顶尖系列

经人民教育出版社授权，配合人教版教材使用

自主学习先锋

顶尖数学

课外训练步步高

九年级上册

课程标准
人教版

福建人民出版社

顶尖系列 自主学习先锋

顶尖数学

课外训练步步高

九年级上册

课程标准
人教版

福建人民出版社

策 划：闻 教 佟 仁

编 委：（按姓氏笔画排列）

任 勇 （厦门一中校长、特级教师、中学高级教师、福建省特级教师协会副会长、苏步青数学教育奖一等奖获得者）

朱义泰 （福州格致中学高级教师）

江敬润 （福建省普教室原副主任、中学高级教师、全国语文学习科学委员会副理事长、福建语文学习科学学会副会长）

李松华 （福建省普教室中学理科主任、化学组组长、中学高级教师、中国教育学会化学教学专业委员会理事、福建省化学教学委员会副理事长）

杨继红 （福州教育学院政治科主任、中学高级教师、福建省思想政治教学研究会副秘书长）

陈 峰 （福建师范大学物理系副主任、副教授、硕士生导师、教育部中学物理课程标准组核心成员、中国教育学会物理教学专业委员会理事、福建省物理教学委员会副理事长）

陈松铨 （福建省普教室中学理科副主任、生物组组长、中学高级教师、福建省生物教学研究会副理事长）

林为炎 （福建省普教室中学理科副主任、物理组组长、特级教师、中国教育学会物理教学专业委员会理事、福建省物理教学委员会副理事长）

诚雨生 （福建省普教室中学文科主任、历史组组长、中学高级教师、中国教育学会历史教学专业委员会理事、福建省历史教学委员会副理事长）

曾立群 （福州一中地理组组长、中学高级教师、中国教育学会地理教学专业委员会理事、福建省地理教学委员会副理事长）

本书执行主编：吴文梁

本书编写人员：陈淑欢 夏艳峰 郭妮亚

顶尖数学课外训练步步高（课程标准·人教版）

DINGJIAN SHUXUE KEWAI XUNLIAN BUBUGAO

九年级上册

出版发行：福建人民出版社
地 址：福州市东水路 76 号 邮政编码：350001
电 话：0591-87604366（发行部） 87521386（编辑室）
电子邮箱：211@fjpph.com
网 址：http://www.fjpph.com
印 刷：泉州晚报印刷厂
地 址：泉州市新华路 65 号 邮政编码：362000
开 本：787 毫米×1092 毫米 1/16
印 张：8.5
字 数：210 千字
版 次：2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 7-211-05330-5/G·3344
定 价：8.50 元

编写说明

"顶尖各科课外训练步步高"根据义务教育课程标准，配合各版本教材进行编写。丛书以课为训练单位，以单元为测试单位建构编写体系，符合教学规律，体现课改精神。丛书不仅注重帮助学生夯实基础知识、提高基本技能，还注重培养学生学习的自主性、探究性、合作性；不仅注重培养学生学会学习、学会反思、学会自我激励，还注重培养学生学习过程中情感、态度和价值观的形成。

为了使本丛书在理念上与最新教改理念、精神相吻合，我们在本套丛书的编写过程中，坚持"三参与"原则，即颇有造诣的课程研究专家参与，深谙当前基础教育课程改革的教研员参与和具有丰富教学实践经验的一线特、高级教师参与，从而使本丛书在质量上得到充分保证。

"顶尖各科课外训练步步高"按章（或单元）进行编写，每一章（或单元）设"学前热身"、"知识平台"、"方法指津"、"自我评估"、"探究学习"（或"信息冲浪"）、"拓展延伸"、"单元评估"等栏目。"学前热身"通过阅读与本章（或本单元）主要内容有关的一个故事、一则新闻报道或一幅图等，使学生自然而然地产生学习本章（或本单元）内容的兴趣，从而变过去的被动学习为"我要学"、"我想学"的主动学习，激发学生的自主性。"知识平台"以课程标准为基准，以相应版本的教材为落脚点，较详细地分析本章（或本单元）内容的重点、难点。"方法指津"通过对经典题目的解析和点拨，拓展学生的思路，提升发散思维能力，掌握科学的学习方法。"自我评估"在题目设计上，特别注重吸收全国各地出现的最新题型，密切联系生产、生活实际的有趣题目，同时注重知识的现代化，以激活学生已有的知识、经验和方法，加强探究性习题的训练。"自我评估"含"双基达标"和"能力提高"两个部分。这两部分题目有一定的梯度，既注重基础性，又强调自主性、参与性、实践性、探究性、合作性。"探究学习"（或"信息冲浪"）精选与本章（或本节）内容相关的资料，并从中引出一些生动、活泼、有趣的话题，既可以补充课本知识，又有目的地提出一些问题，引发学生思考；同时，还设置"相关链接"子栏目，为有条件且学有余力的学生另外提供一些信息的出处，满足学生课外学习的需要，增强学生学习的趣味性，扩大学生的知识面。"拓展延伸"对本章（或本单元）知识进行梳理、交融、拓展，通过对一些典型的探究型、开放型的题目进行解析和点拨，使学生对章内、学科内、学科间知识结构的关系得以把握和拓展。经过系统的训练后，通过单元评估与期末评估对所学内容进行评价与总结。由于不同学科及不同版本的教材各有特点，因此，上述栏目及其写法允许根据实际需要适当调整，灵活掌握。

"顶尖各科课外训练步步高"实现了引导学生从预习到课外阅读全程自主学习的编写理念。我们在栏目设置上创设了科学的整合模式，将"知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观"三维目标分层次地融入书中，激发学生的自主性，使学生的自主学习效果达到最优化，促进学生的全面发展。

在此，对丛书中选用作品的作者表示感谢，对一部分未署名的作品的作者表示歉意，并请与我们联系。由于编写时间仓促，其中难免还有不足之处，恳望读者不吝赐教，以便我们今后不断努力改进。

编　者

目 录

第二十一章　二次根式

学前热身

如图21-1，图①是面积为8的正方形，图②是面积为2的正方形．对于它们的边长a与b，同学们一定能不假思索地回答：$a=\sqrt{8}$，$b=\sqrt{2}$．在越来越多的数学问题中，我们会遇到像$\sqrt{8}$、$\sqrt{2}$这样的数与式，也就是我们即将学习的新一章的主角"二次根式"．

进一步观察图21-1①中的虚线，你能洞察两个边长a与b之间的倍分关系吗？

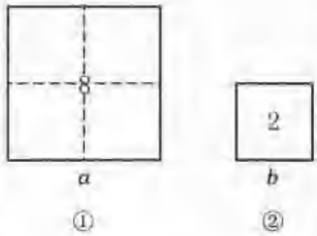

图 21-1

不难发现，$a=2b$，即$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$．

在数与形的结合中，我们轻易地将$\sqrt{8}$转化为$2\sqrt{2}$，从中你能体会二次根式化简的一般方法吗？你知道如何进行二次根式的各种运算吗？这些正是本章所要研究的主要内容．相信你们一定能胜任新一章二次根式的学习．

21.1　二次根式

学习导航

例 1　（§21.1）* 当x是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{-3x^2}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{x+1}}$；　(3) $\sqrt{x^2+2}$；　(4) $\frac{\sqrt{2-x}}{x}$．

分析　要使以上各式有意义，必须满足：①二次根号下的被开方数是非负数；②当式子含有分母时，分母不能为0．

解　(1) $-3x^2\geqslant0$，即$x^2\leqslant0$，得$x=0$．

∴　当$x=0$时，$\sqrt{-3x^2}$有意义．

(2) $\frac{1}{x+1}\geqslant0$，即$x+1>0$，得$x>-1$．

∴　当$x>-1$时，$\sqrt{\frac{1}{x+1}}$有意义．

(3) $x^2+2\geqslant0$，即$x^2\geqslant-2$，得x为任意实数．

∴　当x取任意实数时，$\sqrt{x^2+2}$都有意义．

(4) $\begin{cases}2-x\geqslant0,\\x\neq0.\end{cases}$得$\begin{cases}x\leqslant2,\\x\neq0.\end{cases}$

---

* 括号内的数字§21.1表示本例题要用第21章第1节的知识解答，以下类推．

∴ 当 $x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{\sqrt{2-x}}{x}$有意义.

例 2 （§21.1）(1) 计算：$\sqrt{2^{-2}}+\sqrt{(3-\pi)^2}-(-\sqrt{\pi})^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$；

(2) 边长为整数的正方形面积为 $56n$（n 为正整数），求 n 的最小值和正方形的最小边长.

分析 (1) 根据算术平方根的意义得出的两条性质：① $\sqrt{a^2}=|a|$；② $(\sqrt{a})^2=a$ 进行化简. 其中前者化简的关键是确定 a 的正负. 另外，此类计算还常常运用 $(ab)^2=a^2b^2$、$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a^2}{b^2}$这两个结论. (2) 面积为 $56n$ 的正方形的边长为 $\sqrt{56n}$，且 $\sqrt{56n}$是整数，又 $\sqrt{56n}=\sqrt{2^3\times 7n}=\sqrt{2^2\times 14n}$，所以正整数 n 必须含有 14 这个因数（为使 n 尽可能小，n 也只需含 14 这个因数），才能使 $56n=2^2\times 14^2=28^2$ 为平方数，由此确定 n，进而确定正方形的最小边长.

解 (1) $\sqrt{2^{-2}}+\sqrt{(3-\pi)^2}-(-\sqrt{\pi})^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$

$$=\sqrt{(2^{-1})^2}+(\pi-3)-\pi+\frac{(\sqrt{6})^2}{2^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\pi-3-\pi+\frac{3}{2}$$

$$=-1.$$

(2) ∵ 正方形的边长为整数，

∴ 面积 $56n=2^3\cdot 7n=2^2\cdot 14n$ 为整数，

∴ 最小整数 n 必须且只需含有 14 这个因数，即 $n=14$.

∴ 正方形的最小边长为 $\sqrt{56n}=\sqrt{2^2\cdot 14^2}=28$.

自我评估

双基达标

1. 下列各式中属于二次根式的是（　　）.

A. $\sqrt{-2}$　　B. $\sqrt[3]{8n}$　　C. $\sqrt{|a|}$　　D. $\sqrt{a}$

2. 如果$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$是二次根式，那么 a、b 应满足（　　）.

A. $a>0$，$b>0$　　B. a、b 同号　　C. $a\geqslant 0$，$b>0$　　D. $\dfrac{a}{b}\geqslant 0$

3. 下列各式中正确的是（　　）.

A. $\sqrt{a^2}=a$　　B. $\sqrt{a^2}=|a|$　　C. $\sqrt{(-a)^2}=a$　　D. $\sqrt{a^{-2}}=-a$

4. 下列计算错误的是（　　）.

A. 若 $(\sqrt{x})^2=0.4$，则 $x=0.4$　　B. $\sqrt{(3.14-\pi)^2}=\pi-3.14$

C. 若 $\sqrt{x^2}=2$，则 $x=2$　　D. $(-\sqrt{2})^2=-2\sqrt{2}$

5. 一个自然数的算术平方根是 m，则它的下一个自然数是（　　）.

A. $m+1$　　B. m^2+1　　C. m^2-1　　D. $\sqrt{m^2+1}$

6. 如果 $\sqrt[a^2+2a-1]{a+1}$ 是二次根式，那么 a 的值是（　　）.

A. -3 或 1　　B. -1 或 3　　C. -1　　D. 1

7. 若 $\sqrt{(a-5)^2}=a-5$，则 a 的取值范围是（　　）.

A. $a>5$　　B. $a<5$　　C. $a\geqslant 5$　　D. $a\leqslant 5$

8. 若 $m<0$，$n>0$，则 $\sqrt{m^2}+\sqrt{(-n)^2}$ 的值是（　　）.

A. $n-m$　　B. $m+n$　　C. $m-n$　　D. $-m-n$

9. 如图 21-2，从帐篷支撑竿 AB 的顶部 A 向地面拉一根绳子 AC 固定帐篷．若绳子的长度为 5.5 m，地面固定点 C 到支撑竿底部 B 的距离是 4.5 m，则帐篷支撑竿的高度是______m.

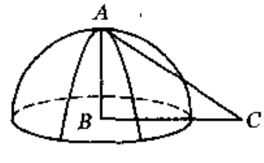

图 21-2

10. 若 $\sqrt{3x-1}+|1+y|=0$，则 $x^y=$______.

11. 代数式 $-\sqrt{m+n}$ 的最大值是______，此时，m 与 n 的关系是______________.

12. 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，则 $\sqrt{(a-b-c)^2}+|a-b+c|=$______.

13. 当 x 取何值时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$；　　(2) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$.

14. 设 $a+\dfrac{1}{a}=\sqrt{5}$，求 $a-\dfrac{1}{a}$ 的值.

15. 在实数范围内分解因式.

(1) x^3-5x；　　(2) y^4-4y^2+4.

16. 小明房间的面积为 10.8 m²，房间地面恰由 120 块相同的正方形地砖铺成，求每块地砖的边长.

17. 一个等腰三角形的腰长与底边长之比为 3∶4，底边上的高为 $2\sqrt{5}$，求这个等腰三角形的周长和面积.

18. 已知△ABC 的三边长 x、y、z，满足 x 是 7 的平方根，且 $|y-2z+2|$ 与 $\sqrt{3-z}$ 互为相反数，试判断△ABC 的形状.

能力提高

19. 比较大小：$\sqrt{3-x}$______ $(x-4)^3$.

20. 若化简 $|1-x|-\sqrt{x^2-8x+16}$ 的结果为 $2x-5$，则 x 的取值范围是__________.

21. (1) $\sqrt{216n}$ 是整数，那么正整数 n 的最小值为______；

(2) $\sqrt{12-n}$ 是整数，那么负整数 n 的最大值为______.

22. 已知实数 a 满足 $|2\,007-a|+\sqrt{a-2\,008}=a$，求 $a-2\,007^2$.

23. 将一个对角线长为 $2\sqrt{2}$ cm 的正方形绕着它的一条对称轴旋转，求所得旋转体的体积.

24. 设等式 $\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立，其中 a、x、y 互不相等，求 $\frac{3x^2+xy-y}{x^2-xy+y^2}$ 的值.

21.2　二次根式的乘除

学习导航

例 1　（§21.2）把下列二次根式化成最简二次根式.

(1) $\sqrt{3.375}$；　　(2) $\sqrt{4x^4y^3+12x^6y^2}$；　　(3) $\sqrt{\frac{z^2}{xy^2}}$；　　(4) $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}$.

分析　化二次根式为最简二次根式的一般方法：

1. 如果被开方数是整数或整式，先将它分解因数或因式，然后利用 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 把开得尽方的因数或因式开出来.

2. 如果被开方数是分数（包括小数）或分式，可以先利用 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 把它写成分数的形式，如果分母开得尽方，就把它开出来，化去分母中的根号；如果分母开不尽方，就利用

$(\sqrt{b})^2=b$ 化去分母中的根号；还可以将$\sqrt{\frac{a}{b}}$中开不尽方的分母 b 直接构造成开得尽方的因数或因式，再开方.

解 (1) 方法1：$\sqrt{3.375}=\sqrt{\frac{27}{8}}=\frac{\sqrt{3^2\times3}}{\sqrt{2^2\times2}}=\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

方法2：$\sqrt{3.375}=\sqrt{\frac{27}{8}}=\sqrt{\frac{3^2\times3\times2}{8\times2}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

(2) $\sqrt{4x^4y^3+12x^6y^2}=\sqrt{4x^4y^2(y+3x^2)}=\sqrt{(2x^2y)^2}\cdot\sqrt{y+3x^2}=2x^2y\sqrt{3x^2+y}$.

(3) $\sqrt{\frac{z^2}{xy^2}}=\sqrt{\frac{z^2\cdot x}{xy^2\cdot x}}=\sqrt{\frac{z^2\cdot x}{x^2y^2}}=\frac{z\sqrt{x}}{xy}$.

(4) $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}=\sqrt{\frac{(m-n)(m+n)}{(m+n)^2}}=\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m+n}$.

例2 （§21.2）计算：

(1) $9\sqrt{45}\div3\sqrt{\frac{1}{5}}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$；　(2) $3\sqrt{\frac{12}{x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{xy}}\div\left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{18}{xy^3}}\right)$.

分析 (1)(2)同属于二次根式的乘除运算，可类比单项式的乘除法进行计算，根号外的因式看作“系数”，“系数”与“系数”相乘除，被开方数与被开方数相乘除，再把所得结果相乘，化为最简形式.

解 (1) $9\sqrt{45}\div3\sqrt{\frac{1}{5}}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$

$=\left(9\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\right)\sqrt{45\times5\times\frac{8}{3}}$

$=\frac{9}{2}\sqrt{15\times5\times8}$

$=\frac{9}{2}\sqrt{3\times5^2\times2^2\times2}$

$=\frac{9}{2}\times5\times2\sqrt{6}$

$=45\sqrt{6}$.

(2) $3\sqrt{\frac{12}{x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{xy}}\div\left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{18}{xy^3}}\right)$

$=\left(-3\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\right)\sqrt{\frac{12}{x}\cdot\frac{3}{xy}\cdot\frac{xy^3}{18}}$

$=-2\sqrt{\frac{2y^2}{x}}$

$=-2\sqrt{\frac{2y^2\cdot x}{x^2}}$

$=-2\cdot\frac{y}{x}\sqrt{2x}$

$=-\frac{2y}{x}\sqrt{2x}$.

自我评估

双基达标

1. 若 $ab<0$，则 $\sqrt{-ab^2}$ 化简得（　　）.

A. $b\sqrt{-a}$　　B. $-b\sqrt{-a}$　　C. $b\sqrt{a}$　　D. $-b\sqrt{a}$

2. 下列二次根式中的最简二次根式是（　　）.

A. $\sqrt{0.1}$　　B. $\frac{1}{4}\sqrt{63}$　　C. $\sqrt{101}$　　D. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

3. 下列等式成立的是（　　）.

A. $\sqrt{25a^2b}=5a\sqrt{b}$　　B. $-b\sqrt{-\frac{1}{b}}=-\sqrt{-b}$

C. $(x-1)\sqrt{\frac{1}{1-x}}=-\sqrt{1-x}$　　D. $\sqrt{a^2b^2-4a^2}=\pm a\sqrt{b^2-4}$

4. 等式 $\sqrt{(x+1)(x-5)}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-5}$ 成立的 x 的取值范围是（　　）.

A. $x\geqslant5$　　B. $x\leqslant-1$　　C. $-1\leqslant x\leqslant5$　　D. $x\geqslant-1$

5. 下列说法错误的是（　　）.

A. 化去 $\sqrt{2\frac{5}{11}}$ 根号内的分母，结果是 $\frac{3}{11}\sqrt{33}$

B. $\sqrt{2}$ 是方程 $2(x+1)=\sqrt{2}(x+2)$ 的根

C. 若 $a=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$b=\sqrt{\frac{1}{8}}$，则 $a=b$

D. 若二次根式 $\frac{\sqrt{(a-2)^2}}{2-a}$ 的化简结果是 1，则 $a<0$

6. 化简：

(1) $\sqrt{40}$；　(2) $\sqrt{(-16)\times(-81)}$；　(3) $\sqrt{12^2-4^2}$；　(4) $\sqrt{\frac{1.5a}{b^2}}$.

7. 计算：

(1) $\sqrt{20}\times\sqrt{15}\times\sqrt{48}$；　(2) $\sqrt{8}\div2\sqrt{6}\times\sqrt{12}$；

(3) $\sqrt{1\frac{2}{3}}\div\sqrt{2\frac{1}{3}}\times\sqrt{1\frac{2}{5}}$；　　(4) $\sqrt{\frac{8b}{3a}}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{24a^3}}$.

8. 已知$\sqrt{2}=a$，$\sqrt{10}=b$，用含 a、b 的代数式表示下列各数：(1) 12.5；(2) $\sqrt{0.016}$.

9. 把下列各式中根号外的因式移到根号内.

(1) $10\sqrt{0.12}$；　　(2) $-\frac{2}{3}\sqrt{18x}$；

(3) $x\sqrt{-\frac{1}{x}}$；　　(4) $mn\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}}$　(m、n 同号).

10. 试比较 $2\sqrt{3}$与 $3\sqrt{2}$的大小.

11. 若菱形的两条对角线长分别为 $2\sqrt{45}$和 $4\sqrt{20}$，求它的周长和面积.

12. 若正方形的面积是$\frac{1}{3}$，求它的对角线长与周长.

13. 生活经验表明：靠墙摆放梯子时，若梯子底端离墙的距离约为梯子长度的$\frac{1}{3}$时，梯子比较稳定. 现有长度为 a m 的梯子，当梯子稳定摆放时，它的顶端能达到的最大高度为多少？若梯子的长度为 9 m 时，从安全角度出发，工作人员能用它去检修距离地面 8.4 m 高的扩音器吗？

14. 如图 21-3，已知图中每个小方格的边长为 1，求点 C 到 AB 所在直线的距离.

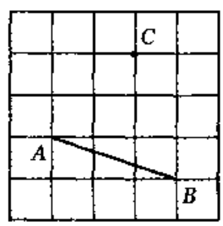

图 21-3

能力提高

15. 化简：$\sqrt{\dfrac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 6+\cdots+n\cdot 2n\cdot 3n}{1\cdot 5\cdot 10+2\cdot 10\cdot 20+\cdots+n\cdot 5n\cdot 10n}}$.

16. $\sqrt{11-2}=3$，$\sqrt{1111-22}=33$，$\sqrt{111111-222}=333$，…，由此猜想：对于一切自然数 n，都有 $\sqrt{\underbrace{11\cdots11}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}}=\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$，对不对？请证明你的结论.

21.3 二次根式的加减

学习导航

例 1 （§21.3）计算：

（1）$\sqrt{32}-2\sqrt{0.5}+\frac{1}{3}\sqrt{27}$；（2）$\frac{\sqrt{50}+\sqrt{32}}{\sqrt{8}}-5$；

（3）$(2\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

分析 （1）关于二次根式加减运算，要先把各个二次根式化成最简二次根式，再把被开方数相同的二次根式进行合并，合并方法：把根号外的因数看作“系数”相加减，根式不变；（2）可以先化简再计算，也可以运用分配律简便运算；（3）运用完全平方和平方差公式，注意去括号法则的正确运用.

解 （1）$\sqrt{32}-2\sqrt{0.5}+\frac{1}{3}\sqrt{27}$

$=4\sqrt{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}$

$=(4-1)\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$；

（2）$\frac{\sqrt{50}+\sqrt{32}}{\sqrt{8}}-5$

$=\sqrt{\frac{50}{8}}+\sqrt{\frac{32}{8}}-5$

$=\frac{5}{2}+2-5$

$=-\frac{1}{2}$；

（3）$(2\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=[(2\sqrt{3})^2-2\times2\sqrt{3}\times1+1^2]-[(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2]$

$=(13-4\sqrt{3})-(-1)$

$=14-4\sqrt{3}$.

评注 被开方数不相同的二次根式不能合并，所以 $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 已是最后结果；在合并二次根式时，类比合并同类项，不要出现 $4\sqrt{2}-\sqrt{2}=4$ 这样的错误.

例 2 （§23.2）（1）当 $x=\frac{1}{4}$，$y=9$ 时，求代数式 $\sqrt{x^3-2x^2+x}-\sqrt{9y-6y^2+y^3}$ 的值；

(2) 已知 $x+y=5$，$xy=3$，求$\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}$的值.

分析 一般先化简，再代入求值；在化简 $\sqrt{a^2}$时，要判断 a 的正负，否则应先保留绝对值符号.

解 (1) $\sqrt{x^3-2x^2+x}-\sqrt{9y-6y^2+y^3}$

$=\sqrt{x(x-1)^2}-\sqrt{y(3-y)^2}$

$=|x-1|\sqrt{x}-|3-y|\sqrt{y}$.

当 $x=\frac{1}{4}$，$y=9$ 时，

$\sqrt{x^3-2x^2+x}-\sqrt{9y-6y^2+y^3}$

$=\left|\frac{1}{4}-1\right|\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}-|3-9|\cdot\sqrt{9}$

$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}-3\times3$

$=\frac{3}{8}-9$

$=-8\frac{5}{8}$；

(2) ∵ $xy=3$，$x+y=5$，

∴ $x>0$ 且 $y>0$.

$\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}$

$=\frac{1}{x}\sqrt{xy}+\frac{1}{y}\sqrt{xy}$

$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\sqrt{xy}$

$=\frac{x+y}{xy}\sqrt{xy}$.

当 $x+y=5$，$xy=3$ 时，

$\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}$

$=\frac{5}{3}\sqrt{3}$.

自我评估

双基达标

1. 判断正误：

(1) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$； ( )

(2) $a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=a+b\sqrt{x}$； ( )

(3) $2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$； ( )

(4) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{24}}{4}=\sqrt{3}-\sqrt{6}$； ( )

(5) $\sqrt{2\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$； ( )

(6) $\sqrt{1^2}+\sqrt{2^2}=\sqrt{3^2}$. ( )

2. 在根式①$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$、②$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$、③$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$、④$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$中，______是方程 $x^2+x-1=0$ 的解.（填序号）

3. 计算：

(1) $2\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$；

(2) $(\sqrt{24}-2\sqrt{50})\div(-3\sqrt{2})$；

(3) $(5+\sqrt{6})\cdot(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$；　　(4) $(2-\sqrt{5})^2\cdot(2+\sqrt{5})^2$.

4. 用简便方法计算：

(1) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$；　　(2) $(x+y+2\sqrt{xy})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$.

5. 化简：

(1) $\frac{2}{a}\sqrt{ab^2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^2b}\right)\div 3\sqrt{\frac{a}{b}}$；　　(2) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

6. 已知$\sqrt{2}\approx1.414$，求$\frac{1}{2}\sqrt{12.5}-5\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{1\frac{1}{8}}$的近似值（精确到0.01）.

7. 设$\sqrt{3}+1$的整数部分是a，小数部分是b，求a^2+b^2.