臺灣中華書局印行

近世數學發達概論

戴秉彝譯

戴秉衡譯

近[illegible]學發達概論

臺灣中華書局印行

中華民國五十三年十月初版

近世數學發達概論（全一冊）

基本[redacted]
（郵運匯費另加）

譯者 戴秉蓀

發行人 臺灣中華書局股份有限公司代表
姚戟楣
臺北市重慶南路一段九十四號

印刷者 臺灣中華書局印刷廠
臺北市成都路一〇六號

發行處 臺灣中華書局
臺北市重慶南路一段九十四號

（臺總）甲書

臺專（廠・蕭）

弁　言

當代數學大師魏爾(H. Weyl)先生，德人，以數學家而兼理論物理學家鳴于時，爲法國暴巴開（N. Bourbaki）學派大將之一，天才橫溢，創作鼎豐，酷愛自由。二次大戰期間，去法，講學美邦.是篇爲其對麻省高等研究院之講詞，原名"半世紀之數學"，發表於美國數學月刊58卷八月號(1951).讀之使人瞭然於近世數學發達之梗概.

近世數學之理論，以抽象點集爲根基，有所謂抽象化，公理化，多價性三大特徵；亦卽與古典數學之分野處，至於近世數學之分科，亦非若傳統就研究之對象劃爲數論，代數、解析與幾何；而乃依據結構方法分爲代數、拓樸、順序、代數拓樸及拓樸代數等部門。此處所謂之結構，指由基本抽象集建立理論體系之方法及過程而言.對數學結構之抽象研究，常使吾人摒除無味之心理障碍。俾對問題作進一層之看法，因而導出更多之新發展.此卽本書引言中所謂數學家因有新發明之結構方法而進步更遠之理.

譯文所用專門名詞，悉依照部頒科學名詞之規定，亦間有沿襲流行之述語如"拓樸學"(Topology)者，譯筆力求信達，不計工拙.　原文中有關政治語味者經略去數處.　惟譯者淺學，謬誤難免，尙祈高明正之幸甚！本書承中華書局代爲優先出版，謹此致謝！

譯者附識

目　　次

近世數學發達概論

一、引　論

除天文學外數學爲最老的科學．如果前輩不將希臘古代的概念、方法、及成果正確傳錄下來，創造而發展之，則學者便不能瞭解數學在近半世紀內的成就．數學已被稱爲無窮科學；的確，數學家創作若干有限結構，由此種結構的眞實性質以證明無窮，而解決若干問題，即可見數學家的偉大．數學有星華燦爛，銳利而冷酷無情之品質．開克嘉德曾說道："聖經裏說的絕對與人有關．"將此話對照，相反地可以說數學所談之事，全然與人無關．人的心靈知道如何掌握住他生活中心所需更好更進步的若干東西，可是就數學而言，尤其就數論而言，我們最清礎那裏面的知識最不關重要，這似乎是對造物之諷刺．就微妙與複雜而言，在任何別門科學中沒有東西能够和數學的理論；例如代數班場（Algebraic class field）遙遙相比．再就發展而言，即以物理學爲況，該門科學，在本世紀以來之發達，猶如一大溪流向單方面衝進；數學則更像尼爾河中的水，以三角形向多方面擴展．這樣說來，數學既有悠久無疆的歷史，耿介拔俗的品質，浩瀚精微的內容．今天想公開說明數學家在最

近半世紀以來曾做了些什麽，實在是一個極繁難的工作．本文將先試從某些新名詞着手以叙述發達之一般趨勢，然後再以精闢語言，解釋發明最卓越的數學概念，以及略一闡述該時期中已解決之某些更賦重要性的問題．

二十世紀的數學，有一個很明顯的方向，便是大量朝公理方面接近．公理法則，以前僅用以說明建立數學基礎之目的，今日則成爲研究數學的具體工具．就代數學而言，或者已有其最大成就．試取實數系爲例，它像簡筮士的頭面有兩個方向：一面爲代數加法與乘法的運算場；另一面爲綿續簇（Manifold），兩部份緊密接合，彼此難以嚴格分離．其一爲代數，他一則爲數的拓樸（Topology）面．現代公理，與現代政治對照，其意義很簡單，並不若和平與戰爭那樣混淆不清，它們彼此的面貌是分得很清礎的．

爲了瞭解數學的複雜情況，常把問題內主要的各方面先順其自然形勢分開而觀察之，使每面均可顧到而易檢查出觀念的以及以此種觀念所作有系統表出之事實根底，待各部份性質特殊化之後，綜合其結果，然後回頭作全面檢討，這是常常適合的．但末了的分析工作是純機械的，其技巧主要在設計方面——適當分開與一般化的解析技巧．近二十多年來，數學已沉溺於一般化和公式化之中．可是學者如果以爲一般、僅僅是爲尋求一般的關係而然，則便不瞭解此一趨向．其眞目的在求簡單，——旣然化爲已想到的假定，則凡自然的一般化便無

不簡單．說到要構造自然分開與一般化，那是不容易的，除多產好結果以決定之外再無其他標準可繩．個別研究者在程序上，顯然多少受類似之影響，及受以前研究經驗得來之主要本能認識所指導．當此一程序系統化之時，便將公理正確導出．於是我們所說的基本觀念與事實，變成廣泛之名稱，或成爲含有基本概念與事實在內的公理．從此種假設的公理推出之陳說內容，經過整理之後，不僅是抽象（例如觀念和公理），而且隨處發現基本名稱的解說將公理改成可靠的陳說．通常有主要意義差別甚遠的幾種解說發生．

公理路線（Axiomatic approach）經常揭開外貌判然的諸區域間之內部關係，且有助於使其中方法歸於統一．數學各種支派結合之趨向，乃現代發達上另一明顯的圖象，與公理化顯然反向並行而不悖．這猶如將某人從他已習慣的環境中領出來，不是因該環境適合於他，而是緣沾染了習慣與成見之故，因此將他領出來之後，然後依照他的眞稟賦，教他去參加更好的社會一樣．

我不希望强調公理法則的非常重要性，沒有新發明之結構方法，則數學家想進步亦難到達很遠．說到近世數學的發達，由於公理與結構間交互影響之關係，或者是實在的．以代數學爲例，代數已將過去用以構成一切數學運算基礎以及物理量度基礎的一般 Ω 數系予以摧毁，而創造它自己的系統，這只是本世紀的事．代數，當它重新獲得解脫之時，熟視着“數

場"的一無窮簇，——此種數場每個皆能當作運算基礎，未打算將它們納入 Ω 系內.

是故公理可能限制數之概念；結構方法則能產生適合於公理的數場. 代數便由此一方法已使它脫離前東主——解析學而獨立，且在某些支派中甚至已擔任優越角色. 數學上這一發展，與物理學從古老物理過渡到量子物理，在某一程度上是平行的，因後一發展乃每一物理結構本身系統屬於可觀或可量之故. 此種量易作代數加法與乘法運算，但因其乘法爲不可交換，故斷不能化爲常數.

一九零零年，希爾柏(David Hilbert)在巴黎國際數學會議中開列了二十三個無解的問題，被視爲科學之生命線. 氏希望此等問題在本世紀數學發達方面擔任重要角色. 氏推斷數學前途極爲光明. 我們數學家們常常檢查近半世紀以來解決了多少個希氏問題以衡量數學方面的進步. 本文本可用其表以作檢討之指導，但作者不願這樣做，因爲那將需要太多篇幅來說明；然而無論如何，這裏仍將浪費讀者的寶貴時間不少.

第 一 部

代數、數論、羣

二、環、場、理想

不以一些簡單代數觀念去說明公理路線，的確這對於我似乎不可能.它們有些與彭祖同樣老邁，還有什麽東西會比我們作計算用的自然數 1,2,3,……叙列更老呢？兩個這樣的數 a, b 可以相加相乘，($a+b$與$a\cdot b$).數的產生次一步驟，就是將此種正整數，負整數與零等相加；因此在這一關系中創出的加法運算，可以單獨作反演——減法. 人們並不就此停步，又順次將整數收入更寬的有理數範圍（分數）內.故而有乘法反演——除法；雖然，這裏有一個例外，卽以零除是.（因$b\cdot 0=0$, b 不論爲何有理數，沒有一個 b 將 0 的反演能使 $b\cdot 0=1$.）現在將'加'與'乘'運算的基本事實列成一公理表叙述於次：

第 一 表

（1） 加法的交換律與結合律：

$$a+b=b+a, \qquad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

（2） 乘法的交換律與結合律：

$$ab=ba, \qquad a(bc)=(ab)c.$$

(3) 連繫加法與乘法的分配律:

$$c\cdot(a+b)=(c\cdot a)+(c\cdot b).$$

(4) 減法公理:

(4·1) 有一原素 0 (0, '零')對於每一數 a 能有

$$a+0=0+a.$$

(4·2) 對於每一 a 有一數 $-a$ 使

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

(5) 除法公理:

(5·1) 有一原素 e(1, 單位)對於每一數 a 能有

$$a\cdot e=e\cdot a,$$

(5·2) 對於每一 $a\neq 0$ 有一 a^{-1} 使

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e.$$

利用(4·2)與(5·2)之關係,可引出 $a-b$ 之差與 b/a 之商各如 $b+(-a)$ 與 $b\cdot a^{-1}$ 然.

當希臘人發現正方形的對角線與邊之比($\sqrt{2}$)爲不可以一有理數度之之時,而數的概念因此便再度擴張了.大凡繼續不斷量度所得之量,可能僅皆爲近似值,且常有不精密之處.故有理數,即或有限小數如果被解釋爲近似值,當可做量度時計數之用,而用近似値計算法,似乎對一切量度科學爲一適當可數之工具.可是數學應當爲量度作更進一層精密的準備.例如論及電現像時,如果一個人可以觀察出電子的電荷 e 之近似値,他是極高興的,(實驗常常能決定 e 之一更精確的近似

値.)故而自柏拉圖時代迄至十九世紀之末,兩千多年以來,其間數學家們發現之數的嚴整概念——實數概念,雖其中所含之邏輯爭點,今天尙未完全澄清及確定;然而毋庸贅言,早已成爲自然科學中全部數學理論的基礎.有理數不過爲實數的一小部份,後者適合數學公理不比有理數少若干,可是實數系秉有一定完整性,則非有理數所能企及,而這是它們的"拓撲"塑像.無窮和與類似及一切綿續之說法等運用,皆立基於此,待後再作研究.

正當歐洲文藝復興時期,複數於焉被推介出來了.它們顯然屬孿生實數 x, y 的,$z=(x, y)$,對於此種孿生數的加法與乘法,以容納上述諸公理而定.取 $e=(1,0)$ 及 $i=(0,1)$——適合方程式 $i \cdot i=-e$——作單位,一般書作 $xe+yi$ 形,或簡作 $x+yi$,其中 x, y 兩數各稱爲實部與虛部.複數的用途,使每一代數方程式(具實或複係數)能於複數場中解得.複變數解析函數,爲調和論的題材,內容亦特殊豐富,乃第十九世紀中古典解析之一斑.

諸原素,其二運算 $a+b$ 與 $a \cdot b$ 適合於公理(1)至(4)者所成之集(Set)稱爲環(Rang);如果亦能容納公理(5)時則稱爲場(Field).因此,一般整數構成 I 環,有理數構成 ω 場;故而實數構成 Ω 場,複數構成 Ω^* 場.不過此種皆僅利用環或場的意義而已.大凡 h 次的多項式

(1) $$f=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_hx^h,$$

構成一 $R[x]$ 環，其中諸係數 a_i 爲一已知 R 環（卽整數 I 環或 ω 場）中所含之數，稱"多項式在 R 之上"。此多項式除其諸係數 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 的叙列外，實空無一物，故此變數（或不定數 x）被視爲一空記號，不過以慣式(1)書之以便聯想到多項式之加法及乘法規則而已。（該種規則本文將不再論及。）以 R 的或含 R 在內爲子環的 P 環中某原素（數）r 替代該變數 x，可將 $R[x]$ 的原素 f 投射到 P 的原素 α 中，$f-\alpha$：多項式 $f=f(x)$ 則變成一數 $\alpha=f(r)$。此一圖形 $f\rightarrow\alpha$ 爲同形的(Homomorphic)。卽保存加法與乘法是。的確，如果以 r 代 x 的替代法將多項式 f 運至 α 及多項式 g 運至 β，則亦將 $f+g, f\cdot g$ 各運載到 $\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta$ 中。

就所討論之環的情況而言，如果除非積中之一因子爲零環中二原素之積決不爲零，則云此環無零除數。一個場常是一個無零除數的環。由整數化分數而生之結構，可用以表具有單位而無零除數之任何 R 環，且可安置於 k 場卽商數場之內，使 k 的每一原素爲 R 的二原素 a, b 之商 a/b，其第二數（分母）不爲零。

因 $1a, 2a, 3a, \cdots\cdots$ 可以代 $a, a+a, a+a+a$ 等等，故可用自然數 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ 以作環或場屬 a 原素的倍數。假設此環含有單位 e，e 的某一倍數 ne 等於零這事可能發生；則對於該環的每一原素 a 立卽有 $na=0$。如果該環無零除數，特殊而言，如果其爲一場及 p 爲一最少自然數，對之有 $pe=0$，則 p

必爲一質數如 2, 3, 5, 7 或 11 等等. 因之由 0 的這種無 e 之倍數爲零的特徵性，便將 p 特徵質數場判明了.

於直線上作出等距離的標記以表諸整數……, -2, -1, 0, 1, 2, ……. 令 n 爲一自然數 $\geqq 2$, 並將此線捲於周長爲 n 的輪上，則任二標記 a, a' 重合，其差 $a-a'$ 可以 n 盡除. 數學家書 $a\equiv a'$ (n 模)，稱爲 a 全等於 a' 以 n 作模數. 依該全等式性質言，整數 I 環之越入 I_n 環，僅由諸 n 原素作成（輪上之標記），因之可取諸"餘數" 0, 1, ……, $n-1$. 的確，凡全等之數就加法與乘法言，其結果仍然全等；$a\equiv a'$, $b\equiv b'$ (n 模) 含 $a+b\equiv a'+b'$, $a\cdot b\equiv a'\cdot b'$ (n 模) 在內. 例如模數 12, 我們有 $7+8=3$, $5\cdot 8=4$, 因 15(-12) 的餘數爲 3 及 40 若除以 12 時則餘數爲 4. 此 I_{12} 環非無零除數，因 $3\cdot 4$ 可以 12 除之，但既非 3 亦非 4. 雖然，如果 p 爲眞質數，則 I_p 無零除數而即爲場；因爲古希臘人以巧妙的方法（輾轉除法）證明對於每一整數 a 不能以 p 盡除之時，則有一個 a' 使 $a\cdot a'\equiv 1$ (p 模). 此一歐氏定理，爲數論的全部基礎. 上之例題，表明有任一已知之 p 特徵質數場存在.

吾人於任何 R 環中可以推介一單位觀念及一質數原素如下：如果此環中有一倒數 a'，則環原素 a 爲一單位使 $a\cdot a'=e$. 如果它可分成二因子 $a_1\cdot a_2$ 卽非一單位者，則該原素 a 爲合成的. 一質數乃一既非單位亦非合數之數. I 的單位是 $+1$ 與 -1 兩數. 多項式在 k 場上構成之 $k[x]$ 環的諸單位皆爲 k(0

次多項式)的諸不爲零之原素.依希臘人發現$\sqrt{2}$的無理性而言，此多項式 x^2-2 在 $\omega[x]$ 環中爲一質數；可是，當然不在 $\Omega[x]$ 之內，因爲它在那裏可分裂成二個一次因式$(x-\sqrt{2})$，$(x+\sqrt{2})$之故. 輾轉除法對單變數 x 之多項式 $f(x)$ 在任何 k 場上亦能應用. 故於 $k[x]$ 環中賦予一質原素 $P=P(x)$ 及 $k[x]$ 的不能以 $P(x)$ 盡除之一原素 $f(x)$，則存在有另一多項式 $f'(x)$ 在 k 之上使 $\{f(x)\cdot f'(x)\}-1$ 可以 $P(x)$ 除之，故適合於輾轉除法. $k[x]$ 的任二原素 f 與 g (其差可以 P 除)之恒等，故將 $k(x)$ 環改變成場——“$k[x]$ 以 P 爲模的餘數場 k”. 例：$\omega[x]$以 x^2-2 爲模.(附記，複數可作爲 $\Omega[x]$以 x^2+1 爲模的餘數場之原素.) 奇極了，歐氏基本定理對於二變數 x, y 的多項式則不眞確. 例如 $P(x,y)=x-y$ 爲 $\omega[x,y]$ 之一質原素，及 $f(x,y)=x$ 爲一不能以 $P(x,y)$ 盡除之原素. 但全等式

$$x\cdot f'(x,y)\equiv 1 \ (x-y \text{ 模})$$

不可能成立. 的確，這將含 $-1+x\cdot f'(x,x)=0$ 在內，對一未定數 x 之多項式

$$-1+x\cdot f'(x,x)=-1+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots$$

不爲零者相矛盾. 故 $\omega[x,y]$ 環不服從流行於 I 中或 $\omega[x]$ 內的簡單定律.

試一論 $\omega[x]$ 以 x^2-2 爲模的 κ 餘數場. 由於任二多項式 $f(x)$, $f'(x)$以 x^2-2 作模爲全等之故，此 $f(\sqrt{2})$, $f'(\sqrt{2})$

二數同時發生，則 $f(x)\to f(\sqrt{2})$ 一遷移將 κ 圖寫到 $a+b\sqrt{2}$ 諸數(a,b 爲有理的)所成之 Ω 的子場 $\omega[\sqrt{2}]$ 內. 另一這樣的投影爲 $f(x)\to f(-\sqrt{2})$. 從前以爲 κ 爲一切實數或一切複數的 Ω 或 Ω^* 綿續統(Continuum)之 $\omega(\sqrt{2})$ 部；現在希望將每一事物安置於該 Ω 或 Ω^* 全部之內(解析與物理皆運算於其中). 可是本文已介紹過，κ 爲代數體，它的諸原素皆非尋常想像中的數，其結構所需，除有理數外別無其他諸數. 故對 Ω 本不相干，即對 Ω 中它的二投影亦不應混淆. 一般而言，如果 $P=P(x)$ 爲 $\omega[x]$ 中任一質原素，則可構造 $\omega[x]$ 以 P 爲模的 κ_P 餘數場. 定然，如果 δ 爲 Ω^* 中方程式 $P(x)=0$ 之實或複根，則 $f(x)\to f(\delta)$ 決定 Ω^* 內 κ_P 的同形投影，可是此投影非 κ_P 本身.

我們回頭講構造 I 環的原始整數……, $-2, -1, 0, 1, 2,$ ……. 5 的倍數，即凡可由 5 盡除之數，顯然構成一環. 這是個無一的環，不過它有另一重要特性：不僅其諸原素任二個之積居於其中，即凡一原素的整倍數皆然. 故已予一 R 環，則此 R 的理想(A)爲 R 內諸原素的集而使(1)：(A)的任二原素之和與差皆在(A)內，(2)：以 R 的任一原素倍(A)中一原素之積亦在(A)內. 所謂"理想"(Ideal)這一奇妙名詞，便由這樣的集推介出來. 凡可以 α 盡除之原素的集，可由之試描述一 α 除數. 當然，希望該集便是所界定的(A)理想. 賦予一(A)理想，則凡用 a 的倍數 $j=m\cdot a$(m 乃 R 中任一原素)作成(A)之

R 的這一眞原素 a, 可能不存在那裏，可是"R 的一原素 j 可以 α 盡除"這話有一簡單意義："j 屬於(A)的". 於是我們應該說(A)表一'理想除數' α 了. 不過就常用整數的 I 環而言，凡除數皆爲實在的.

然而這並非每環中如此. 就歐幾里得三度空間具正交坐標 x, y, z 者而言，一代數曲面由方程式 $F(x, y, z)=0$ 所定，這裏的 F 爲 ${}^3\Omega=\Omega(x, y, z)$ 即具有實係數之 x, y, z 諸變數的一多項式之一原素，F 在此曲面的一切點上皆爲零；而 F 的每一倍數 $L\cdot F$ (L 爲 ${}^3\Omega$ 的任一原素) 亦同，換言之，對於 ${}^3\Omega$ 中理想(F)之每一多項式亦眞. 二聯立多項方程式

$$F_1(x, y, z)=0, \qquad F_2(x, y, z)=0$$

通常界定一曲線，即曲面 $F_1=0$ 與曲面 $F_2=0$ 的交截線. 由 ${}^3\Omega$ 的二隨意原素 L_1, L_2 構造之二多項式$(L_1\cdot F_1)+(L_2\cdot F_2)$ 構成一理想(F_1, F_2)，凡此種多項式在該曲線上皆爲零. 該理想通常不與一眞除數 F 對應，因曲線非曲面之故. 代數簇(2, 3 或任何維數中的曲線，曲面等等) 的研究，顯然等於多項式理想之研究，像這種例子；讀者是應該折服的. 是故一係數場無須爲 Ω 或 Ω^*，可是或許爲一更普遍性之場了.

三、代數與數論上的成就

茲就一些比較不完全隱晦的事實來對本世紀中代數與數論方面的某些成就作一說明. 以瓦登(Von der Waerden)所