

高等数学  
**好题**  
精编系列

# 微积分

## 学习指导与题解

(上册)

○ 黄光谷 黄川 李杨 蔡晓英 编

- 大学生 ..... 备考的帮手
- 考研者 ..... 成功的阶梯
- 教师们 ..... 命题的参考

· 华中科技大学出版社 ·

<http://www.hustp.com>

HAOTI

高等数学好题精编系列

# 微积分学习指导与题解

(上册)

黄光谷 黄川 编  
李杨 蔡晓英

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导与题解(上册)/黄光谷 等编  
武汉:华中科技大学出版社,2006年12月  
ISBN 7-5609-3714-4

I. 微…

I. ①黄… ②黄… ③李… ④蔡…

Ⅱ. 微积分-高等学校-教学参考资料

Ⅳ. O172

微积分学习指导与题解(上册)

黄光谷 等编

策划编辑:钟小珉

责任编辑:王汉江

责任校对:刘 飞 陈 骏

封面设计:刘 卉

责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山

邮编:430074

电话:(027)87557437

录 排:武汉佳年华科技有限公司

印 刷:湖北新华印务有限公司

开本:850×1168 1/32

印张:16.75

字数:400 000

版次:2006年12月第1版

印次:2006年12月第1次印刷

定价:25.80元

ISBN 7-5609-3714-4/O·401

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

## 内 容 提 要

本书精选了微积分(即高等数学)课程最常用的四种教材和一本考研辅导书中有代表性的习题或考题,按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称“考纲”)“数学一”中高等数学所列内容作了取舍,按前言中书[1]所列顺序编目,共分九章(上册含四章,下册含五章),各章首列有学习指导,含考纲要求、重点难点和学习注意,以指导读者学习;各节开头列有该节的内容提要,包括主要概念、公式、方法和定理,然后精选了五种书的好题并逐题作了详细地分析或解答。

本书集各家之长,精选各书好题于一体,具有典型性、系统性、资料性和很强的可读性.特别适宜于作为理科、工科、农林、财经、管理等专业本、专科生学习微积分(即高等数学)课程的参考书,也可作为考研者的优秀复习资料和指南,还可为教师提供考试命题的参考。

## 前 言

要学好数学,一要深入理解数学概念、定理、公式等基础知识,二要学会解题,并从中掌握方法,培养能力和素质.本书侧重于后者,精选了下列四种常用教材和一本考研辅导书中的好习题或考题,并作了详细地分析或解答,以作示范.

[1]同济大学应用数学系.微积分(上、下册).第2版.北京:高等教育出版社,2003.本书各节第一部分为内容提要,与书[1]的记号一致;第二部分对应于书[1],简称“微积分习题选解”.各题编号,如1-3,第一个数字1是本书序号,第二个数字3是原教材[1]的题号;而小题号是原书编号,以下类似.下面书中有(A)、(B)组题的,则分别记为1-A-3,3-B-6等.

[2]董加礼,孙丽华.工科数学基础(上、下册).北京:高等教育出版社,2001.对应的本书各节第三部分,简称“工科数学习题选解”.

[3]王锦森,马知恩.工科数学分析基础(上、下册).北京:高等教育出版社,2001.对应的本书各节第四部分,简称“工科数学分析习题选解”.

[4]华东师范大学数学系.数学分析(上、下册).第3版.北京:高等教育出版社,2001.对应的本书各节第五部分简称“数学分析习题选解”.

[5]黄光谷.考研数学题典.武汉:华中科技大学出版社,2002.对应本书各节的第六部分,简称“考研题选解”.其中序号1、1、01、一、(1)、(3')依次表示为指该节本书的第1题,系考研“数学一”、2001年试题的第一大题之第(1)小题,本题满分3分,其他类似.

有些学校的向量代数与空间解析几何、微分方程是另作一门

课程专门开设的,书[2]、[3]、[4]不包括这些内容,相应节中的第几部分的编号有变动.

本书按照最新《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称“考纲”)“数学一”中高等数学的考试内容决定内容取舍和选题,按教材[1]的顺序编目,共分九章.本书各章章首列有学习指导,含考纲要求、重点难点和学习注意,以指导读者学习.其中,“考纲”与“高等数学课程基本要求”(相当于“教学大纲”)是基本一致的,达到了“考纲”的要求,也就达到了教学要求.阅读各章“考纲要求”时,要注意其中“了解”、“理解”、“会”、“掌握”等用词层次的不同,以便掌握分寸.“重点难点”与“学习注意”是提纲挈领、原则性的,有待读者在阅读了各部分习题选解以后,再重新细心体会.

选入的各节习题,有的题已有详细的分析或提示,则以其代替该题的解答,不重复解答.题后留有方括号[ ]的是选择题;画有横线\_\_\_\_\_的是填空题及其答案.由于本书是题解书,素材又取自不同的书,前后顺序不完全一致,有的解答可能用到稍后的知识,特此说明.

这五种书的习题或考题都较好,但本书限于篇幅,不能逐一解答;只精选了各书约 $1/4 \sim 1/3$ 的题解合成一书.本书采众家之长,熟读本书,相当于读了五种题解书的精华.有些题可以一题多解,本书只给出了一种常见解法,其他解法留给读者思考.

感谢华中科技大学出版社的领导和编辑对本书的指导、支持和细心工作.本书中用到许多习题、考题和资料,向所引用书籍的作者一并表示感谢!

由于作者水平有限,本书中可能会有错误和缺点,恳请读者和同行批评指正,以便再版时修改.

编 者

2006年8月

## 记号说明

$\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{Z}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{C}$  分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集.

$\mathbf{N}^*$  或  $\mathbf{N}_+$  表示正整数集 ( $\mathbf{N}$  中去掉数 0 的集合).

$\mathbf{R}^+$  ( $\mathbf{R}^-$ ) 表示正(负)实数集.

$U(a, \delta)$  表示以  $a$  为中心、 $\delta$  为半径的邻域.

$\overset{\circ}{U}(a, \delta)$  表示去心邻域.

$\forall$  表示“任意给定”、“任给”或“对任意的”.

$\exists$  表示“存在”、“有”.

$\stackrel{\text{def}}{=}$  表示“记为”、“定义为”.

$\Rightarrow$  表示“推出”、“推得”或“蕴涵”.

$\Leftrightarrow$  表示可“互推出”、“等价于”或“充要条件”.

$\complement_A B$  表示  $A$  中子集  $B$  的补集或余集.

$I \setminus A$  表示  $I$  与  $A$  之差.

$f(x) \in B(I)$  表示区间  $I$  上的全体有界函数之集.

$C(I)$  表示  $I$  上全体连续函数之集.

$D(I)$  表示  $I$  上全体可导函数之集.

$D^n(I)$  表示  $I$  上全体  $n$  阶可导函数之集.

$R(I)$  表示  $I$  上全体(黎曼)可积函数之集.

$f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$  表示函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且在开区间  $(a, b)$  内可导.

$e^{f(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \exp f(x)$ .

# 目 录

预备知识 集合、映射与函数	(1)
学习指导	(1)
一、内容提要	(1)
二、微积分习题选解	(2)
三、工科数学习题选解	(5)
四、工科数学分析习题选解	(8)
五、数学分析习题选解	(9)
六、考研题选解	(15)
第一章 极限与连续	(17)
学习指导	(17)
第一节 数列的极限	(18)
一、内容提要	(18)
二、微积分习题选解	(19)
三、工科数学习题选解	(20)
四、工科数学分析习题选解	(22)
五、数学分析习题选解	(26)
六、考研题选解	(34)
第二节 函数的极限	(34)
一、内容提要	(34)
二、微积分习题选解	(35)
三、工科数学习题选解	(38)



四、工科数学分析习题选解	(40)
五、数学分析习题选解	(43)
六、考研题选解	(44)
第三节 极限的性质与运算法则	(46)
一、内容提要	(46)
二、微积分习题选解	(47)
三、工科数学习题选解	(52)
四、工科数学分析习题选解	(52)
五、数学分析习题选解	(54)
六、考研题选解	(56)
第四节 极限存在准则与两个重要极限	(60)
一、内容提要	(60)
二、微积分习题选解	(60)
三、工科数学习题选解	(62)
四、工科数学分析习题选解	(64)
五、数学分析习题选解	(65)
六、考研题选解	(66)
第五节 无穷小及其比较	(70)
一、内容提要	(70)
二、微积分习题选解	(71)
三、工科数学习题选解	(72)
四、工科数学分析习题选解	(73)
五、数学分析习题选解	(79)
六、考研题选解	(81)
第六节 函数的连续性及其运算和性质	(83)
一、内容提要	(83)
二、微积分习题选解	(84)

三、工科数学习题选解	(89)
四、工科数学分析习题选解	(93)
五、数学分析习题选解	(96)
六、考研题选解	(100)
总习题选解	(104)
一、微积分总习题选解	(104)
二、工科数学分析综合练习题选解	(107)
三、数学分析总练习题选解	(109)
<b>第二章 一元函数微分学</b>	<b>(113)</b>
学习指导	(113)
第一节 导数的概念 求导法则	(115)
一、内容提要	(115)
二、微积分习题选解	(116)
三、工科数学习题选解	(121)
四、工科数学分析习题选解	(126)
五、数学分析习题选解	(131)
六、考研题选解	(133)
第二节 隐函数与由参数方程确定函数的导数	(141)
一、内容提要	(141)
二、微积分习题选解	(141)
三、工科数学习题选解	(145)
四、工科数学分析习题选解	(148)
五、数学分析习题选解	(150)
六、考研题选解	(151)
第三节 高阶导数	(155)
一、内容提要	(155)
二、微积分习题选解	(156)

三、工科数学习题选解 .....	(157)
四、工科数学分析习题选解 .....	(159)
五、数学分析习题选解 .....	(162)
六、考研题选解 .....	(165)
第四节 函数的微分及其应用 .....	(169)
一、内容提要 .....	(169)
二、微积分习题选解 .....	(170)
三、工科数学习题选解 .....	(172)
四、工科数学分析习题选解 .....	(173)
五、数学分析习题选解 .....	(175)
六、考研题选解 .....	(176)
第五节 微分中值定理 泰勒公式 .....	(178)
一、内容提要 .....	(178)
二、微积分习题选解 .....	(179)
三、工科数学习题选解 .....	(186)
四、工科数学分析习题选解 .....	(189)
五、数学分析习题选解 .....	(195)
六、考研题选解 .....	(199)
第六节 洛必达法则 .....	(210)
一、内容提要 .....	(210)
二、微积分习题选解 .....	(211)
三、工科数学习题选解 .....	(213)
四、工科数学分析习题选解 .....	(214)
五、数学分析习题选解 .....	(217)
六、考研题选解 .....	(218)
第七节 函数的单调性与凹凸性 .....	(222)
一、内容提要 .....	(222)
二、微积分习题选解 .....	(223)
三、工科数学习题选解 .....	(227)

四、工科数学分析习题选解 .....	(231)
五、数学分析习题选解 .....	(234)
六、考研题选解 .....	(236)
第八节 函数的极值与最大值、最小值 曲率 .....	(244)
一、内容提要 .....	(244)
二、微积分习题选解 .....	(245)
三、工科数学习题选解 .....	(251)
四、工科数学分析习题选解 .....	(255)
五、数学分析习题选解 .....	(258)
六、考研题选解 .....	(260)
*第九节 一元函数微分学在经济中的应用 .....	(272)
一、内容提要 .....	(272)
二、考研题选解 .....	(272)
总习题选解 .....	(281)
一、微积分总习题选解 .....	(281)
二、工科数学分析综合练习题选解 .....	(284)
三、数学分析总练习题选解 .....	(285)
第三章 一元函数积分学 .....	(291)
学习指导 .....	(291)
第一节 原函数、不定积分的概念及性质 .....	(293)
一、内容提要 .....	(293)
二、微积分习题选解 .....	(293)
三、工科数学习题选解 .....	(294)
四、工科数学分析习题选解 .....	(295)
五、数学分析习题选解 .....	(296)
六、考研题选解 .....	(298)
第二节 不定积分的换元积分法 .....	(300)
一、内容提要 .....	(300)

二、微积分习题选解 .....	(301)
三、工科数学习题选解 .....	(302)
四、工科数学分析习题选解 .....	(304)
五、数学分析习题选解 .....	(306)
六、考研题选解 .....	(308)
第三节 不定积分的分部积分法 .....	(311)
一、内容提要 .....	(311)
二、微积分习题选解 .....	(311)
三、工科数学习题选解 .....	(313)
四、工科数学分析习题选解 .....	(315)
五、数学分析习题选解 .....	(316)
六、考研题选解 .....	(317)
第四节 有理函数的不定积分 .....	(321)
一、内容提要 .....	(321)
二、微积分习题选解 .....	(322)
三、工科数学习题选解 .....	(323)
四、工科数学分析习题选解 .....	(324)
五、数学分析习题选解 .....	(325)
六、考研题选解 .....	(326)
第五节 定积分 微积分基本定理 .....	(327)
一、内容提要 .....	(327)
二、微积分习题选解 .....	(328)
三、工科数学习题选解 .....	(333)
四、工科数学分析习题选解 .....	(336)
五、数学分析习题选解 .....	(340)
六、考研题选解 .....	(343)
第六节 定积分的换元法与分部积分法 .....	(360)
一、内容提要 .....	(360)
二、微积分习题选解 .....	(360)

三、工科数学习题选解 .....	(363)
四、工科数学分析习题选解 .....	(364)
五、数学分析习题选解 .....	(366)
六、考研题选解 .....	(368)
第七节 定积分的几何应用 .....	(376)
一、内容提要 .....	(376)
二、微积分习题选解 .....	(377)
三、工科数学习题选解 .....	(381)
四、工科数学分析习题选解 .....	(383)
五、数学分析习题选解 .....	(387)
六、考研题选解 .....	(389)
第八节 定积分的物理应用与其他应用 .....	(401)
一、内容提要 .....	(401)
二、微积分习题选解 .....	(402)
三、工科数学习题选解 .....	(407)
四、工科数学分析习题选解 .....	(408)
五、数学分析习题选解 .....	(410)
六、考研题选解 .....	(411)
第九节 反常积分 .....	(416)
一、内容提要 .....	(416)
二、微积分习题选解 .....	(417)
三、工科数学习题选解 .....	(419)
四、工科数学分析习题选解 .....	(419)
五、数学分析习题选解 .....	(420)
六、考研题选解 .....	(422)
总习题选解 .....	(425)
一、微积分总习题选解 .....	(425)
二、工科数学分析综合练习题选解 .....	(430)
三、数学分析总练习题选解 .....	(432)

第四章 常微分方程与* 差分方程 .....	(437)
学习指导 .....	(437)
第一节 微分方程的基本概念及 可分离变量的微分方程 .....	(439)
一、内容提要 .....	(439)
二、微积分习题选解 .....	(439)
三、工科数学习题选解 .....	(443)
四、工科数学分析习题选解 .....	(444)
五、考研题选解 .....	(448)
第二节 一阶线性微分方程 .....	(454)
一、内容提要 .....	(454)
二、微积分习题选解 .....	(455)
三、工科数学习题选解 .....	(456)
四、工科数学分析习题选解 .....	(459)
五、考研题选解 .....	(460)
第三节 可用变量代换求解的一阶微分方程 .....	(464)
一、内容提要 .....	(464)
二、微积分习题选解 .....	(465)
三、工科数学习题选解 .....	(468)
四、工科数学分析习题选解 .....	(469)
五、考研题选解 .....	(470)
第四节 可降阶的二阶微分方程 .....	(473)
一、内容提要 .....	(473)
二、微积分习题选解 .....	(474)
三、工科数学习题选解 .....	(478)
四、工科数学分析习题选解 .....	(479)
五、考研题选解 .....	(482)
第五节 线性微分方程解的结构 .....	(486)
一、内容提要 .....	(486)

二、微积分习题选解 .....	(487)
三、工科数学习题选解 .....	(489)
四、工科数学分析习题选解 .....	(490)
五、考研题选解 .....	(492)
第六节 二阶及高阶常系数线性微分方程 .....	(493)
一、内容提要 .....	(493)
二、微积分习题选解 .....	(495)
三、工科数学习题选解 .....	(499)
四、工科数学分析习题选解 .....	(501)
五、考研题选解 .....	(504)
*第七节 差分方程 .....	(509)
一、内容提要 .....	(509)
二、考研题选解 .....	(512)
总习题选解 .....	(513)
一、微积分总习题选解 .....	(513)
二、工科数学分析综合练习题选解 .....	(517)
 参考书目 .....	 (519)



# 预备知识 集合、映射与函数

---

## 学习指导

### (一) 考纲要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立简单应用问题中的函数关系式.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

### (二) 重点难点

求函数的定义域和建立函数关系式.

### (三) 学习注意

1. 通过解不等式或不等式组求函数的定义域.
2. 常用凑元法或代入法求函数式.
3. 定义域与对应法则是函数概念的两要素,只要有一要素不同,则是不同的函数.
4. 在建立应用问题的函数关系式时,要仔细审题,恰当地选择自变量与因变量(及建立直角坐标系),根据题意,找到两变量之间联系的等式(或关系式、对应法则),就可建立函数关系式.

---

## 一、内容提要

1. 集合的概念、运算,区间和邻域 $U(a, \delta)$ (见教材《微积分(上