数理化自学丛书

三角

姚劍初　佘逸尉編

数理化自学丛书

三　　　角

姚劍初　佘逸时　編

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是数理化自学丛书中的一本，介紹中学三角課程的全部內容，只要具备平面几何和代数的初步知識卽可閱讀．本书叙述淺显易懂，对关鍵性問題讲解得特别詳細，对于不易理解的內容适当分散，使逐步深入．书中附有大量习題可作为练习．

本书可供具有相当于初中三年級以上文化水平的青年自学之用．

数理化自学丛书

三　　角

姚劍初　佘逸时　編

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本850×1168 1/32　印張9 14/32　排版字数234,000

1963年10月第1版　1963年10月第1次印刷　印数1—30,000

統一书号 T13119·532　定价(七) 0.80元

出版者的話

在我們国家里，有千千万万青年人正在从事劳动和工作，他們都希望在祖国的社会主义和共产主义建設中貢献出力量，迫切要求学习科学文化知識以适应国家建設日益发展的需要.

这套自学丛书的出版，就是为滿足广大讀者学习数理化基础知識的需要．三門学科共出书十七册：数学有代数四册、平面几何二册，三角、立体几何、平面解析几何各一册；物理和化学各四册．具有高小毕业以上程度的讀者认真学好这套书，这三門学科的知識可基本上达到高中毕业的水平.

为照顾自学的特点，在編写中尽可能把重点、难点和关鍵性的內容讲深讲透；尽可能多举些例題，分析引导，使解題有所启发；尽可能把物理的化学的現象描述得詳尽些以补缺少实驗的不足．总之，想尽可能减少自学中的困难.

一个人自学的时間总是比在校学习的时間长得多，要自学有成就，必須多想多練，更要持之以恒，鍥而不舍，也就是見到难处，抓住不放，不是知难而退.

学习必須从自己的实际水平出发．学一門学科要有一定的基础，选讀顺序要根据前言的指导．希望循序漸进、踏踏实实地学习，一步不懂，不要跨第二步．刻苦自学，学有成就者不乏其人，愿广大讀者努力学好.

这套丛书由黄丹蘵、楊荣祥、佘元希、楊逢挺、桂君协等同志負責主編．由于这是新的工作，經驗不足，难免有缺点或錯誤，希望讀者批評指教！

一九六三年七月

前　言

三角学是初等数学中的一門基础課程，在以后学习高等数学和其他自然科学时，經常要用到，所以学好三角学是十分必要的.

本书内容包括中学三角課程的全部教材．但是編写体裁和学校課本不完全相同，主要表現在：第一，对于初步掌握三角学基本内容关系不大的某些概念，书中出現較迟，使概念的引进不太集中；第二，在課本中作为例題或习題，但应用比較广泛的某些内容，本书一般专列一节，以引起讀者的重視．这样处理，是为了减少讀者自学时的障碍，便于較全面地掌握三角課程的主要内容.

学习本书，除了应具有小学的算术知識外，只要再有平面几何和代数的初步知識就可以了．閱讀时要用心鉆研，循序漸进．书中用小一号字体排印的某些章节，初次閱讀，如果覚得有困难，可以暫时略去．例如在代数中还沒有学过对数的讀者，可以把第六章用对数解三角形留在以后閱讀.

学习任何一門数学課程，必須通过解答一定数量的习題，来深刻領会課文，培养解題的技能技巧和独立思考的能力．本书在每节，每章以及最后都附有习題，讀者应配合自学进度，依次解答书中的习題．題号前附有*号的，是較难的題目，初学时可以暫时不做．书末附有习題答案，供讀者查对，但解題时不要先看答案.

坚持学习的讀者，讀完全书，領会了书中内容，并且演算了习題后，在掌握三角学的知識方面，可以达到中学毕业的水平．如果略去了用小号字体排印的章节，那末在学完其余部分后，也能够掌握这門課程的基本内容.

編　者

目　录

第一章　銳角的三角函数

§1·1　銳角的三角函数的定义

从平面几何学中，我們知道：

在直角三角形中，如果一个銳角等于 $30°$，那末这个銳角所对的直角边等于斜边的一半．換句話說，也就是，$30°$ 的角所对的直角边和斜边的比等于 $\frac{1}{2}$．这个性质同三角形的大小是沒有关系的．

三角学首先要研究这样的問題：如果直角三角形的銳角不是 $30°$，而是任何其他的銳角，它的对边和斜边的比是不是也有确定的值呢？

我們来看图 1·1．在这个图中，我們看到，以 A 为端点的两条射綫 AD 和 AE 組成了一个銳角．如果从 AD 上任意的点 B, B', B''，…作 AE 的垂綫 $BC, B'C', B''C''$，…，那末，就得到一連串的直角三角形 ABC，$AB'C'$，$AB''C''$，等等．因为这些直角三角形有一个公共角 A，所以它們是相似的．

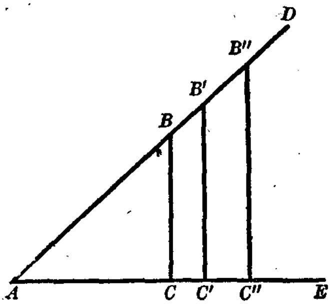

图　1·1

我們知道，相似三角形对应边的比是相等的，所以在直角三角形 ABC 和 $AB'C'$ 中，就有

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{AB'},$$

因而
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}.$$
同样可以知道
$$\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$
因此，
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots.$$
就是，在所有的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比都是相等的．换句話說，只要 $\angle A$ 的大小确定，那末，在用它做一个銳角画出的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比就是一个确定的数．

当某一个量确定的时候，和它有关的另一个量如果有确定的值，那末，我們就把第二个量叫做第一个量的**函数**．

例如，当正方形的边长 a 有确定的值的时候，正方形的面积 a^2 就完全确定了．这里正方形的边长是一个量，正方形的面积是另一个量．我們說，正方形的面积是边长 a 的函数．

又如，假定圓的直徑用 d 表示，那末圓的周长就等于 πd．这里，圓的直徑是一个量，圓的周长是另一个量．因为当圓的直徑有确定的值的时候，圓的周长也就确定，所以我們說，圓的周长是直徑 d 的函数．

同样，在图 1·1 中，$\angle A$ 是一个量；当这个量有确定的值的时候，在用它做銳角所画出的直角三角形中，也有一个量跟着确定了．这个量就是上面所說的对边和斜边的比．因此我們可以說，在直角三角形 ABC 中，$\angle A$ 的对边和斜边的比 $\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数．

我們要注意，正方形的面积可以根据边长 a 計算出来；圓的周长也可以根据直徑 d 計算出来．所以看到算式 a^2，就知道它是 a 的函数；看到算式 πd，也就知道它是 d 的函数．但是 $\frac{BC}{AB}$ 却不能簡单地用一个算式根据 $\angle A$ 的度数計算出来．为了要說明

$\frac{BC}{AB}$是$\angle A$的函数，我們应用一个专門的記号“$\sin A$”来表示。記号“$\sin A$”讀做“$\angle A$的**正弦**”。

以后看到“$\sin A$”这个記号，就应当联想到它就表示：在以$\angle A$为銳角的直角三角形中，$\angle A$的对边和斜边的比，就是

$$\sin A = \frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}.$$

为了方便，我們通常用C表示直角三角形ABC的直角，幷且用小写字母a表示$\angle A$的对边，b表示$\angle B$的对边，c表示斜边（图1·2）。这样就有

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

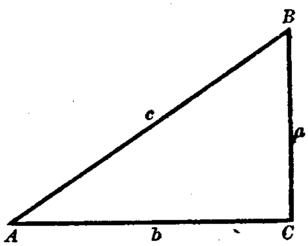

图 1·2

一个直角三角形有三条边。任意取两条可以組成六个不同的比。它們是

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}.$$

大家很容易想到，不但$\frac{a}{c}$跟着$\angle A$的大小而确定，其他五个比一定也是跟着$\angle A$的大小而确定的。

第一个比$\frac{a}{c}$已經把它叫做$\angle A$的正弦了。其他五个比也都是$\angle A$的函数。我們都給它們規定一个名称。現在把所有六个函数的名称、定义和記号，一起列在第4頁的表里。

$\angle A$的所有这些函数，总起来叫做$\angle A$的**三角函数**。

知道了銳角三角函数的定义以后，自然会引起下面的問題：已有了一个銳角，怎样算出它的三角函数值呢？我們举例說明如下：

例1. 求$35°$角的三角函数值。

【解】 用量角器作一个$35°$的角A（图1·3）。过$\angle A$的一边上任意一点B，例如取$AB=10$厘米，向另一边作垂綫BC。尽可

函 数 的 名 称	記号①	定 义
$\angle A$ 的正弦	$\sin A$	$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$
$\angle A$ 的余弦	$\cos A$	$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边②}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$
$\angle A$ 的正切	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{tg} A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{a}{b}$
$\angle A$ 的余切	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\dfrac{b}{a}$
$\angle A$ 的正割	$\sec A$	$\sec A=\dfrac{\text{斜边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{c}{b}$
$\angle A$ 的余割	$\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A=\dfrac{\text{斜边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\dfrac{c}{a}$

能准确地量出直角三角形的其他两边的长，得 $BC=5.7$ 厘米，$AC=8.2$ 厘米．于是，我們就可把测量和計算的結果写成下面的形式：

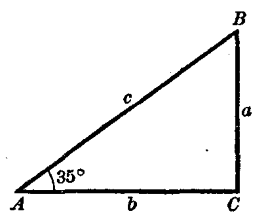

图 1·3

$$A=35^\circ,$$

$$a=5.7,\quad b=8.2,\quad c=10.$$

$$\sin 35^\circ=\frac{a}{c}=\frac{5.7}{10}=0.57;$$

$$\cos 35^\circ=\frac{b}{c}=\frac{8.2}{10}=0.82;$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ=\frac{a}{b}=\frac{5.7}{8.2}=0.70;$$

$$\operatorname{ctg} 35^\circ=\frac{b}{a}=\frac{8.2}{5.7}=1.4;$$

$$\sec 35^\circ=\frac{c}{b}=\frac{10}{8.2}=1.2;$$

---

① 表示 $\angle A$ 的正切、余切和余割的記号，有些书上分别写做 $\tan A$，$\cot A$，$\csc A$．

② 在直角三角形 ABC 里，銳角 A 夹在斜边 c 和直角边 b 之間．直角边 b 可以簡单叫做 $\angle A$ 的邻边．

$$\operatorname{cosec} 35^\circ=\frac{c}{a}=\frac{10}{5.7}=1.7.$$

因为我們量 a 和 b 的长，都只量出两个数字，所以根据它們算出来的結果，从第一个不是零的数字起，也只有开头两个数字是可以信任的，以下就四舍五入.

在画直角三角形的时候，取 $c=10$ 厘米，只是为了計算正弦和余弦的值可以方便一些. 我們也可以取其他的值.

例 2. 在直角三角形 ABC 中，已知 $a=4$, $b=5$, 求 $\angle A$ 的正弦，余弦，正切和余切.

【解】 先根据几何学里的勾股定理算出

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41},$$

然后根据三角函数的定义，求得

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{4}{\sqrt{41}}=\frac{4}{41}\sqrt{41};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{5}{41}\sqrt{41};$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\frac{5}{4}.$$

习 題 1·1

1. 求 50° 角的六个三角函数值.

2. 已知 $a=40$, $c=41$; 求 $\angle A$ 的六个三角函数值.

3. 已知 $a=5$, $b=12$; 求 $\angle A$ 的正弦，余弦，正切和余切. 当 $a=10$, $b=24$ 时，$\angle A$ 的这些三角函数值有沒有变化? 为什么?

4. 已知斜边 AB 等于直角边 AC 的三倍; 求 $\angle A$ 的正弦，余弦，正切和余切.

5. 已知 $a=\frac{1}{2}b$; 求 $\angle A$ 的正弦，余弦，正割和余割.

6. 已知 $a=2mn$, $b=m^2-n^2$; 根据定义求 $\angle A$ 的正弦，正切和正割及 $\angle B$ 的余弦，余切和余割. 比較它們的結果，你发現了什么?

*7. 已知 $a=2\sqrt{mn}$, $c=m+n\,(m>n>0)$; 求 $\sin A$, $\cos A$ 和 $(\sin A)^2+(\cos A)^2$ 的值.

§1·2 已知某銳角的一个三角函数，求作这个角

在上一节的例1中，已知一个銳角，我們用画图的方法求出了这个角的三角函数的近似值. 現在我們研究相反的問題：已知某一銳角的一个三角函数，怎样画出这个銳角？举例說明如下：

例1. 已知一个銳角的正弦等于 $\frac{4}{5}$，求作这个銳角.

【解】 一个銳角的正弦，就是在以它做一个銳角的直角三角形中，这个角的对边和斜边的比. 現在已知它的正弦的值是 $\frac{4}{5}$. 要画出这个銳角，就应当画一个直角三角形，使一条直角边和斜边的比等于 $\frac{4}{5}$. 这样，这条直角边的对角就是所求作的角.

因此，我們可以任意取一个长度单位(例如1厘米)，作 $BC=4$ 厘米(图1·4). 从 C 作 BC 的垂綫 CD. 以 B 为圓心，以5厘米为半徑，作弧交 CD 于 A，并且連結 AB. 这时，直角三角形 ABC 中，$\angle BAC$ 就是所求作的銳角.

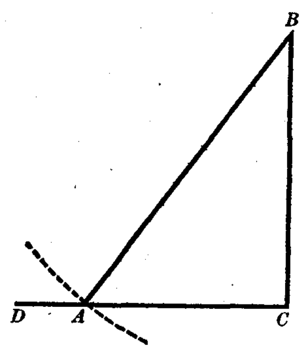

图 1·4

用量角器可以量得这个角約等于 $53°$(簡写做 $\angle A\approx 53°$).

例2. 已知一个銳角的余弦等于0.79，求作这个銳角.

【解】 0.79就是 $\frac{79}{100}$. 为了使图形不要画得太大，我們可以取1毫米(就是 $\frac{1}{10}$ 厘米)作为长度单位.

因为銳角的余弦，就是在直角三角形中，这个角的邻边和斜边

的比，所以我們先作 $AC=79$ 毫米（图 1·5），从 C 作 AC 的垂綫 CD，然后以 A 为圆心，以 100 毫米为半徑作弧交 CD 于 B，并且連結 AB. $\angle A$ 就是所求作的銳角.

用量角器可以量得 $\angle A \approx 38°$.

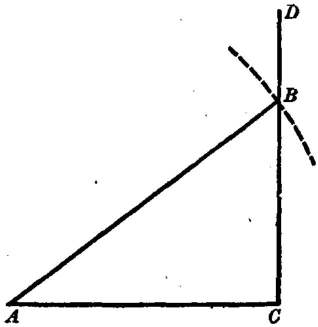

图 1·5

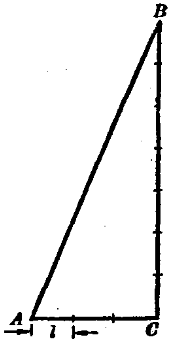

图 1·6

例 3. 已知 $\operatorname{tg} A=2\frac{1}{3}$，求作銳角 A.

【解】 我們把 $2\frac{1}{3}$ 写成 $\frac{7}{3}$. 取适当的长度单位 l（图 1·6）. 作直角 C. 在它的一边上截取 $CB=7l$，在另一边上截取 $CA=3l$ 連結 AB. 那末，直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的銳角.

例 4. 已知 $\operatorname{ctg} A=1.4$，求作銳角 A.

【解】 这里，$1.4=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$. 取适当的长度单位 l. 我們在直角 C（图 1·7）的两边上分别取 $AC=7l$, $CB=5l$. 連結 AB. 直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的銳角.

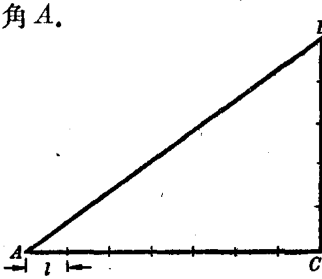

图 1·7

从上面的这些例題中，我們看到，要画出具有已知三角函数值的銳角 A，它的一般步驟是：

把已知的三角函数值表示成分数 $\frac{m}{n}$ 的形式.

选取一个适当的长度单位，画直角三角形 ABC，使 $\angle C$ 是直角，并且使 $\angle A$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 的对边 a，b 和 c 分别适合于下面表中的条件：

已　　知	直角三角形的边长
$\sin A=\frac{m}{n}$	$a=m$,　　$c=n$
$\cos A=\frac{m}{n}$	$b=m$,　　$c=n$
$\operatorname{tg} A=\frac{m}{n}$	$a=m$,　　$b=n$
$\operatorname{ctg} A=\frac{m}{n}$	$b=m$,　　$a=n$

这样，直角三角形 ABC 中的角 A 就是所求作的銳角.

习　题　1·2

1. 已知一个銳角的正弦等于 0.5，作出这个銳角；并量量看大約等于多少度？
2. 已知 $\cos A=0.7$，作出銳角 A；并量出它的近似值.
3. 已知一个銳角的正割等于 1.5；求作这个銳角.
4. 已知 $\operatorname{cosec} A=2$；求作銳角 A.
5. 已知 $\operatorname{tg} A=\frac{5}{4}$；作出銳角 A，并量出它的近似值.
6. 已知 $\operatorname{ctg} A=\frac{4}{5}$；作出銳角 A，并和前題中所求的角作比較.

§1·3　余角的三角函数

在§1·1中我們已經知道，每一个銳角都有六个三角函数. 在图1·8的直角三角形 ABC 中，除了 $\angle A$ 是銳角以外，$\angle B$ 也是銳角. 因此，$\angle B$ 也有六个三角函数. 根据§1.1中讲过的三角函数的定义，可以知道 $\angle B$ 的六个三角函数是

$$\sin B=\frac{\angle B\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c};$$

$$\cos B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tg} B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\angle B\text{ 的邻边}}=\frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\angle B\text{ 的对边}}=\frac{a}{b};$$

$$\sec B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{ 的邻边}}=\frac{c}{a};$$

$$\operatorname{cosec} B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{ 的对边}}=\frac{c}{b}.$$

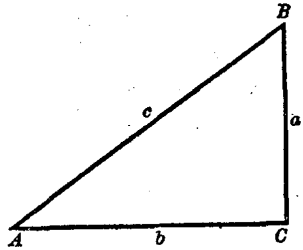

图 1·8

我們把 $\angle B$ 的三角函数和 $\angle A$ 的三角函数比較一下．例如，

$$\sin B=\frac{b}{c},$$

但

$$\cos A=\frac{b}{c},$$

因此，

$$\sin B=\cos A.$$

同样可以得到

$$\cos B=\sin A;\quad \operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} A;$$

$$\operatorname{ctg} B=\operatorname{tg} A;\quad \sec B=\operatorname{cosec} A;$$

$$\operatorname{cosec} B=\sec A.$$

直角三角形的两个銳角互为余角；也就是，它們的和等于 $90°$．所以 $\angle B=90°-\angle A$．在上面的六个等式里，用 $90°-\angle A$ 代替 $\angle B$，便得到

$$\boldsymbol{\sin(90°-A)=\cos A;}$$

$$\boldsymbol{\cos(90°-A)=\sin A;}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(90°-A)=\operatorname{ctg} A;}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}(90°-A)=\operatorname{tg} A;}$$

$$\boldsymbol{\sec(90°-A)=\operatorname{cosec} A;}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{cosec}(90°-A)=\sec A.}$$

通常我們把正弦和余弦互相叫做**余函数**，就是正弦是余弦的余函数，余弦也是正弦的余函数．同样，也把正切和余切互相叫做余函数，正割和余割互相叫做余函数．这样，上面的六个公式，就可以概括成一句話：銳角 A 的余角的三角函数等于銳角 A 的余函数．

例 1． 已知 $\sin 35°=0.57$，求 $\cos 55°$．

【解】 $\cos 55°=\cos(90°-35°)=\sin 35°=0.57$．

例 2． 設 A, B 和 C 是一个三角形的三个內角，求証

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}.$$

【証】 因为 $A+B+C=180°$，所以 $A+B=180°-C$．因此，

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{180°-C}{2}=\sin\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}.$$

习 題 1·3

1．已知 $\operatorname{tg} 21°48'=0.4$；求 $\operatorname{ctg} 68°12'$．

2．已知 $\sin 30°=\frac{1}{2}$，$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$；求 $\cos 30°$，$\cos 45°$，$\cos 60°$ 的值．

3．将 $\cos 71°$，$\operatorname{ctg} 45°10'$，$\operatorname{cosec} 89°$ 化成小于 $45°$ 的銳角的三角函数．

*4．求証对于任何小于 $45°$ 的銳角 x，等式 $\cos(45°+x)=\sin(45°-x)$ 都成立．

§1·4 30°, 45°, 60° 角的三角函数

在§1·1的例 1 中，我們已經看到，当已知一个銳角的度数，要找出它的三角函数时，可以用画图的方法来解决．当然，这样做，我們只能求得很粗略的近似值．

但是，$30°$，$45°$，$60°$ 角的三角函数，却可以利用几何学上的簡单性质，求出它們的准确值．

1．30° 角的三角函数 在平面几何中，我們知道，当直角三