

玉溪市教育科研论丛(八)

中学数学

解题探索

Zhongxue shuxue jieti tansuo

张在明 编著

云南出版集团公司
晨光出版社

中学数学 角平分线探索

张在明 编著

云南出版集团公司
晨光出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学数学解题探索/张在明编著. —昆明:晨光出版社,
2006. 9

ISBN 7-5414-2711-X

I. 中... II. 张... III. 数学课—中学—解题
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 103082 号

责任编辑:何 明

责任校对:缪 伟

封面设计:熊惠明

玉溪市教育科研论丛(八)

中学数学解题探索

张在明 编著

云南出版集团公司 出版
晨 光 出 版 社

(昆明市环城西路 609 号)

E-mail: cgcb@public.km.yn.cn

邮政编码: 650034

发行部电话: 0871-4186745

云南国防印刷厂印装

开本: 850 × 1168 1/32 印张: 10.25 字数: 250 000

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-5414-2711-X/G · 2410 定价: 13.00 元

凡出现印装质量问题请与承印厂联系调换



作者简介

张在明，1936年出生于四川省郫县花园镇，该镇与刘禹锡在《陋室铭》中写的“西蜀子云亭”仅有五公里不到的距离。1955年考入云南大学数学系，1959年分配到云南通海二中教书，先后二十年在通海二中、通海一中教过俄语、英语、数学。1979年调入玉溪师专（今玉溪师范学院），主要从事数学分析课的教学，职称为教授，1996年退休。

在长期的数学教育工作中，教学科研并重，着力探索初等数学和高等数学的解题方法和规律，重视数学思想在数学中的作用和指导意义。自1980年至今，近一百五十篇论文在《数学通报》、《数学教学》、《湖南数学通讯》、《中学数学教学参考》等公开刊物和内部刊物上发表，还有几道征解题刊登在美国的《美国数学月刊》、《大学数学杂志》和《数学教师》等杂志上。指导过学生撰写数学论文多篇，有的获得省级奖励。此外，偶尔撰写点散文、小品和考证的文章，约二十篇。

退休后笔耕不止，尤其是在2002年染上恶疾后，仍在化疗之余撰写文章，继续解题探索。曾任玉溪市第二届、第三届政协委员，获得过“玉溪地区有突出贡献专业技术人才”称号。

玉溪市教育科研论丛编委会

编委主任	李永云		
编委副主任	吴永林	杨应成	
编委	(按姓氏笔画排)		
	刘兰芝	刘永芬	刘燕崇
	李正民	陆 晖	沈晓云
	杨争鸣	张在明	林 英
	彭慧勇		

序 言

一本凝聚了张在明老师四十多年心血与汗水的《中学数学解题探索》出版了。它的出版标志着张老师对数学教育事业的奉献精神将得以发扬光大，激励着他的学生及同仁们为玉溪市的教育事业奉献青春和力量。

张老师从中学教师到大学教授的整个从教经历中，从未间断过数学教学研究。他不仅自己做，还带动同事和学生做，常把他发现的数学问题、研究的成果和同事、学生交流讨论，引导许多同事和学生进入数学教学研究的行列，他们也成为了玉溪教育战线的骨干力量。四十多年来，仅张老师个人撰写发表的论文就有120多篇，他还指导同事及学生撰写了多篇数学教学研究论文。张老师的研究工作紧密联系教学实际，在教学中，注重呈现教学问题的发现与解决方法的探索过程，注重学生数学思维能力的培养，以揭示数学的内在美，激发学生兴趣。他的教学理念与现在所倡导的教学理念不谋而合，使学生受益匪浅。张老师对待工作的热情超过了一般人，他除了搞好课堂教学，还积极组织学生开展第二课堂活动，把课堂上提出的一些问题继续组织学生讨论研究，使许多同学在专科学习阶段就得到了严格的科研能力训练，为他们将来在教学工作中积极开展科研工作奠定了

较好的基础。事实证明，他们中的许多人很快就从工作中脱颖而出，成为各级中学的教学科研骨干。

当今时代是一个信息爆炸的时代，人们要学习的知识，也许耗尽毕生精力学到的也只能是沧海一粟。因此，只有坚持不断地学习，掌握索取知识的方法，不断提高学习新知识的能力，才能紧跟时代的步伐，走向成功的人生。在这方面，张老师为我们做出了榜样。从张老师的科研工作历程就可看出，张老师在中学任教时就开始了他的研究工作，到现在退休了仍在坚持，他的研究领域从初等数学到高等数学，从古典数学到近代数学，交流的对象从学生到学者，从国内到国外。他对数学的酷爱与执着感染了他交流讨论的人，他对数学问题的敏锐的洞察力和解决问题的探索精神，使许多学生和学者发自内心的敬佩他。尤其是在2002年他患了癌症后，在病床上还在研究数学问题，这验证了鲁迅先生的一句名言：“倘能生存，我当然仍要学习。”正因为有了这样的精神，他才战胜了病魔，转危为安。当然这离不开师母及其家人对张老师无微不至的照料和精神上的安慰。

张老师的《中学数学解题探索》系统地再现了他的科研历程及成果，系统研读将会使我们获得一双睿智的眼睛，丰富我们观察世界的方法；使我们获得一个睿智的头脑，帮助我们进行理性的思考；使我们获得了一些学习方法，让我们在知识的海洋里自由遨游；学到了一些研究模式，让我们在探索世界的奥妙中去不断获取新知。更重要的是获得一种精神，利用这种精神可以去解决我们所面对的各种问题。

我作为张老师的学生、玉溪师院数学系主任，能为张老师的《中学数学解题探索》写序，是一件幸事，是张老师对我工作的信任和支持。出版此书，是张老师多年以来的心愿，今天能够得到出版，市教科所和李永云所长做了多方努力，晨光出版社给予大力支持和帮助。在此，对为出版此书给予帮助和支持的李永云所长、周文林社长、朱靖主任、市长助理董文献和刘兰芝老师以及编辑周玥一同表示感谢。

杨晨曦

2006年6月



目 录

第一篇 初等数学解题探索	(1)
1 数学好玩——虚拟一节竞赛辅导课	(1)
2 一道巧填数字题的六种填法	(7)
3 巧解一道根式题	(10)
4 一道根式题的解法再议	(13)
5 不畏浮云遮望眼	(15)
6 一个求极值的例题	(17)
7 从一则轶闻说起	(19)
8 韦达定理的三种证法	(26)
9 何必舍近求远, 弃易用难——简评两道题的某种 解法	(28)
10 第17届“五羊杯”初中数学赛题别解	(35)
11 两道竞赛题 一个老等式	(39)
12 一道求值题的别解和引申	(43)
13 试解一道国际征解题	(50)
14 几个代数恒等式的代数证法	(52)
15 一题多解再议	(58)
16 再解一道二次函数题	(67)
17 一个三角形区域的绝对值方程	(71)
18 一道数学题解法的再探索	(73)
19 关于数学归纳法的一个例题、命题和定理	(78)

20	名题新证	(84)
21	利用两个函数的图象解题十例	(87)
22	列方程解三角函数求值题	(97)
23	三角恒等变形的常用方法补遗	(101)
24	关于三道三角题的解法	(107)
25	再谈一道三角题的解法	(111)
26	一道条件三角等式题的讨论	(115)
27	化归：变椭圆为圆	(118)
28	也谈克服思维障碍的对策	(122)
29	容易弄错的 $y = \frac{\sin x - b}{\cos x - a}$ 的图象	(130)
30	解题分析要恰如其分	(135)
31	2000 年一道高考题别解	(142)
32	十年一梦仍未觉	(145)
33	猎狗问题的冯·诺依曼解法	(151)
34	等差数列：一道百年经典题的推广	(154)
35	用图象法解高考中的直线问题	(160)
36	解题一得：转换结论 探索更好的解法	(171)
37	探究一道高考题引出的图形美	(179)
38	中学数学里的拆项法	(187)
39	高考数学试题别解	(212)
第二篇 不等式的解题研究与拓展		(223)
40	Pedoe 不等式和另一个涉及两个三角形的不等式	(223)
41	涉及几个三角形的两个不等式	(226)
42	An Inequality for Two Triangles	(229)

43	从一个不等式谈起	(231)
44	一个条件不等式的三角证法	(236)
45	用待定系数法推证两个不等式	(240)
46	一个不等式的再证和推广	(243)
47	对《关于等差数列的一组不等式》一文中主要 结果的意见	(246)
48	关于一个不等式的证明	(249)
49	关于幂平均的一类不等式	(255)
第三篇 行列式在初等数学解题中的应用		(259)
50	等差数列和等比数列的共同性质	(259)
51	Fibonacci 数列的两个性质及其推广	(263)
52	用行列式讨论 Fibonacci 数列的几个性质	(266)
53	关于杨辉三角中的几个行列式	(272)
54	A "Determinant" for Pascal's Triangle	(281)
55	几个涉及指数函数的不等式	(284)
56	涉及范德蒙行列式的两个数学问题	(287)
57	范德蒙行列式两题	(292)
58	一道竞赛题的推广	(296)
第四篇 幻方初探		(307)
59	三阶幻方的两个新性质	(307)
60	一类奇数阶幻方的构造新法	(312)
61	四阶幻方的一新形式	(315)

第一篇 初等数学解题探索

1 数学好玩

——虚拟一节竞赛辅导课

张老师：同学们，你们好！今天这节辅导课的内容有两个，一个是谈谈“数学好玩”；再一个就是一块来猜几道竞赛题。我先问问大家：数学好玩吗？

学生：不好玩。

张老师：哪些事好玩？

学生：打游戏机好玩。看动画片、下跳棋、猜谜语、脑筋急转弯都好玩。

学生：幼儿园也好玩！幼儿园不考试。

张老师：有意思。我再举自己两个亲身体会：

读小学五年级时，表哥教我下象棋，每次都要赢我的“老王推磨”。还不让我认输，要我的老王“推磨”不止。从此我对下象棋没有了兴趣。

另外，我小学时体弱多病，妈妈叫我多锻炼身体，开始玩小皮球，渐渐地喜欢起来，中学后就玩篮球，因为我是个左撇子，有一定的“优势”，越玩越爱玩。近二十多年来喜欢看NBA篮球赛，可以说是个“铁杆球迷”。看到飞人乔丹伸出舌头跃身投篮的雄姿，乐得我返老还

童似的。看 NBA，还可以学英语哩，什么 Chicago Bulls, Los Angeles Lakers, 什么 “I love this game”、“Just do it” 等等。

张老师：再告诉你们一个小秘密：飞人乔丹在大学里还是读数学系哩！

你们知道“数学好玩”是谁说的吗？

学生：知道，就是你张老师说的。

张老师：不，是大数学家陈省身先生说的！

陈省身先生是国际有名的数学大师，已经九十多岁了，2002 年国际数学家大会在北京开幕时，陈先生还坐着轮椅出席会议，先生讲话时，江泽民主席亲自上前帮他移动话筒。（参见 [1]）

有没有同学知道出席大会的名人？

学生：有“美丽心灵”（纳什），还有偏着脑袋坐在轮椅上的那个叫什么什么“金”（霍金）的。

还有中国的吴文俊。（教师补充：听说他八十岁了，还敢坐过山车！）

张老师：有没有同学记得大会的会标，请上来画一画。（见图 1-1）

张老师：大会是哪天召开的？

学生：2002 年国际数学家大会于 8 月 20 日在中国北京召开。

张老师：答对了！祝你将来也能参加。

张老师：再说两句。就在大会召开的第三天，全国近千名数学爱好者参加

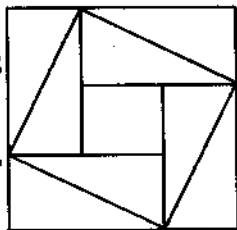


图 1-1

了在北京举行的少年数学论坛. 陈省身先生的“数学好玩”就是给这次论坛的题词. (参见 [2])

从刚才同学们举的好玩事例可以看出, 只要我们对一件事有兴趣, 有好奇心, 有需要, 慢慢就喜欢、热爱起来, 越做越热爱, 就会觉得好玩起来! 有位大科学家说过一句名言: 兴趣是最好的老师!

学生: 张老师, 你也是我们最好的老师!

张老师: 不敢当. 等一会我给你们介绍另一位张老师. 他的确是我们最好的数学老师之一.

张老师: 好了, 今天我们的第二个任务是一块来猜题, 猜几个竞赛题的答案. 题目是从一篇文章 (参见 [3]) 里选来的, 里面有 8 道例题、7 道强化训练题. 我们的任务是猜其中的 4 个例题的答案, 那篇文章等下课后每人发一份给你们参考参考、研究研究!

例 1 解方程 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$.

例 2 解方程 $(x-4)^4 + x^4 = 626$.

张老师: 同学们, 猜出这两道题的答案了吗? 说说看.

学生踊跃举手发言: 例 1 的 $x=2$, 例 2 的 $x=5$.

张老师: 太妙了! 能说说怎么猜着的吗?

学生: 例 1 里两个根式内的被开方数恰好是 $(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 2 + 2 = 4$!

例 2 里的 $626 = 1 + 625 = 1^4 + 5^4$!

张老师: 很好! 这位同学知道 5^2 、 5^3 、 5^4 等于多少, 所以他一下就猜中了! 至于例 1, 那位同学抓住了两被开方数

的和，对 $(\sqrt{\quad})^*$ “视而不见”，眼光锐利，也不简单！

同学们再猜两道题如何？

例3 解方程 $(6x+7)^2(3x+4)(3x+3)=18$.

例4 解方程 $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}}$.

张老师：先说例3，这次不仅要说出猜的答案，还请同学在黑板上写出猜想的过程，好吗？

学生：

$$(6x+7)^2(3x+4)(3x+3) = 2 \times 9 = 1 \times 2 \times 3^2$$

设 $3x+3=1$ 得 $x = -\frac{2}{3}$ ，而且 $3 \times (-\frac{2}{3}) + 4$

$= 2$ ， $6 \times (-\frac{2}{3}) + 7 = 3$ 。所以方程的解是 $x = -\frac{2}{3}$ 。

张老师：Very good！猜得好！最后一题，谁来讲讲？

学生： $x=2$ ，因为 $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}$
 $= \sqrt{2 + \sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2!$

张老师：太精彩了！同学们，你们真行，4道题都给猜中了！例4我想说说我的想法。根据刚才这位同学的式子，我们看：

$$\begin{aligned} 2_{\Delta} &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2_{\Delta}}}}} \Rightarrow 2_{\Delta} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2_{\Delta}}}} \\ \Rightarrow 2_{\Delta} &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2_{\Delta}}} = \sqrt{2 + 2_{\Delta}} \end{aligned}$$

也就是说 $2_{\Delta} = \sqrt{2 + 2_{\Delta}}!$

所以原方程可以看成从 $x_{\Delta} = \sqrt{2 + x_{\Delta}}$ 变出来的。怎么变呢，

你们看：

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2 + x_{\Delta}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + x_{\Delta}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x_{\Delta}}}} \\&= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x_{\Delta}}}}} = \dots\dots \\&= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots\dots \sqrt{2 + x_{\Delta}}}}\end{aligned}$$

所以，那么多重根号是故意拿来迷惑你们的。上式说明，不管根式有多少，其实只要解方程 $x = \sqrt{2+x}$ 便行了。而 $x = \sqrt{x+2}$ 恐怕没有哪位猜不出它的根吧！

要是我们把方程 $x = \sqrt{2+x}$ 写成函数的形式，也就是，如果设 $f(x) = \sqrt{2+x}$ ，便成为 $x = f(x)$ 。 (1)

我们的例4可以写为

$$x = f(x) = f(f(x)) = f(f(f(x))) = f(f(f(f(x)))) \quad (2)$$

这样重重叠叠的样子又麻烦又不美观，数学家用下面的符号表示成

$$f(x) = f^1(x), f(f(x)) = f^2(x) \dots\dots, f^4(x), \dots\dots f^n(x). \text{ 称 } f^n(x) \text{ 为函数 } f(x) \text{ 的 } n \text{ 次迭代.}$$

至于 $x = f(x)$ ，也有个名堂，满足 $x = f(x)$ 的 x 叫做 $f(x)$ 的不动点！

不动点的玩意可多哩，平平凡凡，深深奥奥，你们都碰得到。刚才我不是说要给同学们介绍一位张老师吗？这位张老师就是张景中院士。他最近出了三本书，很受大家的欢迎。其中一本叫《数学家的眼光》，专门有一段讲不动点，有趣，好玩！大家可找来读一读。

张老师：时间不多了，你们觉得这节课怎样？

学生：老师，我们有点“上当受骗”了！你让我们尝到了甜头，数学真的有点好玩！

张老师：能不能给这节课亮亮分？

学生：9，8.888， π^2 ， $x = \sqrt{n^2 + n + x}$ ， 0.618×10 ， ∞ ，……

张老师：好极了！去掉一个最高分 ∞ ，去掉一个最低分 $x = \sqrt{n^2 + n + x}$ ……不，我还是要 0.618×10 算了！

张老师：下课！

（这时突然有位同学大声叫起来）

学生：张老师，例1的 x 还可以等于-2！例2的 x 还可以等于-1！

张老师：同学们都听见了吗？好极了！你们回去看看我发给你们的文章，再好好想想！

参考资料

- [1] 张奠宙. 国际数学家大会的启示. 数学教学, 2002 (5)
- [2] 原春琳. 数学美丽又有趣. 中国青年报, 2002年8月23日
- [3] 吴保印. 一些特殊代数方程的解法. 中学数学教学参考, 2002 (10)
- [4] 张景中. 数学家的眼光. 第1版. 北京: 中国少年儿童出版社, 2002
- （另有两本《帮你学数学》及《新概念几何》共三册组成《院士数学讲座专辑》，乃该出版社所编中国科普名家名作系列之一）
- [5] 张奠宙. 几何风范·陈省身（二十世纪华人名人小传记丛书）. 济南: 山东画报出版社