平面三角

（苏联中学用）

斯·依·諾伏西洛夫 著

余元庆　吕学礼 譯

人 民 教 育 出 版 社

目

第一章　弧和角；它們的度量

§1.　任意大小的角

在几何里，从一个点引出的两条射綫所組成的图形叫做角。

一条射綫在平面內环繞它的原点旋轉可以組成任意的角．例如，一条射綫环繞O点从开始的位置OA旋轉到終止的位置OB，就組成了角AOB（图1）．

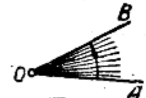

图　1

在三角里，角被看成是一条射綫在平面內环繞着它的原点旋轉所形成的．

一条射綫旋轉的时候所組成的角可以大于一个平角(图2)．

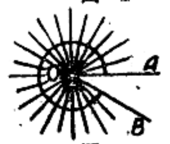

图　2

一条旋轉的射綫可以在平面內环繞着O点旋轉若干周后和开始的位置重合．

一条射綫可以旋轉若干周又一周的一部分(图3)．轉动着的輪子的輻条的运动就是一个例子．

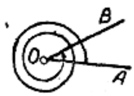

图　3

射綫在平面內的旋轉可以有两个相反的方向(图 4)．例如，图5里所指出的，相互衔接的两个具有同样半徑的齿輪，按照相反的方向旋轉，在旋轉的时候，其中一个旋轉某一个角，另一个也旋轉同样的角，但是方向相反．

图　4

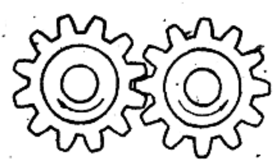

图　5

平面內的两个可能的旋轉方向，一个作为正的，另一个作为負的．这时，射綫按照正方向旋轉所成的角作为正角，而射綫按照負方向旋轉所成的角作为負角．

平面內的两个可能的旋轉方向中的任何一个都可以取作正的．

以后我們認为逆时針的旋轉方向(就是和放在旋轉发生的平面內并且刻度盘面向观察者的鐘表上时針旋轉相反的方向)是旋轉的正方向.

如果射綫 OA 沒有作任何旋轉，仍留在开始的位置，那末就說，射綫旋轉的角等于零.

定义 **旋轉射綫的开始位置叫做对应的旋轉角的始边，而射綫的終止位置叫做这个角的終边.**

始边和終边分别具有相同位置的角可以有无穷多个；它們中間彼此相差整数周(正的或負的).

§2. 任意大小的弧

对应于圓的两条半徑所构成的任何的角，这个圓上都有以这两条半徑的端点为界的一条弧(图 6). 如果半徑 OA 环繞着圓心 O 旋轉，那末半徑的端点 A 就在圓上运动. 我們說，**一个点在圓上运动，如果連結这个点和圓心的半徑按照正(負)方向旋轉，那末这个点是按照正(負)方向在圓上运动.**

图 6

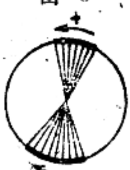

图 7

一个点在圓上按照正方向运动所形成的弧作为正的，而按照負方向运动所形成的弧作为負的(图 7).

如果半徑旋轉一周(正的或負的)，那末它的端点划过一个整圓而返回到开始的位置.

我們也可以研究含有若干个正的或者負的整圓的弧. 纏繞在軸上的細綫可以給出这样的弧的概念：它可以含有按照这种或者那种方向纏繞的任意圈数.

§3. 角和弧的度量

角的度量的概念，我們在几何里已經知道了. 角的度量是取一

个确定的角作为度量单位，并且利用它来量所有其他的角.

任何的角都可以取来作为度量单位.

在实际上，角常常是用度来量的，就是取一个整圆的$\frac{1}{360}$作为度量单位，把它叫做一度. 为了更精确的度量，把一度分成 60 个等份，每一个等份叫做一分；把一分再分成 60 个等份，每一个等份叫做一秒.

在几何里，角有时用"d 的几分之一"来量，就是取直角作为度量单位.

在技术里，常常取一周作为角的度量单位. 例如，机器中的齿輪或者飞机中的螺旋桨的旋轉，通常都是用周数来量的.

在炮术里，取一周的$\frac{1}{60}$，就是$\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$，作为角的度量单位；这个角叫做一个大密位. 为了更精确地来量角，把一个大密位分成 100 个等份；每一个等份，就是$\frac{6^\circ}{100}=3'36''$，叫做一个小密位.

正角的大小用正数表示，負角的大小用負数表示.

因为射綫旋轉的时候可以組成任意大小的角（正的，負的，零，含有任意周数的），所以三角里所研究的角可以是用任意的实数来表示的各种角.

在量已知圓的弧的时候，所取的单位，是所对的圆心角等于所取的角的度量单位的一条弧. 这时，圓心角的大小和它所对的弧的大小分别用同样数目的角的度量单位和弧的度量单位来表示.

图 8

角和弧的弧度 从几何里知道，在圓心角相同的时候，两个圓上弧的长的比等于它們的半徑的长的比（图 8）：*

$$\frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\overset{\frown}{A_2B_2}}=\frac{R_1}{R_2}, \text{或} \frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{R_1}=\frac{\overset{\frown}{A_2B_2}}{R_2}.$$

* 扇形 OA_1B_1 和 OA_2B_2 相似

于是，在圆心角相同的时候，一个圆上的弧的长和它的半徑的比与半徑的长短无关.

在圆心角的大小改变的时候，这个比也改变.

定义 以一个角为圆心角，这个角所对的弧的长和这个弧的半徑的长的比，叫做这个角的弧度.

图 9

用弧度量角的时候，度量单位是等于半徑的长的弧所对的一个正的圆心角．这个角叫做1弧度（图9）.

用弧度量弧的时候，度量单位是1弧度的弧，就是等于半徑的长的弧.

化度为弧度．一周（正的）的弧度等于圆的周长除以半徑:

$$\frac{2\pi R}{R}=2\pi=6.283185\cdots\cdots.$$

$$1^\circ \text{ 的弧度等于} \frac{2\pi}{360}=\frac{\pi}{180}=0.017453\cdots\cdots.$$

如果一个角含有 A°，那末它的弧度 α 就是:

$$\boxed{\alpha=\frac{A\pi}{180}} \qquad (1)$$

計算 $1'$ 的角的弧度:

$$1'=\frac{1}{60}\text{度}=\frac{1}{60}\cdot\frac{\pi}{180}\text{弧度}=0.00029088\cdots\cdots\text{弧度}.$$

在下面的表里給出某些常見的角的弧度:

度	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧　度	$\frac{\pi}{6}$ ≈0.5236	$\frac{\pi}{4}$ ≈0.7854	$\frac{\pi}{3}$ ≈1.0472	$\frac{\pi}{2}$ ≈1.5708	π ≈3.1416	$\frac{3\pi}{2}$ ≈4.7124	2π ≈6.2832

化弧度为度．从等式(1)得，等于 α 弧度的角含有

$$A^\circ=\frac{\alpha\cdot180^\circ}{\pi}.$$

特別的，

$$1\text{ 弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57.295\text{ 度}\approx 3438'\approx 206265''\approx 57^\circ17'45''.$$

例　2弧度的角化成度(精确到分)等于

$$\frac{2\cdot 180^\circ}{\pi}\approx 2\cdot(57^\circ17'45'')\approx 114^\circ36'$$

(根据化整的法則把秒舍去或进入).

量任何的量所得的数照例都要带有度量单位的名称，例如：5千米，10卢布，7°等等．但是对于角和弧的弧度通常都是例外：用弧度表示角(或弧)的大小，写成不带单位名称的数．“用数 α 来量的角”可以簡单地說成“角 α”来代替．例如，我們不說“大小等于0.5弧度的角”而說“角0.5”来代替．

化度为弧度可以利用现成的表．在B·M·伯拉基斯“四位数学用表”*的表XVI里，給出了从0°到90°每間隔6分的角的弧度值．这些值是精确到四位小数的近似值．

例　1) 求130°26′的角的弧度 α.

解　所給的角是由90°的角和40°26′的角組成的．从表里查得90°和40°24′两个角的弧度；在表的旁边載有2′的修正值，这个修正值应当加在最后一位小数上：

$$\begin{array}{rr} 90^\circ\ \text{——} & 1.5708 \\ 40^\circ24'\text{——} & 0.7051 \\ 2'\text{——} & 6 \\ \hline \alpha= & 2.2765 \end{array}$$

2) 求等于(近似地)1.25弧度的角的度数(精确到1°).

解　在B·M·伯拉基斯的表里，查得和1.2500最近似的数1.2497；和它对应的角是71°36′.

把查到的值化整，精确到1°，就得(近似地)72°.

知道了圓的半徑 R 和一条弧的弧度 α，可以計算这条弧的长 l．事实上，根据弧度的定义：

$$\alpha=\frac{l}{R},\text{ 由此得 } l=\alpha R.$$

---

* 这个表人民教育出版社有中譯本——譯者注.

就是,圆弧的长等于它的弧度乘以半徑的积.

例 半徑 2.2 米的車輪旋轉 $30°30'$ 的角;求車輪边緣上一个点所經过的路的长.

解 根据公式 $l=\alpha R$ 求路長:

$$l\approx 2.2\times 0.53\approx 1.2.$$

注 从伯拉基斯的表里查得 $30°30'$ 的角的弧度是 0.5323. 因为 R 的近似值只有两位有效数字,所以 α 的值也应当化整使它只保留两位有效数字:$\alpha\approx 0.53$.

§ 4. 坐标平面;单位圆

在平面内规定旋轉的正方向并且选定坐标軸. 縱軸的正方向总是选擇得使横軸上的正射綫 OX 在平面内旋轉一个正直角后和縱軸上的正射綫 OY 重合. 例如,图 10里指出:旋轉的正方向是逆时針方向,横軸的正方向是向右的方向,縱軸的正方向是向上的方向.

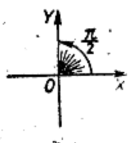

图 10

坐标平面内的角通常这样放置:取坐标軸的原点作为頂点,取横軸上的正半軸作为始边. 要得出用已知数所表示的角的終边,应当把射綫从开始位置 OX 旋轉这个数表示的一个角(图 11).

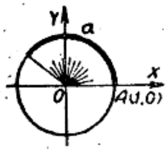

图 11

从坐标原点引出的一条射綫,可以作为无穷多个角(以正半軸 OX 为始边)的終边;这些角彼此相差整数周:如果这些角中的一个的大小是 α,那末这些角中任何一个角 β 的大小都可以表示成 $\beta=2k\pi+\alpha$,这里 k 是任何整数,就是 $k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\cdots$. 角 β 是由角 α 和 k 周(正的或負的)組成的. 例如,和横軸傾斜成 $30°$ 角的射綫,可以作为角 $30°+360°\cdot k$ 的終边,就是角 $30°$ $(k=0)$, $390°(k=1)$, $-330°(k=-1)$, $750°(k=2)$ 等等的終边.

定义 以坐标原点为圆心,半徑的长等于 1 的圆叫做单位圆.

任何实数 α 都可以用单位圆上的点来表示. 为此,通常从水平直

徑的右端$A(1,0)$起，来放置用数α来量的弧(参看图 11). 如果α是弧的弧度数，那末在$\alpha>0$的时候从正方向，在$\alpha<0$的时候从負方向，从A点起截取長等于$|\alpha|$的弧就行了；这条弧的端点就表示实数α. 数目零，$\alpha=0$，用起点$A(1,0)$来表示.

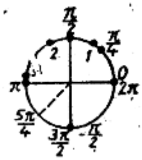

图 12

图 12 里指出单位圓上的点表示各种不同的实数.

在下面所說的情形，并且只有在下面所說的情形，两个不同的实数α和β用单位圓上的同一个点来表示，就是：如果用这两个数来量的弧相差整数周，$\beta-\alpha=2k\pi$，也就是

$$\boxed{\beta=\alpha+2k\pi},$$

这里k是整数(正的或負的).

坐标軸分平面同时也分单位圓成四个相等的部分，叫做平面或者单位圓的四个象限.

如果角的終边(或弧的端点)在平面(或单位圓)的某一个象限內，那末就說所給的角(或弧)終止于这个象限.

图 13

单位圓的第 I、II 两个象限(图 13)在一起組成上面的半圓，第 III、IV 两个象限組成下面的半圓，第 I、IV 两个象限組成右边的半圓，第 II、III 两个象限組成左边的半圓.

表示数目$2k\pi$(或度制$360°k$)的弧終止于单位圓上水平直徑的右端A，而表示数目$\pi+2k\pi=(2k+1)\pi$(或度制$(2k+1)\cdot180°$)的弧終止于左端A_1，这里k是任何整数.

$n\pi$或度制的$180°n$(这里n是整数)的弧終止于水平直徑的端点：在偶数$n=2k$的时候，終止于A点；在奇数$n=2k+1$的时候，終止于A_1点.

$\frac{\pi}{2}+2k\pi$（或度制 $90°+360°\cdot k$）的弧終止于鉛直直徑的上端——$B(0,1)$点. $-\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{2}+(2k-1)\pi$ 的弧終止于鉛直直徑的下端——$B_1(0,-1)$点. $\frac{\pi}{2}+n\pi$ 的弧終止于鉛直直徑的端点：在偶数 $n=2k$ 的时候，終止于 B 点；在奇数 $n=2k-1$ 的时候，終止于 B_1 点.

$k\cdot\frac{\pi}{2}$（或 $90°k$）的弧，或者終止于水平直徑的端点，或者終止于鉛直直徑的端点. 在 $k=0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots$ 的时候，依次得到点 A, B, A_1, B_1, A, ……；在 $k=-1,-2,-3,-4,\cdots\cdots$ 的时候，就依次得到点 B_1, A_1, B, A, …….

§5. 向量在軸上的射影*

图 14

有方向的直綫綫段叫做向量（图 14）. 在标記一个向量的时候，在第一个位置上写它的起点，在第二个位置上写它的終点. 向量 $\overline{AB}$ 可以看成是：一个任意点从开始的位置 A 沿着直綫运动到終止的位置 B 所經过的途徑. 許多物理量都是向量，例如，力、速度、加速度等等；这些量都用有向綫段来表示.

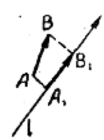

图 15

定义 如果向量 $\overline{AB}$ 的起点和終点在軸 l 上的射影分别是 A_1 和 B_1，那末綫段 A_1B_1 的大小叫做向量 $\overline{AB}$ 在軸 l 上的射影（图 15）.

如果綫段 A_1B_1 的方向和軸 l 的方向相一致（或相反），那末射影被认为是正的（或負的）. 如果向量和軸 l 垂直，那末它在这个軸上的射影等于零（图 16）. 有时同一个詞“射影”，不仅用来称呼軸 l 上綫段 A_1B_1 的大小，并且还用来称呼向量 $\overline{A_1B_1}$.

图 16

* 軸我們理解为規定了正方向并且选定了量长度的尺度单位的一条直綫.

設 F 是坐标平面内的一个向量；它在横軸和縱軸上的射影就分别用 F_1 和 F_2 来表示，而它的长用 $|\overline{F}|$ 来表示.

定理　向量的长的平方等于它在坐标軸上的射影的平方的和.

証明　把向量平行移动的时候，它在軸上的射影不变（图 17）. 現在把向量平行移动，使它的起点和坐标原点一致. 从向量 $\overline{F}$ 的終点向 OX 軸引垂綫，就得出一个直角三角形，这个直角三角形的斜边等于向量的长，而两条直角边分别等于向量在坐标軸上的射影的絕对值 $|F_1|$ 和 $|F_2|$. 根据勾股定理：

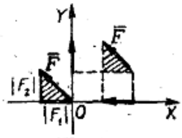

图　17

$$|\overline{F}|^2=|F_1|^2+|F_2|^2.$$

因为一个数的絕对值的平方就等于这个数的平方，所以上面等式里右边的絕对值符号是不必要的：

$$\boxed{|\overline{F}|^2=F_1^2+F_2^2},$$

証完.

注　如果向量 F 在两条坐标軸中的一条上，那末三角形就变成一条綫段，但是在这种情形，定理也是成立的. 例如，如果向量在横軸上，那末 $F_2=0$，而 $|\overline{F}|=|F_1|$；根据公式也同样得到：

$$|\overline{F}|=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{F_1^2}=|F_1|.$$

§ 6.　坐标平面内两个点間的距离

定理　在坐标平面内两个点 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ 間的距离 d 的平方等于这两点同名坐标的差的平方的和：

$$\boxed{d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

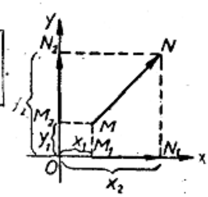

图　18

証明　已知两个点 M 和 N（图 18）；把这两点看作坐标平面內一个向量的起点和終点. 向量 $\overline{MN}$ 在横軸上的射影等于在 OX 上的綫段

M_1N_1（有方向的）的大小．根据在一条軸上的有向綫段相加的法則得：

$$OM_1+M_1N_1=ON_1,\ 所以\ M_1N_1=ON_1-OM_1.$$

因为

$$OM_1=x_1, ON_1=x_2;$$

所以

$$\overline{MN}\ 在\ x\ 軸上的射影=M_1N_1=x_2-x_1.$$

把向量 $\overline{MN}$ 射影到縱軸上，同样得：

$$\overline{MN}\ 在\ y\ 軸上的射影=M_2N_2=y_2-y_1.$$

因为向量的长的平方等于它在坐标軸上的射影的平方的和（見§5），所以

$$d^2=(M_1N_1)^2+(M_2N_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,\quad 証完.$$

注　所得的公式不論M点和N点在平面內的任何位置（不仅如图18所示的位置）都是正确的．事实上，計算綫段M_1N_1和M_2N_2时所根据的在一条軸上的有向綫段相加的法則，不論綫段（在軸上）的起点和終点在任何位置都是正确的．

第二章　三角函数

§7．任意角的三角函数的定义

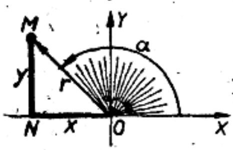

图 19

設M是平面內坐标原点外的任意点（图19）．

定义　連結坐标原点和M点的向量$\overline{OM}$，叫做M点的向量半徑或簡称动徑．

用x和y表示动徑$\overline{OM}$的終点的横坐标和縱坐标，用r表示动徑的长．

定理　如果动徑$\overline{OM}$和横軸所成的角是一个定角，那末比

$$\frac{x}{r} \text{ 和 } \frac{y}{r} \tag{1}$$

与动徑 $\overline{OM}$ 的长无关.

証明　以横軸的正半軸为始边，在坐标平面内作角 α. 在角 α 的終边上取坐标原点外任意的不同的两点 M 和 M'. 現在我們来証明，对于向量半徑 $\overline{OM}$ 和 $\overline{OM'}$ 所組成的(1)中的两个比对应相等. 把点 M 和 M' 射影在横軸上(图 20, a 和 b)，得到两个相似三角形 OMN 和 $OM'N'$. 三角形 OMN 的两条直角边的长等于 M 点的坐标的絕对值，就是 $|x|$ 和 $|y|$，而斜边的长等于 r. 三角形 $OM'N'$ 的两条直角边和斜边的长分别是 $|x'|$, $|y'|$ 和 r'. 从三角形 OMN 和 $OM'N'$ 的相似得：$\frac{|x|}{r} = \frac{|x'|}{r'}$ (相似三角形对应边的比相等).

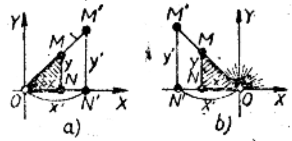

图　20

两个比 $\frac{x}{r}$ 和 $\frac{x'}{r'}$ 的符号也是相同的. 事实上，綫段 ON 和 ON' 是相同方向的向量半徑 $\overline{OM}$ 和 $\overline{OM'}$ 的射影. 因此，它們的方向也相同，而它們的大小 x 和 x' 有相同的符号(在图 20 a 里 x 和 x' 都是正的，在图 20 b 里 x 和 x' 都是負的). 因此，

$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}. \tag{1}$$

用同样的方法可以証明两个比 $\frac{y}{r}$ 和 $\frac{y'}{r'}$ 相等(把 M 和 M' 射影到 OY 軸上)，証完.

注　如果角 α 的終边是順着一条坐标軸的方向，那末三角形 OMN 和 $OM'N'$ 就成为綫段，但是在这种情形，定理仍旧是正确的。例如，如果角的終边順着横軸的正半軸的方向，那末 $\frac{x}{r}=1$，而 $\frac{y}{r}=0$；如果終边順着横軸的負半軸的方向，那末 $\frac{x}{r}=-1$，而 $\frac{y}{r}=0$.

定义　1) 动徑終点的横坐标和动徑的长的比，叫做动徑和横軸

所成的角 α 的余弦:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{x}{r}}.$$

2) 动徑終点的縱坐标和动徑的长的比,叫做动徑和横軸所成的角 α 的正弦:

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{y}{r}}.$$

3) 角 α 的正弦和余弦的比叫做角 α 的正切:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}.$$

4) 角 α 的余弦和正弦的比叫做角 α 的余切:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}.$$

$\cos\alpha, \sin\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$ 这些比的值与动徑的长无关.

从正切和余切的定义可以得出:**动徑和横軸所成的角 α 的正切等于动徑終点的縱坐标和横坐标的比,而余切等于动徑終点的横坐标和縱坐标的比:**

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}.$$

如果 $x\neq 0$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$ 这个比可以成立. 如果 $x=0$, 那末这个比不能成立(零不能做除数); 在这种情形, 角的終边順着縱軸的方向, 并且 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$, 或度制 $90°+180°k$ (这里 k 是任何整数). 因此, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 不存在.

角 $k\pi$(或度制 $180°k$)的終边順着横軸的方向, 由于 $y=0$, 所以

$\frac{x}{y}$这个比失掉意义;这些角的余切不存在.

• **对于每一个角 α,**

$$\cos\alpha, \sin\alpha, \operatorname{tg}\alpha \text{ 和 } \operatorname{ctg}\alpha$$

这些比中的每一个都有一个确定的値和角α对应(如果这个比有意义的話). 因此, 这些比是角 α 的函数. 这些函数叫做三角函数;角 α 是这些函数的自变数.

除了所指出的四个函数,有时还研究另外两个三角函数——正割和余割:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{r}{x} \text{ 和 } \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{r}{y}.$$

但是最后这两个函数沒有多大的应用。

因为三角函数的值与动徑的长无关,所以动徑可以永远取同样的长度. 通常認为 $r=1$; 这时动徑的終点在单位圓上,而角由单位圓的两条半徑組成(图 21). 在这种情形,

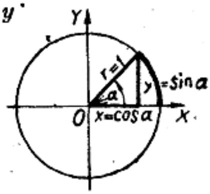

图 21

$$\boxed{\cos\alpha=x,\ \sin\alpha=y,\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}}.$$

因此,单位圓的动徑和开始半徑所成的角 α 的余弦和正弦分别等于动徑終点的横坐标和縱坐标, 而正切和余切分别等于縱坐标和横坐标的比与横坐标和縱坐标的比.

三角函数的自变数不仅可以認为是角, 并且也可以認为是单位圓上的弧. 按照所給的弧可以在单位圓上作出相应的点(动徑的終点), 并且求得三角函数的值.

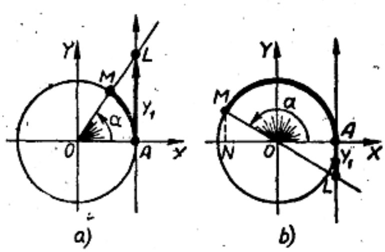

图 22

单位圓在水平直徑的端点$A(1,0)$的切綫叫做正切軸. 正切軸的正方向規

定和縱軸的相同(在图 22 里是从下向上的方向). 設M是单位圓上和角α对应的点. 延长半徑OM和正切軸相交, 得到正切軸上的点L(如果M点在縱軸上, 那末这种作图不能进行).

角α的正切等于正切軸上对应点的縱坐标.

事实上, 如果角α終止于右半平面, 那末取$\overline{OL}$为动徑, 得:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AL}{OA}=\frac{AL}{1}=y_1,$$

这里y_1是L点的縱坐标(图 22 a).

如果角α終止于左半平面(图 22 b), 那末M点和L点的同名的坐标符号相反, 而这两点的縱坐标和横坐标的比相同(三角形OMN和OAL相似):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{NM}{ON}=\frac{AL}{OA}=\frac{y_1}{1}=y_1.$$

注　如果M点在縱軸上, 那末L点不存在, $\operatorname{tg}\alpha$也不存在.

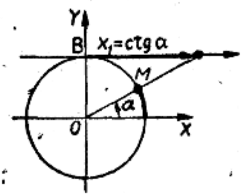

图　23

单位圓在鉛直直徑的端点$B(0,1)$的切綫叫做余切軸; 余切軸的正方向和横軸的相同.

角α的余切是余切軸上对应点的横坐标x_1(图 23).

§8. 某些角的三角函数値

如果角$\alpha=0$(图 24 a), 那末单位圓的动徑終点的坐标是$x=1$, $y=0$; 所以$\cos 0=1$, $\sin 0=0$, $\operatorname{tg} 0=\frac{y}{x}=0$, $\operatorname{ctg} 0$不存在.

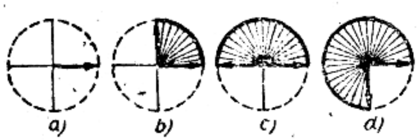

图　24