高等职业教育数学系列教材

GAODENG ZHIYE JIAOYU SHUXUE XILIE JIAOCAI

主　编　田秋野　副主编　侯明华

编著者　张　洪　张峰荣　王　刚　孙文敏

高等数学

经济管理类

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等职业教育数学系列教材

高 等 数 学

（经济管理类）

主　编　田秋野
副主编　侯明华
编著者　张　洪　张峰荣　王　刚　孙文敏

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经济管理类/田秋野主编. —北京:北京大学出版社,2004. 9
(高等职业教育数学系列教材)
ISBN 7-301-07653-3

Ⅰ.高… Ⅱ.田… Ⅲ.高等数学-高等学校及技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 071444 号

书　　名:高等数学(经济管理类)
著作责任者:田秋野　主编
责 任 编 辑:瞿　定
标 准 书 号:ISBN 7-301-07653-3/O·0602
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
787mm×1092mm　16 开本　18.25 印张　449 千字
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:26.00 元

序　言

为了适应我国高等职业教育迅速发展的需要，适应高等职业教育多层次办学的需要，我们编委会应北京大学出版社之邀规划、编写了《高等职业教育系列教材》.

我国高等职业教育兴起于20世纪90年代中期，至今已得到迅速发展，受到人们的广泛关注.为了培养出具有一定科学素质和职业技能的优秀人才，无论是在专科教育还是在本科教育方面，我们都一直在进行艰辛的探索.高等职业教育的教材担负着教改的重任，在教学实践中，直接关系教学质量，在引导教学教法、理论联系实际、指导实践等方面具有重要作用，为此我们始终将教材建设作为教学工作的重要组成部分.

从高等职业教育培养技术型应用人才这一目标来看，高等职业教育的基础课教材应当体现积极的创造性思维的训练，以提高学生的科学素质和工作能力；内容不仅要体现该知识系统的精华，而且应具有系统的伸缩性和可选性，以适应不同层次教学的实际需要；教学内容与课后的训练应具有方便学生的自修性，以发挥学生作为学习主体的积极作用.专业课教材的内容应当具有工作实践的应用性，体现实际工作的规律性，理论印证性的推导内容在不影响今后实践需要的情况下，应代之以翻阅技术资料、查阅工程手册的实际应用能力的培养，只有这样，高等职业教育教材才能走出传统本科教材和专科压缩本科教材的编写模式.

教材归根结底是为学生服务的，是为学生今后从事工作打基础的，因此教材内容还需要体现该学科或该专业的科学性和先进性，以适应未来工作的实际需要；内容安排上必须循序渐进，由浅入深，把握好学生知识水平的可接受性；在陈述上必须通俗易懂，简练明了，注重化抽象为具体再由具体到抽象的过程，这样才能确保学生在学习中真正掌握知识.

编委会组织编写的教材力图体现上述编写原则，集优秀教师的教学经验认真编好每一部教材，为高等职业教育教改做出自己应有的贡献是我们的宗旨.

编委会

2004年7月于北京

目　录

第1章　函　　数

函数是数学中的一个最基本的概念，也是微积分研究的主要对象. 在经济领域中涉及的大量数量关系都可以用函数来表达. 本章将讨论函数的概念及其基本性质，着重分析初等函数的结构，同时介绍几个经济管理中常见的函数.

1.1　函　　数

一、常量与变量

在我们观察各种自然现象或生产过程时，常会遇到两种状态的量：一种量是相对不变的，即在某个过程中，只取一个固定的数值，这种量叫做**常量**；另一种量是不断变化的，即在某个过程中可取不同的数值，这种量叫做**变量**.

例如，某种商品的价格在一定时期内是相对稳定的，可以看作常量，商品的销售量和销售额是变化的，可以看作变量.

必须注意，一个量是常量还是变量，并不是绝对的，应根据具体问题、具体条件来分析. 例如，销售某种商品，商品价格是常量，但当商品滞销或商品更新换代时，商品价格也要变化，此时价格就成了变量.

在数学中，常量一般用字母 a,b,c 等表示，变量一般用 x,y,z 等表示，而用 x_0,y_0,z_0 表示变量 x,y,z 取的某个特定值. 常量与变量可以用数轴上的点表示，如常量 x_0 表示为数轴上的一个定点，变量 x 表示为数轴上的动点.

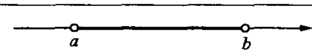
二、区间与邻域

微积分是在实数范围内研究函数的，下面介绍今后常用的几个实数集合.

1. 区间

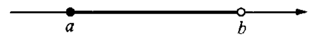
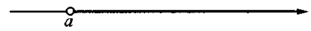
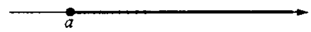
实数全体组成的集合称为实数集，记为 $\boldsymbol{R}$，区间是实数集 $\boldsymbol{R}$ 的子集. 现将各种区间的定义、名称、符号及图像列表，见表 1.1（a 与 b 是实数，且 $a<b$）.

表　1.1

定　　义	名　　称	符　　号	图　　像①
$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	

① 各种区间的图像都是在数轴上，这里的图像没有画原点.

（续表）

定　义	名　称	符　号	图　像
$\{x\|a<x\leqslant b\}$	半开区间	$(a,b]$	
$\{x\|a\leqslant x<b\}$	半开区间	$[a,b)$	
$\{x\|a<x\}$	无限区间	$(a,+\infty)$	
$\{x\|a\leqslant x\}$	无限区间	$[a,+\infty)$	
$\{x\|x<a\}$	无限区间	$(-\infty,a)$	
$\{x\|x\leqslant a\}$	无限区间	$(-\infty,a]$	

另外，区间$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\boldsymbol{R}$，即是实数集.

2. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

称为**点 a 的 δ 邻域**，点 a 叫做邻域的**中心**，δ 叫做邻域的**半径**.

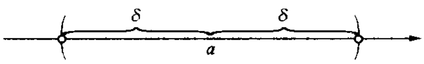


图　1-1

因为$|x-a|<\delta$ 等价于 $a-\delta<x<a+\delta$，所以点 a 的 δ 邻域就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$，这个开区间是以点 a 为中心，而长度为 2δ（如图 1-1）.

在几何上，点 a 的 δ 邻域表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体. 当 δ 越小时，点 x 越接近点 a.

例如，$|x-5|<1/2$，即表示为以点 $a=5$ 为中心，以 $1/2$ 为半径的邻域，也就是开区间$(4.5,5.5)$.

通常点 a 的 δ 邻域记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta),$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

三、函数的概念

1. 函数的定义

在自然科学和经济管理中，所遇到的问题往往是有几个变量同时在变化，它们之间并不是孤立的，而是相互联系、相互依赖，并按一定规律变化着. 变量间的这种关系就是函数关系，下面考察几个实例.

例 1　商店以每件 20 元的价格销售某种商品，销售总收入 R 元与该商品销售量 Q 件之间有下列数量关系：

$$R=20Q,$$

$$当 Q = 2 时， \quad R = 20 \times 2 = 40,$$
$$当 Q = 10 时， \quad R = 20 \times 10 = 200,$$
$$\cdots\cdots$$

可见，Q 与 R 是变量，只要 Q 取定一数值，R 就有一个确定的值与之对应，关系式 $R=20Q$ 反映了销售总收入随着销售量的变化而变化的规律.

例 2 为了进行市场预测，调查了某企业 1～6 月份某种商品的销售量分别为 100，105，110，115，111 和 120 件. 表 1.2 列出了月份 t 与销售量 Q 的数量对应关系：

表 1.2

月份(t)	1	2	3	4	5	6
销售量(Q)	100	105	110	115	111	120

这张表格确定了月份 t 与某种商品的销售量 Q 两变量之间的对应关系. 当 t 取定 1～6 整数中的任一个值时，Q 就有一个确定的数值与之对应.

例 3 设某地一天的气温 T 用自动记录仪记录，其记录曲线如图 1-2 所示. 则此图反映时刻 t 与气温 T 之间的相互依存关系，对于时刻 t_0，在图上就能找到此时刻的气温 T_0.

上面的几个例子所反映的问题虽然各不相同，但却有一个共同的特点，那就是：在每一个问题中都有两个变量，这两个变量不是孤立地变化，而是具有相互依赖的关系，即当其中一个变量在某一范围内取定一数值时，按照某种对应规则，另一个变量就有一个确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系，就是函数概念的实质. 通过以上分析，我们概括出函数的定义.

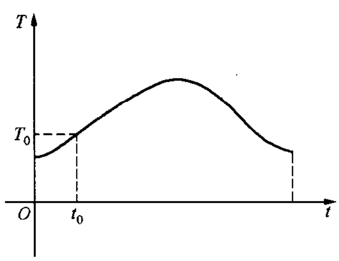


图 1-2

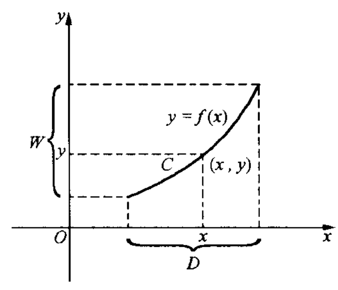


图 1-3

定义 1.1 设 D 是一非空的实数集，f 是一个对应规则，如果对于 D 内的每一个数 x 按照对应规则 f 都有唯一一个确定的实数 y 与之对应，则这个对应规则 f 称为定义在数集 D 上的一个**函数**，记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为该函数的**定义域**.

当 x 取定值 $x_0 \in D$ 时，与之对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的每个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

由函数的定义，要求对定义域中的每一个 x 值，都有唯一确定的 y 值与它相对应，这种函

数称为**单值函数**.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,对任意取定的 $x\in D$,对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样,以 x 为横坐标,y 为纵坐标就在 Oxy 平面上确定一点 (x,y). 当 x 遍取 D 上的每一个数值,就得到点 (x,y) 的一个集合 C: $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$,这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**(图1-3),图中的 W 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

关于函数概念,需要**注意**:

(1) 函数是指对应规则 f

函数的记号 $f(x)$ 是一个整体,字母"f"应理解为自变量与因变量之间的对应规则.

如 $y=f(x)=x^2+1$,表明对应规则 f 是自变量 x 对应的因变量是 x^2+1,所以

$$f(\square)=\square^2+1,\quad f(\triangle+\square)=(\triangle+\square)^2+1.$$

函数 $y=f(x)$ 中表示对应规则的记号 f 也可改用其他字母,例如"φ","F",这时函数记作 $y=\varphi(x)$, $y=F(x)$,等等.

(2) 函数的定义域

根据函数的定义,给定一个函数一定要指出函数的定义域,但是有时为了方便只给出函数的表达式 $y=f(x)$,而没有指出它的定义域时,则其定义域就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.

(3) 相同的函数

每个函数都有定义域、对应规则、值域. 而函数值是由自变量的取值与对应规则确定的,所以值域是由定义域、对应规则来确定的. 因此我们称定义域和对应规则是函数的**两个要素**,若两个函数的定义域和对应规则完全相同,称这两个函数是**相同的函数**.

例4　设 $f(x)=x^2-1$,计算 $f(0)$, $f(a^2)$, $f(t+\Delta t)$, $f[f(x)]$.

解　$f(0)=0^2-1=-1$;

$f(a^2)=(a^2)^2-1=a^4-1$;

$f(t+\Delta t)=(t+\Delta t)^2-1$;

$f[f(x)]=[f(x)]^2-1=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$.

例5　设 $f(x+1)=(x-1)x$,求 $f(x)$.

解　方法一　将右边凑成以 $x+1$ 为变量的形式,

$$f(x+1)=(x-1)x=(x+1-2)(x+1-1),$$

所以

$$f(x)=(x-2)(x-1).$$

方法二　换元法,设 $x+1=u$, $x=u-1$,

$$f(u)=(u-1-1)(u-1)=(u-2)(u-1),$$

所以

$$f(x)=(x-2)(x-1).$$

例6　求函数 $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$ 的定义域.

解　要使函数有意义,必须满足

$$\begin{cases} 9-x^2 \geqslant 0 \\ \ln(x+2) \neq 0 \\ x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ x+2 \neq 1 \\ x>-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ x \neq -1 \\ x>-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-2,-1) \cup (-1,3],$$

所求定义域是

$$(-2,-1) \cup (-1,3].$$

例 7 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是否是相同的函数？

分析 只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才认为它们是相同的函数.

解 $y=x+1$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，对应规则：$f(x)=x+1$.

$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，定义域 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，对应规则：$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1, x\neq 1$.

这两个函数的定义域不同，它们不是相同的函数.

2. 函数的表示法

表示函数的方法，常见的有公式法、表格法和图像法三种.

公式法就是用数学式子表示两变量间的函数关系的方法，是微积分中常采用的方法，如例 1.

表格法是将自变量 x 的一系列取值与对应的函数值列成表格，如例 2.

图像法就是用坐标系中的函数图像来反映函数关系的方法，如例 3.

注意：用公式法表示函数不一定只用一个数学式子表示，有时函数在其定义域的不同部分用不同的数学式子表达，这样的用两个或两个以上的数学式子表示的函数，称为**分段函数**.

例 8 旅客行李收费规定：不超过 20 kg 者，免收运费，超过 20 kg 时，每超过 1 kg 收费 2 元，试把运费 P 写成行李重量 W 的函数.

解 由题意，$P=P(W)$ 的表达式应为

$$P(W)=\begin{cases} 0, & 0 \leqslant W \leqslant 20, \\ 2(W-20), & W>20. \end{cases}$$

这就是一个分段函数.

对于分段函数强调以下两点：

(1) 分段函数是用几个式子表示一个函数，而不是几个函数；

(2) 分段函数的定义域是各式子定义域的“并”.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leqslant x<0, \\ 2, & x=0, \\ 1+x, & 0<x\leqslant 3. \end{cases}$ 试指出 $f(x)$ 的定义域，并计算 $f(-1), f(0), f(2)$. 它的图形如图 1-4 所示.

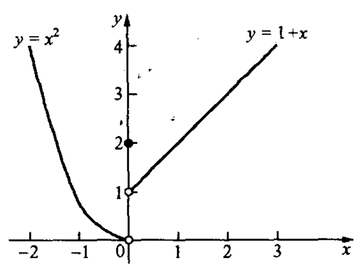


图 1-4

解 函数的定义域

$$D=[-2,0)\cup\{0\}\cup(0,3]=[-2,3].$$

因为当 $-2\leqslant x<0$ 时，$f(x)=x^2$，故 $f(-1)=(-1)^2=1$.