中等职业学校教材

数学

【下册】

赵继高　李建华　栗凤娟　编

化学工业出版社
职业教育教材出版中心

前　言

根据目前中等职业技术学校教学情况，数学课一般在 60～120 学时之间。由于课时太少，只能选学基本的、重要的、与专业有关的数学内容。考虑到以上因素，本教材共分上下两册，约需 160 学时，我们特意多编写一些内容，供不同学校、不同专业的学生选择。上册内容有：数与式的运算（复习内容，为初中数学基础薄弱学生而写），集合与不等式，函数，三角函数，约需 80 学时。下册内容有：平面解析几何，立体几何，复数，约需 80 学时。上册数与式的运算为复习内容，讲或不讲可根据学生具体情况和课时多少而定。下册三章内容，可根据专业和课时多少选讲。比如，机械类专业可讲第四章、第五章两章，电工、电子类专业可讲第四章、第六章两章。如果学校数学课时较少，可选用上册教材，如果学校数学课时较多，可选用上、下两册。

本教材编写的基本思想如下。

(1) 认真学习新的《数学课程标准》，感悟数学课程的教学目标，把握数学课程的教学重点，从中等职业技术学校的教学特点出发，同时兼顾学生基础薄弱的实际情况，合理组织教材内容。由于课时所限，平面向量、空间向量、数列、排列组合等内容不编入本教材。

(2) 更新教育理念，教材内容从以教为重点向以学为重点转变。突出学生在教学过程中的主体作用，教师教得好，不如学生学得好。培养学生的学习能力，为学生的终身学习奠定基础。

(3) 注重向学生传授数学思想，培养学生在生活中应用数学的思想意识和能力，这是数学教学的最终目的。注重对学生思维能力和创新能力的培养，编写让学生自由想象、自由创新的内容。

(4) 降低教学难度，使教材内容浅显易懂。减少理论证明，增

加直观说明，对重要定理，若证明过程学生能理解的，适当编写。例题、习题中的证明题尽量少而容易。

本教材具有如下的特点。

(1) 计算器已经是学习数学不可缺少的工具，并且职业技术学校专业课程中往往有复杂的运算，故本教材加强了计算器的运用。

(2) 增加了概念产生的原因，发展的过程等内容，减少数学教材的枯燥性。增加阅读教材，注重教材的可读性、趣味性，同时也使学生更多了解人文数学方面的知识。

(3) 例题、习题的选择尽可能贴近学生实际生活，尽量避免没实际意义的纯数学性难题。例题、习题前后呼应，练习、习题的题量适中，突出重点知识和基本内容，降低题目难度。

(4) 学过概念之后，紧跟着给出“练一练”等题目，对所学的概念及时巩固。每章后习题以试卷形式编写，便于学生自我检查，也便于教师章节测试。

本教材编写人员来自于长期从事中等职业技术学校数学教学的一线教师，这些教师不但具有丰富的教学经验，同时也十分了解中等职业技术学校学生的实际情况。编写人员力求较好把握中等职业技术学校数学教学的特点，再结合自己多年的教学心得体会，同时兼顾中等职业技术学校学生的实际情况，编写了这套教材。

本教材适合于初中毕业升入中等职业技术学校的学生使用。

本教材预备知识、第一章由王昌姣编写；第二章由唐维彦编写；第三章由李霞编写；第四章由栗凤娟编写；第五章由李建华编写；第六章由赵继高编写。

由于面对教学对象不同，教学要求不同，而且作者水平有限，书中不足之处，热诚欢迎广大读者在使用过程中对本教材提出宝贵意见，我们将表示衷心感谢！

编者

2006 年 3 月

目　　录

第四章　平面解析几何

在客观现实中，会遇到各种各样的平面图形．初中时我们曾经学习过平面几何，研究过一些简单的平面几何问题．本章将学习用坐标的方法研究平面内一些图形的问题．

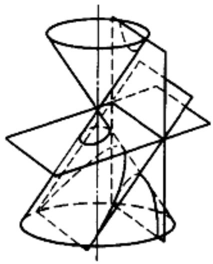

图 4-1

在初中平面几何里知道，用一个垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，得到的截面是一个圆，如果改变平面与圆锥轴线的夹角，会得到一些不同的图形，如图 4-1 所示，它们分别是椭圆、双曲线、抛物线等．通常把椭圆、双曲线、抛物线统称为圆锥曲线．

本章将分别学习直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线的方程，利用方程研究它们的性质，并利用这些性质解决一些简单的实际问题．

第一节　坐标法的简单应用

利用坐标系研究平面几何图形的方法称为坐标法．作为平面解析几何的基础，本节先让同学们了解如何利用坐标法来研究一些简单而又重要的问题，对本章学习是非常必要的．

一、数轴上有向线段的数量

我们知道，规定了方向（即规定了起点和终点）的线段称为**有向线段**．在平面直角坐标系下，如果平行于坐标轴的有向线段的方向与坐标轴的正方向一致，就规定这条有向线段的方向是正，否则是负．规定：一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，称为**有向线段的数量**．表示有向线段时，要把起点的字母写在前

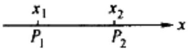

图 4-2

面，终点的字母写在后面．如图 4-2 所示，以 P_1 为起点、P_2 为终点的有向线段记为 $\overrightarrow{P_1P_2}$，它的数量记作 P_1P_2，它的长度记作 $|P_1P_2|$，显然 $|P_1P_2|=|P_2P_1|$，但 $P_1P_2=-P_2P_1$.

在图 4-2 所示的数轴上，设点 P_1 的坐标为 x_1、点 P_2 的坐标为 x_2，根据数轴上点的坐标的定义和有向线段的数量的定义可以证明这条有向线段的数量 P_1P_2 等于 x_2-x_1，即

$$\boxed{P_1P_2=x_2-x_1}$$

由此公式得数轴上两点 P_1 与 P_2 的距离

$$\boxed{|P_1P_2|=|x_2-x_1|}$$

例 1 设数轴上点 P_1 的坐标为 2、点 P_2 的坐标为 -3，求有向线段的数量 P_1P_2 和它的长度 $|P_1P_2|$.

解 所求数量为

$$P_1P_2=x_2-x_1=-3-2=-5$$

所求长度为

$$|P_1P_2|=|x_2-x_1|=|-3-2|=5$$

练一练

设数轴上点 P_1 坐标为 $-\frac{1}{2}$，P_2 的坐标为 4，求有向线段的数量 P_2P_1 和它的长度 $|P_2P_1|$.

二、两点间的距离公式

前面学习了如何根据数轴上点的坐标求两点间的距离．如果两点 P_1 和 P_2 是直角坐标平面上的两个已知点，怎样求 P_1 与 P_2 之间的距离呢？

设 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 如图 4-3 所示．过 P_1、P_2 分别作 x 轴、y 轴的平行线相交于 Q，则 Q 点的坐标为 (x_2, y_1).

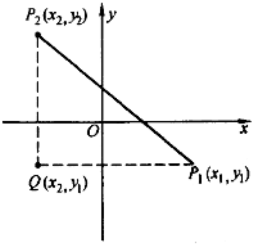

图 4-3

在直角三角形 P_1QP_2 中，$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|P_2Q|^2$. 由数轴上两点间的距离公式知

$$|P_1Q|^2=|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2$$

$$|P_2Q|^2=|y_1-y_2|^2=(y_2-y_1)^2$$

所以 $$|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

由此得 P_1 (x_1, y_1)，P_2 (x_2, y_2) **两点间的距离公式.**

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

思考：直角坐标平面上任意一点 $P(x, y)$，到原点 $O(0, 0)$ 的距离公式应为什么形式？

例 2 已知三角形三个顶点的坐标分别为 $A(-2, 4)$，$B(4, 0)$，$C(-5, 0)$，求出三角形 ABC 三边的长度.

解 由两点间距离公式得三角形三条边的长度分别为

$$|BA|=\sqrt{(-2-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{52}\approx 7.21$$

$$|CA|=\sqrt{(-2+5)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$|CB|=|4-(-5)|=9$$

练一练

求下列两点间的距离.

(1) P_1 $(3, -2)$、P_2 $(3, 1)$

(2) P_1 $(5, 0)$、P_2 $(-4, 0)$

(3) P $(-7, 4)$、O $(0, 0)$

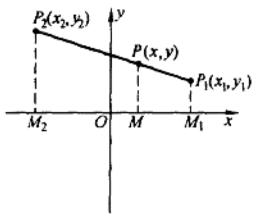

图 4-4

三、线段的定比分点

定义：如图 4-4 所示，设点 P 在有向线段 P_1P_2 上，并把 P_1P_2 分成两条有向线段 P_1P 和 PP_2，如果 P_1P 和 PP_2 的数量比恰好等于已知的比值 λ，即 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，则称点 P 是按已知的比值 λ 分割有向线段 P_1P_2 的**定比分点**.

设点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，点 $P(x, y)$ 分有向线段 P_1P_2 所成的定比 $\lambda>0$，下面研究怎样求分点 P 的坐标.

由图 4-4 所示，过 P_1、P、P_2 分别作 y 轴的平行线，交 x 轴于 M_1、M、M_2，根据平行截割定理（即平行线分线段成比例定理），得

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}$$

因为 $\qquad M_1M=x-x_1，MM_2=x_2-x$

所以 $\qquad \lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$

解得 $\qquad x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$

同理，过 P_1、P、P_2 分别作 x 轴的平行线，可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

由此可得，按已知比 λ 分有向线段 P_1P_2 的定比分点 P 的坐标公式

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}}$$

当 $\lambda=1$ 时，P 为有向线段 P_1P_2 的中点，由上述公式可得有向线段 P_1P_2 的**中点坐标公式**

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}}$$

例 3 已知两点 $P_1(4，3)$、$P_2(-1，8)$，求

(1) 将有向线段 P_1P_2 分成比为 3∶2 两段的分点 P 的坐标；

(2) 有向线段 P_1P_2 的中点 Q 的坐标.

解 (1) 由已知得 $x_1=4$，$y_1=3$，$x_2=-1$，$y_2=8$，$\lambda=\dfrac{3}{2}$.

由定比分点公式可得分点 P 的坐标为

$$x=\frac{4+\frac{3}{2}\times(-1)}{1+\frac{3}{2}}=1$$

$$y=\frac{3+\frac{3}{2}\times 8}{1+\frac{3}{2}}=6$$

所以 P 点坐标为（1，6）

（2）由中点公式得

$$x=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}，\ y=\frac{3+8}{2}=\frac{11}{2}$$

所以中点 Q 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}，\frac{11}{2}\right)$

例 4 已知线段 A_1A_2 的中点 M 的坐标为（-1，-3），A_1 的坐标为（2，4），求另一端点 A_2 的坐标.

解 设端点 A_2 的坐标为（x_2，y_2），由中点公式可得

$$-1=\frac{2+x_2}{2}，\ -3=\frac{4+y_2}{2}，$$

解得 $x_2=-4$ $y_2=-10$

所以端点 A_2 的坐标为（-4，-10）

习题 4-1

A 组

1. 已知数轴上两个点的坐标如下，分别求出有向线段的数量 P_1P_2 和长度 $|P_1P_2|$.

（1）P_1 的坐标 -1，P_2 的坐标 5；

（2）P_1 的坐标 8，P_2 的坐标 -3；

2. 求下列两点 P_1、P_2 间的距离.

（1）$P_1(0，-4)$，$P_2(0，-1)$；

（2）$P_1(6，0)$，$P_2(0，-2)$；

（3）$P_1(2，1)$，P_2（5，-1）.

3. 求连结下列两点 P_1、P_2 的有向线段的中点坐标：

（1）$P_1(-3，1)$，$P_2(7，5)$；

（2）$P_1\left(-\frac{3}{8}，\frac{1}{4}\right)$，$P_2\left(\frac{1}{2}，\frac{1}{4}\right)$.

4. 根据 P_1、P_2 的坐标及点 P 分有向线段 P_1P_2 所成的定比 λ 的值，求

分点 P 的坐标：

(1) $P_1(4, -3)$，$P_2(-2, 6)$，$\lambda=3$

(2) $P_1(-4, 1)$，$P_2(5, 4)$，$\lambda=\frac{2}{3}$

B组

1. 已知某零件的一个面上有 3 个孔，孔的中心坐标分别为 $A(-10, 30)$、$B(-2, 3)$、$C(0, -1)$，求三个孔的中心距.

2. 已知 P 在有向线段 P_1P_2 上. P 分有向线段 P_1P_2 所成的定比 $\lambda=\frac{3}{2}$，而且 $P_1(3, 2)$、$P\left(\frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right)$，求另一个点 P_2 的坐标.

第二节　直 线 方 程

一、直线方程的概念

初中时，已经学习过一次函数，其形式为 $y=kx+b$，在平面直角坐标系下可画出它的图像是一条直线. 例如函数 $y=2x+1$ 的图像是直线 l（见图 4-5），这时，满足函数式 $y=2x+1$ 的每一对 x、y 的值都是直线 l 上的点的坐标，如数对 (0, 1) 满足 $y=2x+1$，在直线 l 上就有一点 A，它的坐标是 (0, 1)；而直线 l 上每一点的坐标都满足函数式，例如直线 l 上点 P 的坐标是 (1, 3)，数对 (1, 3) 就满足函数式.

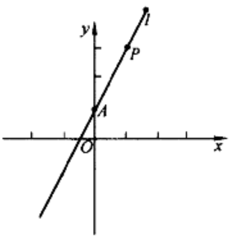

图 4-5

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线，它是以满足 $y=kx+b$ 的每一对 x、y 的值为坐标的点构成的，由于函数式 $y=kx+b$ 也可以看作二元一次方程，所以就说，这个方程的解和直线上的点也存在这样的对应关系：

以一个方程的解为坐标的点都是某条直线上的点，反过来，这条直线上点的坐标都是这个方程的解，这时，这个方程就称为这条**直线的方程**，这条直线称为这个**方程的直线**.

在平面直角坐标系中研究直线时，就是利用直线与方程的这种关系，建立直线的方程，并通过方程来研究直线的有关问题.

二、直线的倾斜角和斜率

在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线，如果把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转的最小正角记为 α，那么 α 就称为直线的**倾斜角**. 如图 4-6 中的 α 是直线 l 的倾斜角. 当直线和 x 轴平行或重合时，规定直线的倾斜角为 $0°$. 因此，倾斜角的取值范围：$0°\leqslant\alpha<180°$

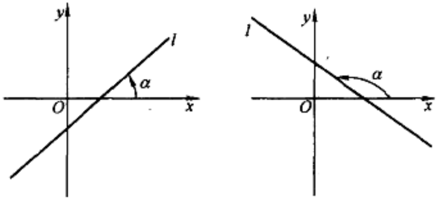

图 4-6

规定：倾斜角不是 $90°$的直线，它的倾斜角的正切值称为这条直线的**斜率**. 直线斜率常为 k 表示，即

$$\boxed{k=\tan\alpha}$$

倾斜角是 $90°$的直线没有斜率；倾斜角不是 $90°$的直线都有斜率.

例如，倾斜角为 $45°$的直线斜率为 $\tan45°$，即 $k=1$，倾斜角为 $135°$的直线斜率为 $\tan135°$，即 $\tan135°=\tan(180°-45°)=-\tan45°=-1$. 即 $k=-1$.

由正切函数的单调性可知，倾斜角不同的直线，其斜率也不同，常用斜率来表示倾斜角不等于 $90°$的直线对于 x 轴的倾斜程度.

在坐标平面内，如果已知两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，那么直线 P_1P_2 就确定了，当直线 P_1P_2 的倾斜角不等于 $90°$时，这

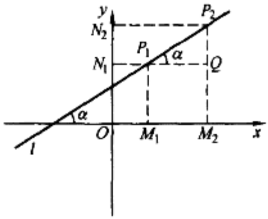

图 4-7

条直线的斜率也是确定的，怎样用两点的坐标来表示直线 P_1P_2 的斜率呢？

如图 4-7 所示，当直线 l 的倾斜角 α 为锐角时，过 P_1P_2 作 x 轴的垂线 P_1M_1，P_2M_2，并作 $P_1Q\perp P_2M_2$；再过 P_1、P_2 作 y 轴的垂线 P_1N_1、P_2N_2.

因为 $\angle QP_1P_2=\alpha$

所以 $$k=\tan\alpha=\frac{|QP_2|}{|P_1Q|}=\frac{N_1N_2}{M_1M_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

同理可以推出当直线 l 的倾斜角 α 为钝角时，可以求得同样的结果.

由此得到，经过两个已知点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 的直线的**斜率公式**

$$\boxed{k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

注意：当 $x_1=x_2$ 时，直线的倾斜角是 $90°$，直线的斜率 k 不存在，直线与 y 轴平行或重合.

例 1 求经过两点 $A(-2, 3)$ 和 $B(2, -1)$ 的直线的斜率和倾斜角.

解 把两点的坐标 $(-2, 3)$，$(2, -1)$ 代入斜率计算公式得

$$k=\frac{-1-3}{2-(-2)}=-1$$

即 $\tan\alpha=-1$

因为 $0°\leqslant\alpha<180°$

所以 $\alpha=135°$

因此，这条直线斜率为 -1，倾斜角 $135°$

例 2 已知直线 l 过点 $A(t, 2)$ 和 $B(-3, 4)$ 且斜率为 $-\frac{1}{2}$，

求 t 的值.

解 （利用斜率公式，列出关于 t 的方程，解这个方程就可以求出 t 的值）

由题设知 $-\frac{1}{2}=\frac{4-2}{-3-t}$

即 $t=1$

练一练

1. 填空：根据直线的倾斜角 α 的取值，确定斜率 k 的数值或结果.

(1) 当 $\alpha=30°$ 时，$k=$________；

(2) 当 $\alpha=0°$ 时，$k=$________；

(3) 当 $\alpha=120°$ 时，$k=$________；

(4) 当 $\alpha=150°$ 时，$k=$________；

(5) 当 $\alpha=135°$ 时，$k=$________；

(6) 当 $\alpha=90°$ 时，$k=$________.

2. 根据下列条件，求直线的倾斜角.

(1) $k=\sqrt{3}$；(2) $k=-1$；

(3) $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$；(4) 直线与 x 轴平行.

3. 求经过下列每两点的直线的斜率和倾斜角.

(1) $(0, -2)$，$(4, 2)$；(2) $(0, -4)$，$(-\sqrt{3}, -1)$

(3) $(0, 0)$，$(-1, -\sqrt{3})$；(4) $(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$，$(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$

4. 已知直线 l 经过点 $A(4, 2t-1)$，$B(-2, 6)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$，求 t 的值.

三、直线方程的形式

1. 点斜式

已知直线 l 的斜率是 k，并且经过点 $P_1(x_1, y_1)$. 求直线 l 的方程，如图 4-8 所示.

设点 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于点 P_1 的任意一点，根据经

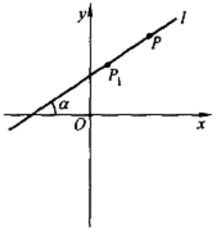

图 4-8

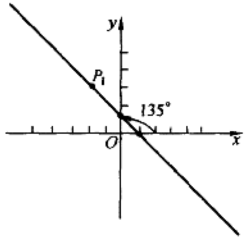

图 4-9

过两点的直线的斜率公式，得

$$k=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

可化为

$$\boxed{y-y_1=k(x-x_1)}$$

这个方程就是斜率为 k，且过点 $P(x_1, y_1)$ 的直线 l 的方程.

因为这个方程是由直线上一点和直线的斜率确定的，所以称为直线方程的**点斜式**.

思考：$\alpha=0°$时，即 $k=0$，这时直线方程是何形式？

$\alpha=90°$时，k 不存在，这时的直线方程又怎样表示？

例 3 一条直线经过点 $P_1(-2, 3)$，倾斜角为 135°，求这条直线的方程，并画出相应图形.

解 直线过点 $P_1(-2, 3)$，斜率 $k=\tan 135°=-1$.

代入点斜式，得

$$y-3=-(x+2)$$

即 $x+y-1=0$ 为所求直线方程.

如图 4-9 所示.

2. 斜截式

如图 4-10 所示，已知直线 l 的斜率为 k，与 y 轴的交点是（0，

b)，代入直线方程的点斜式，得直线 l 的方程

$$y-b=k(x-0)$$

即 $$\boxed{y=kx+b}$$

上式中称 b 为直线 l 在 y 轴上的**截距**.

这个方程由直线的斜率和它在 y 轴上截距确定的，所以称为直线方程的**斜截式**.

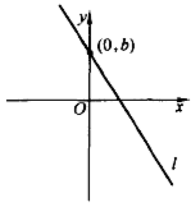

图 4-10

例 4 求与 y 轴交于 $(0,\ -3)$，且倾斜角为 150° 的直线的方程.

解 由已知得，直线在 y 轴上的截距 $b=-3$，且 $k=\tan 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，代入斜截式，得

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-3$$

即 $$\sqrt{3}x+3y+9=0$$

例 5 化直线 l 的点斜式方程 $y-2=\frac{1}{2}(x+6)$ 为斜截式方程，并指出直线的斜率和截距.

解 由 $y-2=\frac{1}{2}(x+6)$ 得

$$y=\frac{1}{2}x+5$$

所以直线方程的斜截式为

$$y=\frac{1}{2}x+5$$

斜率 $k=\frac{1}{2}$，y 轴上截距 $b=5$.

练一练

1. 填空题

(1) 过 $A(2,\ -3)$，倾角为 0° 的直线方程__________. 倾角为 90° 的直线方程__________.