教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学与应用数学专业系列教材

常微分方程

主编 潘家齐

中央广播电视大学出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
数学与应用数学专业系列教材

常微分方程

主编　潘家齐

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程/潘家齐主编．—北京：中央广播电视大学出版社，2002.7

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材．数学与应用数学专业系列教材

ISBN 7－304－02244－2

Ⅰ．常…　Ⅱ．潘…　Ⅲ．常微分方程—电视大学—教材　Ⅳ．O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 047724 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

数学与应用数学专业系列教材

常微分方程

主编　潘家齐

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京云浩印刷有限责任公司

开本/850×1168　1/32　**印张**/11.625　**字数**/280 千字

版本/2002 年 6 月第 1 版　2003 年 8 月第 2 次印刷

印数/2001～7000

社址/北京市复兴门内大街 160 号　**邮编**/100031

电话/66419791　68519502　**（本书如有缺页或倒装，本社负责退换）**

书号：ISBN 7－304－02244－2/O·116

定价：16.00 元

序　　言

21世纪，中国全面进入了一个新的发展与竞争的时代．归根结底，竞争是人才和知识的竞争．团体竞争的优胜者将是那些具有一批高水平人才的团体；个体竞争的优胜者将是那些具有现代科学知识与超群工作能力的人．在这竞争的时代，青年人渴望学习到适应工作岗位需要的知识．正是在这种环境下，中央广播电视大学与东北师范大学为满足一大批中学数学教师的要求，联合开办了（师范类）本科数学与应用数学专业．

本专业的开办，为追求知识的中学青年教师开辟了一条前进的道路，而知识的获取，要靠学习者的辛勤劳动．可以说，学习是一项艰苦的劳动．这项劳动与其他劳动的一个显著区别是：学习不能由别人代替来完成，甚至也不能合作完成．特别是数学知识的学习，必须经过学习者一番夜不能寐的（有时甚至是痛苦的）冥思苦想，才能掌握数学的本质，才能体会到数学的真谛，才能达到由此及彼、由表及里的境界．

数学是众多学科中最为抽象的学科．它高度的抽象性，决定了他广泛的应用性，同时也造成了数学学习的困难．毋庸讳言，相对其它学科来说，学习数学需要花费更多的时间与精力．但是，数学并不是高不可攀的科学．数学的学习如同攀登高楼一样，只要一步一个台阶（而不是两个台阶，三个台阶，……，更不是飞跃）地拾级而上，我们并不觉得太困难即可攀上高楼．同样，只要学习者扎扎实实地掌握这一步知识，再去学习下一步的

内容，循序渐进，数学就可以成为任你的思维纵横驰骋的自由王国.

作为教师，要充分地考虑到学生在自学过程中遇到的各种困难. 我们在教材的编写中，尽最大可能地使教材通俗易懂，深入浅出. 为了便于自学，我们适当地做出一些注释，引导学生深入理解知识. 每章开始给出本章学习目标和导学，每章的结尾，作出本章的总结，指出本章的重点及难点，并安排了学习辅导内容，介绍典型例题，同时配备了自测题目.

中央广播电视大学与东北师范大学开办本科数学与应用数学专业处于刚刚起步阶段. 我们的教师首次编写这套教材，一切尚处于探索的过程中. 因此，这套教材难免有这样或那样的不妥之处. 我们热情地欢迎读者提出宝贵的批评意见和改进的建议，使我们的教师及时改进这套教材，以不断提高学生的学习效果.

史宁中

于长春

2002年4月25日

前　言

本书是为中央广播电视大学本科开放教育试点数学与应用数学专业“常微分方程”课程编写的文字教材．教材内容的取舍主要是依据教育部师范教育司 1999 年制订的《中学教师进修高等师范本科（专科起点）教学计划》中常微分方程部分进行的．

在编写过程中，我们借鉴了普通高校本科和函授本科多年的教学实践，同时也参照了国内外流行的常微分方程教材的基本内容和写法，尽量做到既介绍经典的常微分方程基本内容，又兼顾到常微分方程的某些应用和近代理论，使学员通过本课程的学习能够了解到常微分方程最基本的概貌，有助于提高学员自身的数学修养，增强分析问题和解决问题的能力，并为后续课的学习做好必要准备．

在编写过程中，我们还充分考虑到了电大远程开放教育学员的实际情况，文字教材采用“合一式”形式编写，把教学内容和辅导内容融为一体，方便学员自学．

全书共分五章：第 1 章是初等积分法；第 2 章是基本定理；第 3，4 章中，我们把线性方程放在一阶线性方程组的框架下统一处理，既避免了理论推导过程的重复，又能使学员加深对常微分方程线性系统的整体性认识；第 5 章是常微分方程近代理论简介，有助于激发学员进一步学习的兴趣．

书中标 * 号的内容只要求学员有一般性的了解；标 * 号的习题供学员选做．书末附有练习及习题的参考答案，供学员参考．

我们要特别感谢本书的主审人丁同仁教授、高素志教授和袁荣教授，他们认真地审阅了全书，并提出了许多宝贵的修改意见. 我们还要感谢中央电大的赵坚副教授和吉林省电大的张新燕副教授参加了本书的审定工作.

本书的主要内容由潘家齐同志编写，顾静相同志参加了学习指导的编写和各章习题的选配工作. 由于我们的水平有限，本书一定会有许多缺点和错误，敬请广大读者给予批评指正.

目　　录

第1章　初等积分法

学习目标

1. 了解常微分方程与解的概念，掌握方程类型的判别.

2. 熟练掌握初等积分法中的变量可分离方程解法、常数变易法和全微分方程解法（含积分因子的解法），掌握齐次方程解法、参数法和降阶法.

3. 学会把实际问题抽象为常微分方程的基本方法.

导　学

微分方程的古典内容主要是求方程的解. 用积分的方法求常微分方程的解，叫做初等积分法，而可用积分法求解的方程叫做可积类型.

初等积分法是在微分方程发展的早期产生的一种求解方法. 虽然这种求解方法有一定局限性［早在1841年，法国数学家刘维尔（Liouville）已证明绝大多数常微分方程不能用初等积分法求解］，但是，初等积分法至今不失其重要性，一直被认为是常微分方程中非常有用的基本解题方法之一，也是初学者必须接受的基本训练之一.

在本章学习过程中，读者首先要学会准确判断方程的可积类型，然后要熟练掌握针对不同可积类型的5种解法，最后在“学习指导”的帮助下，总结一下初等积分法中各种解法的特点与内

在联系，以提高自己的解题能力与技巧.

本章共分 8 节，其中第 1 节为基本概念，第 2 ~ 7 节讨论初等积分法，第 8 节介绍一些常微分方程在实际问题中的应用.

1.1 微分方程和解

1.1.1 微分方程

什么是微分方程？它是怎样产生的？这是首先要回答的问题.

300 多年前，由牛顿（Newton，1642 ~ 1727）和莱布尼兹（Leibniz，1646 ~ 1716）所创立的微积分学，是人类科学史上划时代的重大发现，而微积分的产生和发展，又与求解微分方程问题密切相关. 这是因为，微积分产生的一个重要动因来自于人们探求物质世界运动规律的需求. 一般地，运动规律很难全靠实验观测认识清楚，因为人们不太可能观察到运动的全过程. 然而，运动物体（变量）与它的瞬时变化率（导数）之间，通常在运动过程中按照某种已知定律存在着联系，我们容易捕捉到这种联系，而这种联系，用数学语言表达出来，其结果往往形成一个微分方程. 一旦求出这个方程的解，其运动规律将一目了然. 下面的例子，将会使你看到微分方程是表达自然规律的一种最为自然的数学语言.

例 1.1.1 物体下落问题

设质量为 m 的物体，在时间 $t=0$ 时，在距地面高度为 H 处以初始速度 $v(0)=v_0$ 垂直地面下落，求此物体下落时距离与时间的关系.

解 如图 1 - 1 建立坐标系，设 $x=x(t)$ 为 t 时刻物体的位置坐标. 于是物体下落的速度为

$$v = \frac{dx}{dt}$$

加速度为

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

质量为 m 的物体，在下落的任一时刻所受到的外力有重力 mg 和空气阻力，当速度不太大时，空气阻力可取为与速度成正比．于是根据牛顿第二定律

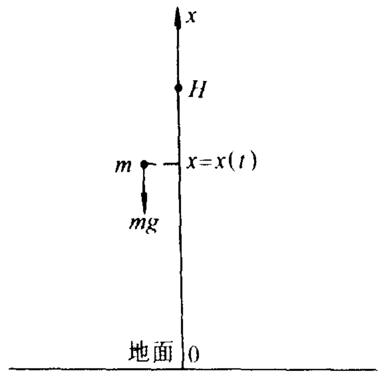

图 1－1

$$F = ma$$
$$(力 = 质量 \times 加速度)$$

可以列出方程

$$m\ddot{x} = k\dot{x} - mg \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.1}$$

其中 $k>0$ 为阻尼系数，g 是重力加速度，方程右端第二项的负号，是由于重力与 x 轴的正向相反．

(1.1) 式就是一个微分方程，这里 t 是自变量，x 是未知函数，$\dot{x}$，$\ddot{x}$ 是未知函数对 t 的导数．现在，我们还不会求解方程 (1.1)，但是，如果考虑 $k=0$ 的情形，即自由落体运动，此时方程 (1.1) 可化为

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \tag{1.2}$$

将上式对 t 积分两次得

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \tag{1.3}$$

其中 C_1 和 C_2 是两个独立的任意常数，(1.3) 是方程 (1.2) 的解．

像上述例子，在许多实际问题中不胜枚举，我们将在以后的章节中逐步加以介绍．

一般说来，**微分方程**就是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数之间的关系式．如果其中的未知函数只与一个自变量有关，则称为**常微分方程**；如果未知函数是两个或两个以上自变量的函数，并且在方程中出现偏导数，则称为**偏微分方程**．本书所介绍的都是常微分方程，有时就简称微分方程或方程．

下面的方程都是常微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=2x \tag{1.4}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.5}$$

$$\ddot{x}+x=0 \quad \left(\dot{}=\frac{d}{dt}\right) \tag{1.6}$$

$$yy''+y'^2=0 \quad \left({}'=\frac{d}{dx}\right) \tag{1.7}$$

在一个常微分方程中，未知函数最高阶导数的阶数，称为**方程的阶**．这样，一阶常微分方程的一般形式可表为

$$F(x,y,y')=0 \tag{1.8}$$

如果在（1.8）中能将 y' 解出，则得到方程

$$y'=f(x,y) \tag{1.9}$$

或

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.10}$$

（1.8）称为**一阶隐式方程**，（1.9）称为**一阶显式方程**，（1.10）称为**微分形式**的一阶方程．

n **阶隐式方程**的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.11}$$

n **阶显式方程**的一般形式为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{1.12}$$

在方程（1.11）中，如果左端函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 y'，y''，…，$y^{(n)}$ 的全体而言是一次的，则称为**线性常微分方程**，否则称它为**非线性常微分方程**．这样，一个以 y 为未知

函数，以 x 为自变量的 n 阶线性微分方程具有如下形式：

$$b_0(x)y^{(n)}+b_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}(x)y'+b_n(x)y=\varphi(x)$$

其中 $b_i(x)(i=0,1,2,\cdots,n)$ 及 $\varphi(x)$ 是在某一区间上有定义的，只与 x 有关的函数．若 $b_0(x)$ 在定义区间上恒不为零，用 $b_0(x)$ 去除上式两端，便可得到形如

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \tag{1.13}$$

的 n 阶线性微分方程，其中

$$p_k(x)=\frac{b_k(x)}{b_0(x)} \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{b_0(x)}$$

我们将在第4章详细讨论方程（1.13）．

显然，方程（1.4）是一阶线性方程；方程（1.5）是一阶非线性方程；方程（1.6）是二阶线性方程；方程（1.7）是二阶非线性方程．

对于常微分程组也有类似概念，我们将在第3章加以讨论．

1.1.2 通解与特解

微分方程的解就是满足方程的函数，可定义如下：

定义 1.1 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上连续，且有直到 n 阶的导数．如果把 $y=\varphi(x)$ 代入方程（1.11），得到在区间 I 上关于 x 的恒等式，

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称 $y=\varphi(x)$ 为方程（1.11）在区间 I 上的一个解．

这样，从定义 1.1 可以直接验证：

1．函数 $y=x^2+C$ 是方程（1.4）在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解，其中 C 是任意的常数．

2．函数 $y=\sin(\arcsin x+C)$ 是方程（1.5）在区间

$(-1, +1)$上的解，其中 C 是任意常数．又方程（1.5）有两个明显的常数解 $y=\pm 1$，这两个解不包含在上述解中．

3．函数 $x=C_1\cos t+C_2\sin t$ 是方程（1.6）在区间 $(-\infty, +\infty)$上的解，其中 C_1 和 C_2 是独立的任意常数．

4．函数 $y^2=C_1x+C_2$ 是方程（1.7）在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的解，其中 C_1 和 C_2 是独立的任意常数．

在这里，我们仅验证 3，其余的留给读者完成．事实上，在 $(-\infty, +\infty)$ 上有

$$\dot{x}=-C_1\sin t+C_2\cos t$$

$$\ddot{x}=-(C_1\cos t+C_2\sin t)$$

所以在 $(-\infty, +\infty)$ 上有

$$\ddot{x}+x\equiv 0$$

从而该函数是方程（1.6）的解．

从上面的讨论中，可以看到一个重要事实，那就是微分方程的解中可以包含任意常数，其中任意常数的个数可以多到与方程的阶数相等，也可以不含任意常数．我们把 n 阶常微分方程（1.11）的含有 n 个独立的任意常数 C_1，C_2，…，C_n 的解 $y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$称为该方程的**通解**；如果方程（1.11）的解 $y=\varphi(x)$ 不包含任意常数，则称它为**特解**．由隐式表出的通解称为**通积分**；而由隐式表出的特解称为**特积分**．

由上面的定义，不难看出，函数 $y=x^2+C$，$y=\sin(\arcsin x+C)$ 和 $x=C_1\cos t+C_2\sin t$ 分别是方程（1.4），（1.5）和（1.6）的通解，函数 $y^2=C_1x+C_2$ 是方程（1.7）的通积分，而函数 $y=\pm 1$ 是方程（1.7）的特解．通常方程的特解可对通解中的任意常数以定值确定，这种确定过程，需要下面介绍的**初始值条件**，或简称**初值条件**．

1.1.3 初值问题

例 1.1.1 中的函数（1.3）显然是方程（1.2）的通解，由于

C_1 和 C_2 是两个任意常数，这表明方程（1.2）有无数个解，而实际经验表明，一个自由落体运动仅能有一条运动轨迹. 产生这种多解性的原因是因为方程（1.2）所表达的是任何一个自由落体，在任意瞬时 t 所满足的关系式，并未考虑运动的初始状态，因此，通过积分求得的其通解（1.3）所描述的是任何一个自由落体的运动规律. 显然，在同一初始时刻，从不同的高度或以不同初速度自由下落的物体，应有不同的运动轨迹. 为了求解满足初值条件的解，我们可以把例 1.1.1 中给出的两个初始值条件，即

初始位置 $x(0)=H$ 初始速度 $\dot{x}(0)=v_0$

代入到通解中，推得

$$C_1 = v_0 \qquad C_2 = H$$

于是，得到满足上述初值条件的特解为

$$x = H - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \tag{1.14}$$

它描述了初始高度为 H，初始速度为 v_0 的自由落体运动规律.

求微分方程满足初值条件的解的问题称为**初值问题**.

于是我们称（1.14）是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -g \\ x(0) = H, \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

的解.

对于一个 n 阶方程，初值条件的一般提法是

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{1.15}$$

其中 x_0 是自变量的某个取定值，而 y_0，y_0'，…，$y_0^{(n-1)}$ 是相应的未知函数及导数的给定值. 方程（1.12）的初值问题常记为

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{1.16}$$

初值问题也常称为**柯希（Cauchy）问题**.