黄曼磊　编著

鲁棒控制理论及应用

哈爾濱工業大學出版社

鲁棒控制理论及应用

黄曼磊　编著

哈尔滨工业大学出版社

内容简介

本书系统地介绍了 H_∞ 鲁棒控制的概念、理论、设计方法以及 H_∞ 控制理论在船舶电站中的应用。内容包括：鲁棒控制理论概述，H_∞ 控制理论的数学基础，H_∞ 控制的优化设计方法，与鲁棒控制有关的 MATLAB 工具箱介绍，H_∞ 控制理论在船舶电站频率控制中的应用，H_∞ 控制理论在船舶电站电压控制中的应用，H_∞ 控制理论在船舶电站综合控制中的应用。

本书反映了作者在博士学位课题和黑龙江省自然科学基金资助项目的科学研究成果，系统性强，便于读者学习时参考。

本书可作为高等学校自动化专业、电气工程及其自动化专业高年级本科生以及控制科学与工程专业、电气工程专业研究生的选修教材，亦可供高等学校自动化及其相关专业的教师、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

鲁棒控制理论及应用/黄曼磊编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2007.1

ISBN 978-7-5603-2449-4

Ⅰ.鲁…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.鲁棒控制　Ⅳ.TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 078382 号

责任编辑　杜　燕　康云霞
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 12　字数 258 千字
版　　次　2007 年 1 月第 1 版　2007 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2449-4
印　　数　1～2 000 册
定　　价　20.00 元

前　言

H_∞控制理论自20世纪80年代发展至今,取得了丰硕的成果。H_∞控制理论是分析和设计不确定系统的一种强有力的工具,主要解决对象为建模中的误差和在一定范围内因模型摄动而引起控制品质恶化的控制难题。H_∞优化设计方法已成为反馈系统设计中一种有效的方法,其有效性之一体现在外部扰动不再假设为固定的,只要求能量有界即可;其有效性之二体现在受控对象不再假设为确定的。许多控制问题均可转化为H_∞最优控制问题,从而进一步显示了H_∞优化设计方法的适用性,使它成为一种线性多变量控制系统的新的设计方法。它的发展之迅速是令人瞩目的,有人甚至将它说成是控制理论的“一场静悄悄的革命”。

本书介绍了作者近年来在H_∞鲁棒控制理论、H_∞优化设计方法等方面的研究成果,着重讨论了在船舶电站频率控制、电压控制、综合控制的问题,分析了H_∞优化设计方法的实质,对系统设计中每一步遇到的主要问题都做了深入的研究。结果表明,H_∞控制理论是一种能够抑制干扰和保证系统鲁棒稳定性的有效设计方法,它并不像人们想象的那样难以应用。本书给出了低阶次的H_∞控制器,易于从物理上加以实现,为其实际应用奠定了坚实的基础。本书的目的在于向读者介绍H_∞鲁棒控制理论的研究成果,使读者能尽快走入该领域的前沿,为进一步从事这方面的学习和研究打下良好的基础。全书围绕H_∞鲁棒控制理论这一主线逐步展开,并贯穿始终。

全书共分7章:第1章为鲁棒控制理论概述,介绍了H_∞控制理论的发展概况;第2章为H_∞控制理论的数学基础,针对工科学生的特点,介绍学习本书必须具备的数学基础知识;第3章为H_∞控制的优化设计方法,给出了标准H_∞控制问题的形式,阐明了H_∞控制所包含的各类控制问题,讨论了状态反馈设计问题和输出反馈设计问题;第4章为MATLAB工具箱介绍,介绍了与鲁棒控制有关的控制系统工具箱和鲁棒控制工具箱;第5章为H_∞控制理论在船舶电站频率控制中的应用;第6章为H_∞控制理论在船舶电站电压控制中的应用;第7章为H_∞控制理

论在船舶电站综合控制中的应用。

作者的部分研究成果是在作者的博士导师李殿璞教授的悉心指导下取得的，导师严谨的治学态度，渊博的知识，作者将终生难忘，为此向辛勤培育自己的导师表示诚挚的感谢。

作者的研究工作得到黑龙江省自然科学基金项目(F01－24)的资助，在此向黑龙江省自然科学基金委员会表示衷心的感谢。

本书的出版得到黑龙江省博士后基金的资助，在此深表谢意。

由于作者的水平有限，书中难免会有疏漏和不足之处，敬请读者批评指正。

黄曼磊

2006年12月于哈尔滨

目　　录

第 1 章　鲁棒控制理论概述

1.1　系统不确定性和鲁棒性

经典的反馈控制系统设计需要已知被控对象的精确模型(包括模型的结构和其中所含的参数),但这在工程实际中往往是很难办到的。由于被控对象的复杂性,常常要用低阶的线性定常集中参数模型来代替实际的高阶、非线性甚至是时变和分布参数的系统,这样,势必要引入系统模型的不确定性。另外,除了数学模型不精确外,在控制系统的运行过程中还会出现环境变化、元件老化等问题。因此,在控制系统的设计过程中一个不可回避的问题是:如何设计控制器,使得当一定范围的参数不确定性及一定限度的未建模动态存在时,闭环系统仍能保持稳定并保证一定的动态性能品质,这样的系统被称为具有鲁棒性。

研究系统鲁棒性离不开系统的不确定性,为了便于研究通常要用一定的数学模型对系统不确定性进行描述,图 1.1 给出了系统不确定性模型。在控制系统中,常见的不确定性模型有以下几种:

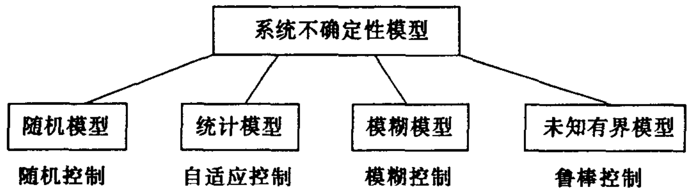

图 1.1　系统不确定性模型

① 随机模型。这种不确定性可以用某种随机分布来描述,在许多关于随机控制的专著中对这种不确定性都有详细的讨论。

② 统计模型。这种模型与上一种很接近,两者的区别在于统计模型是建立在抽样实验的基础上的。由于实验的次数和样本的长度都受到限制,而且实验过程往往会受到随机干扰的影响,只能得到不确定性因素的估计值及其统计特性。自适应控制是这种不确定系统的最主要的控制方法。

③ 模糊模型。这种模型通常可用来描述由自然语言而产生的不确定性,如“远大于 10”,“接近 100” 等。描述这种不确定性的方法一般是定义某个集合,而假设不确定因素以某种隶属

度属于该集合。基于模糊不确定性模型而产生的模糊控制理论已成为控制理论中相对独立的一个分支而受到广泛的重视。

④ 未知有界模型。这种模型对不确定性的描述是相当“宽松”的，这里并不需要对不确定因素的随机（统计）特性作任何假设，通常只认为它属于某个已知的集合。这种不确定性正是鲁棒控制理论研究的对象。

未知有界不确定性包括参数不确定性和未建模动态（或称为动态不确定性）。参数不确定性通常不会改变系统的结构（阶次），并且不确定参数是非时变的。参数不确定性对系统的影响通常发生在低频段，而未建模动态则通常表现为高频不确定性。对未建模动态 $\boldsymbol{\Delta}(s)$ 通常并不知道它的结构、阶次，但可以通过频响实验测出其幅值界限，即

$$|\boldsymbol{\Delta}(\mathrm{j}\omega)| \leqslant |\boldsymbol{W}(\mathrm{j}\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}$$

上式中 $|\boldsymbol{W}(\mathrm{j}\omega)|$ 为确定值，用来表示未建模动态的幅值界限。

系统的动态不确定性常常分为以下几种形式：

① 加性不确定性。这种不确定对象表示为

$$\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{\Delta}_A) = \boldsymbol{G}_0(s) + \boldsymbol{\Delta}_A(s)$$

上式中 $\boldsymbol{G}_0(s)$ 通常称为标称对象。

② 乘性不确定性。这种不确定性在对象中的作用可表示为

$$\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{\Delta}_M) = \boldsymbol{G}_0(s)(1 + \boldsymbol{\Delta}_M(s))$$

这种不确定性反映了实际对象与标称对象的比值与 1 之间的差距，即

$$\boldsymbol{\Delta}(s) = \frac{\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{\Delta})}{\boldsymbol{G}_0(s)} - 1$$

③ 分子、分母不确定性。当传递函数的分子、分母中分别有未建模动态时，可用这种模型来表示，即

$$\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{\Delta}_N,\boldsymbol{\Delta}_D) = (\boldsymbol{N}(s) + \boldsymbol{\Delta}_N(s))(\boldsymbol{D}(s) + \boldsymbol{\Delta}_D(s))^{-1}$$

此时标称对象为

$$\boldsymbol{G}_0(s) = \boldsymbol{N}(s)\boldsymbol{D}^{-1}(s)$$

加性、乘性和分子分母不确定性模型可以分别用图 1.2 ~ 1.4 来表示。

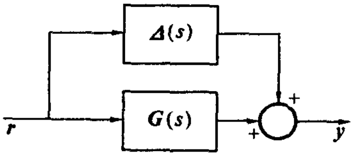

图 1.2　加性不确定性模型

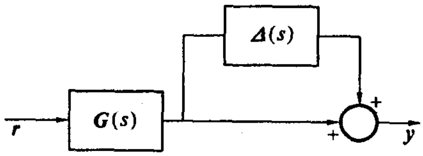

图 1.3　乘性不确定性模型

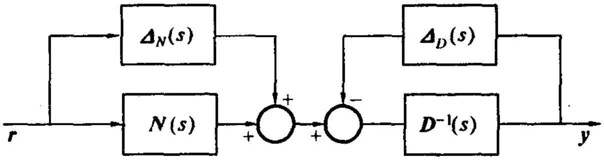

图 1.4　分子、分母不确定性模型

1.2　H_∞ 控制理论的发展概况

传统的控制理论和方法，如经典控制理论、现代控制理论和自适应控制理论等，都要求控制对象的精确模型或要求对象模型的不确定性和外界干扰满足特殊的假定，然而在实际控制系统中，要获得控制对象的精确模型是困难的，甚至是不可能的，对象的不确定性和外界干扰也往往不满足特殊性的假设。因此，控制系统的设计必须考虑在存在不确定性的情况下，反馈控制器是否仍然能使控制系统稳定并满足所希望的要求。进入 20 世纪 80 年代，人们从实际与理论两方面都越来越深刻地认识到，在设计控制系统时，基于系统的精确模型是不现实的，必须分析其不确定性，这就导致了专门分析和处理具有不确定性系统的控制理论 —— 鲁棒控制理论的产生。

鲁棒控制理论中引人注目的有 H_∞ 控制理论、结构奇异值理论和 Kharitonov 区间理论等。本书将着重介绍 H_∞ 控制理论。H_∞ 控制理论是目前解决鲁棒控制问题比较成功且比较完善的理论体系，已成为近 20 年来自动控制理论及工程应用研究的热门课题之一。控制系统的鲁棒性一般是指系统在它的参数或结构发生摄动时保持某种原有品质的能力。鲁棒性包括鲁棒稳定性和鲁棒性能。鲁棒稳定性是指系统在其参数或结构发生摄动时保持稳定的能力，鲁棒性能是指系统在其参数或结构发生摄动时保持某种特定性能的能力。

H_∞ 控制最早是从频域发展起来的。人们发现，控制系统设计中的许多问题，可以归结为使某一闭环传递函数的 H_∞ 范数最小，或小于某个指定的正数。H_∞ 控制经过许多研究人员 10 多年来的努力，获得了令人瞩目的发展，逐渐形成了完整的一套理论体系，成为分析和设计不确定系统的一种强有力的工具。

在 20 世纪 60 年代，被称为现代控制理论的状态空间方法得到很大的发展，出现了以 Kalman 滤波器和最优二次调节理论为基础的 LQG 反馈设计（H_2 控制）方法，但 LQG 设计方法要求获得对象的精确模型，且假定外界干扰信号的统计特性已知。上述条件在实际应用中往往难以达到，所以 LQG 设计方法虽然在理论上具有较好的结果，但实际应用并不成功。针对 LQG 设计中对干扰信号所需限制的不合理性，加拿大学者 Zames 在 1981 年提出了著名的 H_∞ 控制思想。Zames 考虑如下一个单输入单输出系统的设计问题：对于属于一个有限能量的信号

集的干扰信号，设计一个控制器使得闭环系统稳定且干扰对系统期望输出影响最小。由于传递函数的 H_∞ 范数可描述有限输入能量到输出能量的最大增益，因此用表示上述影响的传递函数的 H_∞ 范数作为目标函数对系统进行优化设计，就可使具有有限功率谱的干扰对系统期望输出的影响最小。可以看出以 H_∞ 范数作性能指标还具有如下优点：

① 可以处理在有界干扰下系统的控制问题。

②H_∞ 范数具有乘法性质：$\|PQ\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty \|Q\|_\infty$，这一性质使其便于研究对象具有不确定性时的鲁棒稳定问题。

从 1981 年 Zames 提出 H_∞ 控制思想至今，H_∞ 控制的发展大致可以分成三个时期：

① 第一个时期为 1981 ～ 1984 年，其中代表性工作是 1984 年 Doyle 等提出的所谓“1984 年方法”。

② 第二个时期为 1985 ～ 1988 年，在此期间 H_∞ 控制获得突破，1988 年，Glover 和 Doyle 给出了著名的“2 - Riccati 方程”的解法。

③ 第三个时期为 1989 年至今，是 H_∞ 控制理论的完善与推广时期。

由于 Zames 的 H_∞ 控制思想是一种频域设计技术，故初期对 H_∞ 控制的研究方法是频域或频域加时域的方法。在这一时期，H_∞ 控制理论主要使用逼近方法和插值方法。插值方法使用 Nevanlinna - Pick 插值理论以及矩阵形式的 Sarason 理论，具有概念直观和清晰等优点，但没有给出好的算法；而逼近方法借助于 AKK 理论，在计算上取得了一定的进展，其不足之处在于所用理论比较深奥难懂。1984 年 Doyle 和 Glover 等对当时 H_∞ 控制进行了总结，形成了“1984 年方法”，其具体步骤如下：首先通过 Youla 参数化将可镇定控制器表示为稳定的传递函数 Q 的函数，使问题转化为模型匹配问题；然后将此模型匹配问题转化为广义距离问题，再通过谱分解将其转化为 Nehari 扩展问题；最后采用 Hankel 范数逼近理论求解 Nehari 问题而得到控制器。这种方法的缺点是计算量过大，最后得到的控制器的状态数是对象状态数的 10 ～ 30 倍，且即使使用控制器降阶方法，也是其 2 ～ 3 倍。

由于实际系统同时存在模型不确定性和干扰的影响，H_∞ 控制这一优化设计方法从灵敏度极小化问题发展为混合灵敏度优化问题，系统设计的目的是保证系统具有鲁棒稳定性和良好性能。处理这一问题，最初采用的有 Kwakernaak 的多项式方法，即将该问题转化为多项式方程和矩阵方程求解。

对于具有模型不确定系统的鲁棒稳定的研究是 H_∞ 控制中的一个重要方面，它与灵敏度极小化及混合灵敏度问题是并行的。简单来说，有如下关系：加性、乘性摄动与灵敏度极小化相对应，而分子、分母摄动与混合灵敏度优化相对应。

在研究各种 H_∞ 优化问题的过程中，人们发现可以将灵敏度极小化问题、鲁棒镇定问题、混合灵敏度优化问题、跟踪问题、两自由度问题、滤波问题、模型匹配问题等许多控制问题，统一于标准 H_∞ 控制问题（Francis，1987），这就使得对 H_∞ 控制理论的研究更加条理化，并且对

H_∞ 控制理论体系的形成产生了重要影响。Francis 的关于 H_∞ 控制的书，使人们认识到 H_∞ 控制非常简单，而且又非常重要，成了许多人学习 H_∞ 控制的入门书。同年，Francis 和 Doyle 对当时 H_∞ 控制作了一个综述，并着重介绍了逼近方法。

1987 年，可以说是 H_∞ 控制孕育着突破的一年。

Ball 和 Cohen 将 Ball 和 Helton 的几何理论进行了简化，把 H_∞ 控制的求解问题化为谱和 J – 谱的分解问题，从而获得 3 个 Riccati 方程，此方法为后来的 J – 谱分解法、(J, J') – 无损分解方法的形成和完善，以及其与插值方法、多项式方法的沟通产生了重要影响。

Kimura 采用了方向性插值解决了 2 块问题。为了克服插值方法所存在的没有有效算法的缺点，Kimura 从古典电网络设计方法中获得启发，提出了"共轭化"这一概念。"共轭化"是古典插值理论的状态空间描述，是计算 (J, J') – 无损分解的有力工具，它预示着具有原插值方法优点的有效状态空间算法的产生。

Limebeer 等对 2 块问题的控制器阶次的上界进行了研究，提出可得到其状态数不超过广义对象阶次的控制器，这使人们乐观地猜测到对于一般 4 块问题也应有相似结论。

Khargonekar 等人创立了 H_∞ 控制的代数 Riccati 方程解法，研究了 H_∞ 状态反馈控制问题。这主要源于一个含有不确定性系统的鲁棒稳定性问题，即求一控制器使得具有结构式不确定系统的复稳定半径最大。他们将此问题转化为某一系统的 H_∞ 范数优化问题，获得 H_∞ 状态反馈控制问题有解的充要条件是一个含有正参数的代数 Riccati 方程（参数化的 ARE）具有正定解。这一结果对 H_∞ 控制的状态空间解法的形成具有重要影响。此外，此方法还建立了 H_∞ 控制和二次镇定、线性二次微分对策之间的联系，对后来的微分对策方法的产生和发展起到了促进作用。其不足之处在于参数化的 ARE 不易检验。可惜的是，这一研究方向当时没有进一步深入下去。后来，人们发现只要对广义对象引入一些限制，便可获得非参数化的 ARE，而这正是 1988 年突破性的成果之一。

有了上述的积累，到了 1988 年夏，H_∞ 控制问题的研究取得了突破性的进展，出现了著名的"2 – Riccati 方程"的标准 H_∞ 控制问题的解法。具体地说，就是只需求解两个非耦合的代数 Riccati 方程，便可以获得阶次不超过广义对象的 McMillan 阶次的 H_∞ 控制器。1989 年，Doyle 等对 H_∞ 控制问题的状态空间分析法进行了总结，并强调了 H_∞ 控制问题和 LQG 控制问题的联系，这样，H_∞ 控制问题在概念和算法两方面均被大大地简化了。加上含有上述解法的程序包，如 Robust-Control Box、Matrix_x 和 Xmath 的出现，使得 H_∞ 控制理论开始成为一些实际系统设计的有效工具。

当时 Glover 和 Doyle 的论文，只给出了 H_∞ 控制的"2 – Riccati 方程"的解，而没有给出具体的推导过程。1988 年之后的几年中系统的推导法出现了。Green 等发展了 Ball 和 Cohen 的工作，将 H_∞ 控制问题转化为 2 个 J – 谱分解问题，并给出了较统一和系统的解法。Glover 等采用扩展和全通嵌入方法讨论了广义距离问题，其推导过程复杂。Kwakernaak 的多项式方法也得

到了发展，可将 H_∞ 控制转化为对一有理多项式函数分子和分母的 2 个 J – 谱分解，这一结果和 Green 等的基于 J – 谱分解理论的解法有相当强的联系。

1988 年之后，H_∞ 控制的纯时域解法出现了。其中有微分对策方法和极大值原理方法。从 H_∞ 控制思想来看应用微分对策方法非常自然。这两种方法不仅可以解决线性时不变系统的 H_∞ 控制问题，还可以用来处理时变系统、分布参数系统、非线性系统、奇异摄动系统等的 H_∞ 控制问题。

Kimura 利用"共轭化" 这一概念和更能揭示 H_∞ 控制系统串联结构的广义对象的散射模型，提出了基于(J,J') – 无损分解理论的 H_∞ 控制问题解法。(J,J') – 无损分解是一种具有一定通用性的分解法，如内外分解、谱分解等均为其特例。这种解法进一步揭示了 H_∞ 控制系统的结构，例如输入输出信号之间的能量关系、广义对象的结构分解和控制器之间的关系等，与其他算法相比还具有推导过程简单、物理意义清晰的优点。

由于 H_∞ 控制器是不唯一的，多目标 H_∞ 优化问题受到人们关注，这方面的工作主要有 Khargonekar 和 Rotea(1991)、Bernstein 和 Haddad(1990)，另外还有 Glover 和 Mustafa 的极小熵 H_∞ 控制。

在标准 H_∞ 控制问题的解法中，均假设广义对象中在包含无穷远点在内的虚轴上不含零点，然而许多实际控制问题是不满足这一假设的。通常称这种在虚轴上有零点的 H_∞ 控制问题为奇异(或非标准)H_∞ 控制问题。若此控制问题不解决，将使现有的 H_∞ 控制理论难以成为实用的设计工具。对于非标准 H_∞ 控制问题，不仅诸如"2 – Riccati 方程" 等漂亮结果不再成立，而且获得上述结果的许多 H_∞ 控制问题解法也不再有效。

对于奇异 H_∞ 控制问题，现主要有如下几种处理方法：

① 通过采用频率回路整形或廉价控制，即通过引入摄动量 ε，将含有虚轴零点的 H_∞ 控制问题转换为不含有虚轴零点的新的 H_∞ 控制问题。

②Stoorvogel 提出的由 2 个二次矩阵不等式组成的判据。

③ 用 Riccati 不等式组成的判据来判断 H_∞ 控制问题的有解性。

④Hara 等采用共轭化概念和描述系统的描述法，获得了关于虚轴含零点的 1 块 H_∞ 问题解存在的充要条件。

⑤ 由 Xin 和 Kimura 对奇异 H_∞ 控制问题进行了研究，解决了一般有理函数的(J,J') – 无损分解问题，提出了基于(J,J') – 无损分解理论的统一处理奇异和非奇异 H_∞ 控制问题的描述形式解法，并利用其对偶性，深刻揭示出 H_∞ 控制系统的本质结构，研究并构造出了正则(Proper) 控制器。

⑥ 利用有界实引理的线性矩阵不等式(LMI) 描述，直接从时域上用代数推导方法获得了基于 3 个 LMI 的 H_∞ 控制问题的可解的充要条件。

第 2 章　H_∞ 控制理论的数学基础

2.1　空间和范数

2.1.1　距离空间

设 W 是非空集合，若对任意一对元素 $x,y\in W$，均存在对应定值 $d(x,y)$ 满足下列条件：

①$d(x,y)\geqslant 0$($d(x,y)=0$，当且仅当 $x=y$)；

②$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)(x,y,z\in W)$，则称 $d(x,y)$ 是 x 与 y 之间的距离。W 按距离 $d(x,y)$ 成为距离空间，记为(W,d)，W 中的元素称为点。

在 n 维欧氏空间 E^n 中，对于 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in E^n$，定义

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

易证 $d(x,y)$ 满足距离的定义 ① 和 ②，此距离又称为欧氏距离。

2.1.2　线性赋范空间

设 X 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间。若 X 上定义的实值函数 $f(x):x\to\mathbf{R}$ 满足下列条件：

①$f(x)\geqslant 0,\forall x\in X$；

②$f(\alpha x)=|\alpha|f(x),\forall x\in X,\forall\alpha\in\mathbf{R}$；

③$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),\forall x,y\in X$，则称 $f(x)$ 为 x 的半范数。若 $f(x)$ 还满足

$$f(x)=0\quad(\text{当且仅当 } x=\mathbf{0})$$

则称 $f(x)$ 为 x 的范数，记为 $\|x\|$。而 X 按范数 $\|\cdot\|$ 成为线性赋范空间，记为$(X,\|\cdot\|)$。例如

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2},\quad \|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\quad \|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

均为 x 的范数，其中 $\|x\|_2$ 为欧氏范数。可见，同一个空间上可定义多种范数。

2.1.3　Banach 空间

设(W,d)是距离空间，$\{x_n\}$ 为 W 中的点列。若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)>0$，使得当

$i, k \geqslant N(\varepsilon)$ 时,有

$$d(x_i, x_k) < \varepsilon$$

则称$\{x_n\}$为 W 中的 Cauchy 序列。

在复数域中,点列收敛的充要条件为它是Cauchy序列,但在一般距离空间中,Cauchy序列未必是收敛点列。

若距离空间 W 中的任一 Cauchy 序列均收敛于 W 中的点,则称 W 是完备空间。完备的线性赋范空间称为 Banach 空间。

设 S 是 Banach 空间 X 的一个子集,如果满足

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S; \quad c\boldsymbol{x} \in S, \quad \forall \boldsymbol{x} \in S, \quad \forall c \in \mathbf{C}$$

则 S 是X 的一个线性子空间。进而,如果 S 中的每一个在X 中收敛的点列,在 S 中均有极限,则称 S 是闭子空间。

2.1.4 Hilbert 空间

设 H 是数域F 上的线性空间。若对于任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$,均对应一个数$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in F$,满足下列条件:

①$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$;

②$\langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in H, \quad \forall \alpha, \beta \in F$;

③$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0, \boldsymbol{x} \in H$(当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$),则称$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$为 H 中的内积。当 F 为复数域 $\mathbf{C}$(或实数域 $\mathbf{R}$) 时,称 H 为复(实) 内积空间。

对于 $\boldsymbol{x} \in H$,定义

$$\| \boldsymbol{x} \| \triangleq (\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle)^{1/2}$$

则 $\| \boldsymbol{x} \|$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的一个范数,称为由内积$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ 导出的范数。如此,内积空间按其导出范数成为线性赋范空间。由导出范数又可引出距离 d,从而可定义点列的收敛和极限。

完备的内积空间称为 Hilbert 空间。

设 H 是内积空间,$\| \cdot \|$ 是其内积导出范数,则对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H$,有

$$\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \|^2 + \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 = 2(\| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2) \quad \text{(平行四边形公式)}$$

设 X 是线性赋范空间,$\| \cdot \|$ 是其中的范数。若对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$,平行四边形公式都成立,则可在 X 中定义内积$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$,使 $\| \boldsymbol{x} \|$ 成为由$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ 导出的范数。但并不是所有的线性赋范空间均可成为内积空间。

2.1.5 时域函数空间

(1)$L_2(-\infty, \infty)$:考虑所有平方可积函数 $\boldsymbol{x}(t): \mathbf{R} \to \mathbf{C}^{m \times 1}$ 所构成的函数空间,即对于 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{C}^{n \times 1}(-\infty < t < \infty)$,有