 30^\circ$ ,  $\cos 45^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$  的值。
3. 将  $\cos 71^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 45^\circ 10'$ ,  $\operatorname{cosec} 89^\circ$  化成小于  $45^\circ$  的銳角的三角函数。
- \*4. 求証对于任何小于  $45^\circ$  的銳角  $x$ ，等式  $\cos(45^\circ + x) = \sin(45^\circ - x)$  都成立。

### § 1·4 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 角的三角函数

在 § 1·1 的例 1 中，我們已經看到，当已知一个銳角的度数，要找出它的三角函数时，可以用画图的方法来解决。当然，这样做，我們只能求得很粗略的近似值。

但是， $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  角的三角函数，却可以利用几何学上的简单性质，求出它們的准确值。

**1.  $30^\circ$  角的三角函数** 在平面几何中，我們知道，当直角三