大学文科数学学习指导

汪国柄 编

清华大学出版社

大学文科数学

学习指导

汪国柄 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《大学文科数学》(汪国柄编著,清华大学出版社,2005)的配套辅导教材,共分6章,涵盖一元函数微积分、多元函数微积分、线性代数初步与概率论初步4个部分.每章分内容提要与基本要求、例题分析与方法综述、习题与复习题选解、自测题及其答案4个环节.本书例题丰富,分析深入,点评得当,方法综述全面,书中内容自成体系,便于自学.

本书适用于文科类各专业的本科生,也适用于非文科类专业的学生.本书还可作为教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学学习指导/汪国柄编.—北京:清华大学出版社,2006.11
ISBN 7-302-13982-2

Ⅰ.大… Ⅱ.汪… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第121574号

出 版 者:清华大学出版社　　**地　　址**:北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**客户服务**:010-62776969
组稿编辑:刘　颖
文稿编辑:王海燕
印 刷 者:北京鑫海金澳胶印有限公司
装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开　　本:185×230　**印张**:25.5　**字数**:543千字
版　　次:2006年11月第1版　2006年11月第1次印刷
书　　号:ISBN 7-302-13982-2/O·579
印　　数:1~3000
定　　价:29.80元

前　　言

编者长期担任理工科的本科生和研究生的基础数学理论课的教学任务，兼职过考研辅导、专升本和高等教育自学考试等数学课程的讲授工作，有着丰富的教学经验，深受学生好评. 近年来悉心探索文科数学的教学内容、要求、方法和规律；在教学实践的基础上，编著出版了《大学文科数学》，年余，多次印刷，印数已逾万册. 应读者要求，续编了《大学文科数学学习指导》. 本书是《大学文科数学》的姊妹篇，旨在帮助读者尽快地掌握高等数学的学习方法，解决学习中所碰到的困难，更全面、更深入地理解、领会所学的数学理论和方法，提高学习质量.

全书共分 6 章，涵盖一元函数微积分、多元函数微积分、线性代数初步和概率论初步. 每章分 4 个环节：内容提要与基本要求、例题分析与方法综述、习题与复习题选解、自测题及其答案.

在"内容提要与基本要求"中，简要地列出了有关章节的基本概念、主要定理、性质及公式，使得本书自成体系，便于读者随时查找理论依据. 在"例题分析与方法综述"中，通过大量典型例题的分析和点评，以期启迪读者加深对有关的数学概念和理论的认识，提高分析问题和解决问题的能力，掌握解题的思路、方法和技巧. 例题大多选自《大学文科数学》中有关章节的习题或复习题. 对于一些难度大一些的习题或复习题，在"习题与复习题选解"中均给出了详细的解答. 各章的自测题都比较基本，限时 120 分钟，读者可自我检验一下对所学知识的掌握程度.

读者要善于利用辅导教材. 做题前要把相关的概念和理论搞清楚，做题时不要急于翻阅答案，要养成独立思考的习惯，尽量自己完成解题过程. 倘若对于某道题感到实在无从下手，可以粗略地翻阅一下辅导教材，得到启示后，继续由自己去完成. 做过一批题之后，再去仔细阅读辅导教材，这样定会受益匪浅，辅导教材就真正成了你的良师益友. 如果不求甚解，照抄答案，则必定收效甚微.

本书适用于文科类专业，对于非文科类专业也是一本不错的辅导参考教材.

李秀淳教授仔细审阅了一元函数微积分部分的书稿，提出了不少宝贵意见，在此表示衷心感谢.

书中定有不少疏漏和不妥，敬请指正！

编　者

2006 年 5 月于清华园

目　录

第1章　函数、极限与连续

1.1　内容提要与基本要求

1.1.1　预备知识

内容提要

1. 集合

具有某种共同属性的事物的全体称为**集合**，简称**集**；常用大写字母 A,B,C 等表示. 集合中的事物称为**元素**；常用小写字母 a,b,c 等表示. $a\in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素，$a\notin A$ 表示 a 不是集合 A 中的元素.

如果集合中元素能够被一一列举出来，例如，集合 A 中含有 a,b,c,d 四个元素，则记作

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

这种表达方式称为**列举法**. 如果集合中的元素不能被一一列举出来，则采用**描述法**，记作

$$A=\{x \mid x\text{ 具有的性质}\},$$

其中 x 表示集合 A 中的元素.

集合之间有如下的简单关系：

(1) $A\supset B$ 或 $B\subset A\Leftrightarrow B=\{x|x\in A\}$，表示集合 B 中的元素都是集合 A 中的元素，这时称 B 是 A 的**子集**.

(2) $A\supset B$ 且 $B\supset A\Leftrightarrow A=B$，表示 A,B 两个集合中元素完全相同. 这时称 A,B **相等**.

(3) $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$称为 A 与 B 的**并集**，简称**并**.

(4) $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$称为 A 与 B 的**交集**，简称**交**.

2. 绝对值

设 $a\in\mathbb{R}$，$|a|$称为 a 的**绝对值**. 定义

$$|a|=\begin{cases}-a, & a<0,\\ a, & a\geqslant 0.\end{cases}$$

绝对值的基本性质：

(1) $\sqrt{a^2}=|a|$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(3) $|a|\leqslant\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon\leqslant a\leqslant\varepsilon$；$|a|\geqslant\varepsilon\Leftrightarrow a\leqslant-\varepsilon$ 与 $a\geqslant\varepsilon$.

(4) $|ab|=|a||b|$；$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$.

(5) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；$|a-b|\geqslant|a|-|b|$.

3. 区间与邻域

$[a,b]$称为闭区间，$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

(a,b)称为开区间，$(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

$(-\infty,+\infty)$称为无穷区间，$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbb{R}\}$.

其他还有半开区间$(a,b]$，$[a,b)$；半无穷区间$(-\infty,a)$，$(-\infty,a]$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$.

$U(x_0,\delta)$称为点 x_0 的 δ 邻域. $U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，是关于点 x_0 的对称区间.

$\mathring{U}(x_0,\delta)$称为点 x_0 的 δ 空心邻域. $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

基本要求

(1) 区间表示实数 x 的取值范围，邻域是关于定点 x_0 对称的特殊区间，研究变量与函数就离不开其变化范围——区间. 区间是用集合定义的，因此，必须清楚地理解、掌握集合、区间和邻域的概念及其表示方法.

(2) 绝对值及其基本性质，以后要经常用到，必须熟练掌握.

1.1.2 函数的概念

内容提要

1. 函数的定义

设 x,y 是两个变量，$D\subset\mathbb{R}$，$\forall x\in D$，如果按一个对应规则 f，都有确定的 y 与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，自变量 x 的取值范围 D 称为**定义域**；y 又称为**因变量**，对应的 y 值的全体，记作 $Z_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的**值域**.

2. 函数的表示法

函数有三种表示方法：

(1) 公式法　用 x,y 的二元方程表示函数. $y=f(x)$称为显函数；$F(x,y)=0$ 称为隐函数；$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 称为函数的参数方程表示法，其中 t 称为参数.

(2) 列表法　列出 x,y 的对应值.

(3) 图形法　平面点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 形成的曲线称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

3. 分段函数

一个函数在定义域 D 的不同子域内，有不同的对应规则，需要用不同的公式表示，这样的函数称为分段函数.

4. 反函数

如果从 $y=f(x)$ 解得 $x=\varphi(y)$，对换 x,y，写作 $y=\varphi(x)$，则称 $y=\varphi(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$.

基本要求

(1) 要清楚函数定义包含 5 个要素：自变量 x，因变量 y，对应规则 f，定义域 D——x 的取值范围，值域 Z_f——对应 y 值的全体. 其中定义域 D 和对应规则 f 是最重要的两个要素，必须着重理解.

(2) 能分清函数公式法的三种形式：显函数形式，隐函数形式和参数方程形式. 分段函数是显函数的一种.

(3) 会求反函数. 知道函数与其反函数的图形对称于直线 $y=x$.

(4) 会画函数图形.

(5) 对于一些较简单的应用问题，要会列出变量之间的函数关系式.

1.1.3　函数的简单性态

内容提要

(1) 有界性　$\forall x\in I, I\subset D, \exists M>0, |f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 内**有界**.

(2) 单调性　$\forall x_1<x_2\in I, I\subset D$，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 内**单调增加**；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 内**单调减少**.

(3) 奇偶性　设 D 关于坐标原点对称，$\forall x\in D$，若有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点.

(4) 周期性　若 $\exists a>0$，使 $\forall x\in D$，都有 $f(x+a)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. a 称为**周期**，通常所说的周期是指最小正周期.

基本要求

(1) 要知道函数的有界性是相对于区间而言的. 要会判定函数在指定区间上是否有界.

(2) 清楚函数单调性的概念，但这里不要求会判定.

(3) 要能够熟练地判定函数的奇偶性. 知道奇函数和偶函数图形的对称性.

(4) 要知道一个周期函数的周期有无穷多个，且周期也可以是负数，只是为了方便，规定最小的正周期为周期.

1.1.4 函数分类

内容提要

用公式表示的函数种类繁多，为便于研究，有必要将它们进行分类.

1. 基本初等函数

以下 6 种称为**基本初等函数**：

(1) 常数函数 $y=C$(C 为常数).

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为常数).

(3) 指数函数 $y=a^x$(a 为常数，$a>0$，$a\neq1$).

(4) 对数函数 $y=\log_a x$(a 为常数，$a>0$，$a\neq1$).

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\, x$ 等.

2. 简单函数

由基本初等函数经过有限次四则运算得到的一个式子表示的函数称为**简单函数**.

3. 复合函数

若 $y=f(u)$，$u=u(x)$，则称 $y=f[u(x)]$为**复合函数**，称 u 为**中间变量**.

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合构成的一个式子表示的函数称为**初等函数**.

一般地，分段函数是非初等函数.

基本要求

(1) 基本初等函数是函数中最简单的 6 种，是构成其他函数的基础. 要清楚基本初等函数的定义域和性态.

(2) 必须会将复合函数分解为基本初等函数与简单函数链. 会求复合函数的定义域.

(3) 清楚什么是初等函数.

1.1.5 函数的极限

内容提要

1. 定义

若 x 在某种变化趋势下，$f(x)$与常量 A 无限逼近，则称 $f(x)$在 x 的这种变化趋势下

以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to\square} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A\ (x \to \square),$$

其中“$x\to\square$”表示 x 的变化趋势，共 6 种：$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 称为**左极限**，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$ 称为**右极限**.

2. 定理

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

(2) 局部有界性定理　若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$，则当 x 变化至某一范围内，$f(x)$ 有界.

(3) 局部保号性定理　若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则当 x 变化至某一范围内，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

基本要求

(1) 这里的极限定义是一种直观性的定义，不是很严格. 但是，必须明确其中 $f(x)$ 与 A 的逼近程度和 x 变化到某一范围有密切关系.

(2) 清楚极限和左、右极限的关系.

(3) 知道局部有界性和保号性两个定理，因为以后有时需要涉及.

1.1.6　无穷大量与无穷小量

内容提要

1. 定义

若在 x 的某种变化趋势下，$|f(x)|$ 可以任意地大，即 $|f(x)|$ 可以大于任意给定的常数，则称 $f(x)$ 在 x 的这种变化趋势下是**无穷大量**，记作

$$\lim_{x\to\square} f(x) = \infty \quad （或 -\infty，或 +\infty）.$$

若在 x 的某种变化趋势下，$\alpha(x)$ 以零为极限，即 $\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0$，则称 $\alpha(x)$ 在 x 的这种变化趋势下是**无穷小量**. 0 是一种特殊的无穷小量.

2. 无穷大量与无穷小量的关系

$$\lim_{x\to\square} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\square} \frac{1}{f(x)} = 0;$$

$$\lim_{x\to\square} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\square} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty \quad (\alpha(x) \neq 0).$$

3. 无穷小量的运算性质

(1) 有限多个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

(2) 无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量.

(3) $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，$\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0$.

4. 无穷小量比较与等价代换

(1) 无穷小量比较　设$\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\square}\beta(x)=0$，$\beta(x)\neq 0$.

若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的**高阶无穷小量**，记作$\alpha(x)=o(\beta(x))(x\to\square)$.

若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A(A\neq 0)$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是**同阶无穷小量**. 特别地，当$A=1$时，称$\alpha(x)$与$\beta(x)$为**等价无穷小量**，记作$\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to\square)$.

(2) 等价代换定理　设在x的某种变化趋势下，有两对等价无穷小量，$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，且$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$(或$\infty$)，则

$$\lim_{x\to\square}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A \quad (\text{或 } \infty).$$

当$x\to 0$时，常用的等价无穷小量有$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$等.

基本要求

(1) 要清楚无穷小量、无穷大量是绝对值无穷变小、无穷变大的变量，不是极小的常量和极大的常量的意思. 0是一种特殊的无穷小量.

(2) 要知道无穷小量(不恒为零)与无穷大量互为倒数的关系.

(3) 对于无穷小量的运算性质要十分清楚，因为无穷小量运算性质是极限计算的理论基础.

(4) 要清楚无穷小量之间的比较关系.

(5) 要熟记一些常用的等价无穷小量. 因为在极限计算中运用等价无穷小量代换，往往可以达到简化计算的目的.

1.1.7 极限的运算法则与两个重要极限

内容提要

1. 极限四则运算定理

设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$(这里没有写出x的变化趋势，指的是这些极限过程对所有的x的变化趋势都成立)，则

$$\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)=A+B;$$
$$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

2. **复合函数的极限定理**

对于 $f[u(x)]$，若 $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$，$\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，且当 $x \neq x_0$ 时，$u(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[u(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A.$$

特别地，当 $f(u)$ 在 u_0 有定义，且 $f(u_0) = A$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[u(x)] = A = f(u_0) = f[\lim_{x \to x_0} u(x)].$$

此时，"lim"与"f"的次序可交换.

3. **初等函数的极限定理**

设初等函数在区间 D 内有定义，$x_0 \in D$，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

4. **两个重要极限**

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

基本要求

这部分内容提供了极限计算的理论依据和计算方法，务必领会清楚.

(1) 要求能熟练地使用极限的四则运算法则. 务必明白只有在参与运算的函数个个极限都存在的情况下，方可使用这个法则.

(2) 要会求复合函数的极限. 要清楚在什么条件下，"lim"与"f"可交换次序.

(3) 能熟练地计算初等函数的极限.

(4) 能熟练地运用两个重要极限计算相关的极限.

1.1.8　函数的连续性

内容提要

1. **定义**

(1) 增量 $\Delta x = x - x_0$ 称为自变量 x 在点 x_0 的**增量**. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的**增量**.

(2) 连续性　若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 **连续**.

若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 **左连续**；若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称

$y=f(x)$在点 x_0 **右连续**.

若 $y=f(x)$在(a,b)内每一点都连续,则称 $y=f(x)$在(a,b)内连续.

若 $y=f(x)$在(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$,则称 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续.

(3) 间断点　若 $y=f(x)$在点 x_0 不连续,则称 x_0 是 $f(x)$的一个**间断点**.

若 $y=f(x)$在 x_0 无定义,或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在,或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$虽然存在,但是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$,则 x_0 必是间断点.

间断点分为两类,左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在的间断点,称为**第一类间断点**;其余的间断点都称为**第二类间断点**.

第一类间断点,左、右极限都存在,因此,只可能有两种情况:一种是左、右极限相等的间断点;这时只需补充定义 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,则 $y=f(x)$在点 x_0 就是连续的了.所以将其称为**可去间断点**.另一种是左、右极限不相等的间断点,称为**跳跃间断点**.

第二类间断点,左、右极限至少有一个不存在,根据极限不存在的情况也分为两种:一种叫做**无穷间断点**,另一种叫做**振荡间断点**.

2. 初等函数的连续性定理

初等函数在有定义的区间内连续.

3. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则必有最小值 m、最大值 M,$\forall x\in[a,b]$,都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

(2) 介值定理　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $\forall\mu\in[m,M]$,至少有一点 $\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=\mu$.

(3) 有界性定理　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

(4) 零点定理　设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少有一点 $\xi\in(a,b)$使 $f(\xi)=0$.

基本要求

(1) 会判断 $f(x)$在点 x_0 的连续性.

(2) 会求 $f(x)$的间断点,并判别间断点的类型和名称.

(3) 知道初等函数的连续性.

(4) 从几何意义体会关于闭区间上连续函数的 4 个定理,并牢记.特别是要会利用零点定理判断方程 $f(x)=0$ 根的分布,或函数 $y=f(x)$的图形与 x 轴交点的分布.

1.2 例题分析与方法综述

1.2.1 集合、区间和邻域

例题分析

例 1.1 用区间记号表示下列集合：

(1) $A=\{x \mid |x-2|\leqslant 3\}$； (2) $B=\{x \mid |x+1|>2\}$.

解 (1) 集合 A 的元素 x 必须满足不等式 $|x-2|\leqslant 3$. 去掉绝对值符号，可得到 $-3\leqslant x-2\leqslant 3$，于是 $-1\leqslant x\leqslant 5$. 所以

$$A=\{x \mid |x-2|\leqslant 3\}=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 5\}=[-1,5].$$

(2) 集合 B 中的元素 x 满足不等式 $|x+1|>2$，等价于不等式 $x+1<-2$ 与 $x+1>2$，即 $x<-3$ 与 $x>1$. 所以

$$\begin{aligned}B&=\{x \mid |x+1|>2\}=\{x \mid x<-3\}\cup\{x \mid x>1\}\\&=(-\infty,-3)\cup(1,+\infty).\end{aligned}$$

例 1.2 用区间记号表示下列邻域：

(1) $U\left(2,\frac{1}{2}\right)$； (2) $\mathring{U}=\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

解 (1) 由 $U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$，得

$$U\left(2,\frac{1}{2}\right)=\left(2-\frac{1}{2},2+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right).$$

(2) 当 $x\neq 2$ 时，得

$$\mathring{U}\left(2,\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},2\right)\cup\left(2,\frac{5}{2}\right).$$

例 1.3 证明：$|ab|=|a||b|$.

证明 当 $ab=0$ 时，a,b 中至少有一个为零，不妨设 $a=0$，这时有

$$|ab|=|0|=0,\quad |a||b|=0\cdot|b|=0.$$

所以 $|ab|=|a||b|$.

当 $ab<0$ 时，a,b 异号，不妨设 $a>0,b<0$，这时有

$$|ab|=-ab,\quad |a||b|=a\cdot(-b)=-ab.$$

所以 $|ab|=|a||b|$.

当 $ab>0$ 时，则 $|ab|=ab$. 因为 a,b 同号，若 $a>0$ 且 $b>0$，则 $|a||b|=ab$；若 $a<0$ 且 $b<0$，则 $|a||b|=-a\cdot(-b)=ab$. 所以 $|ab|=|a||b|$.