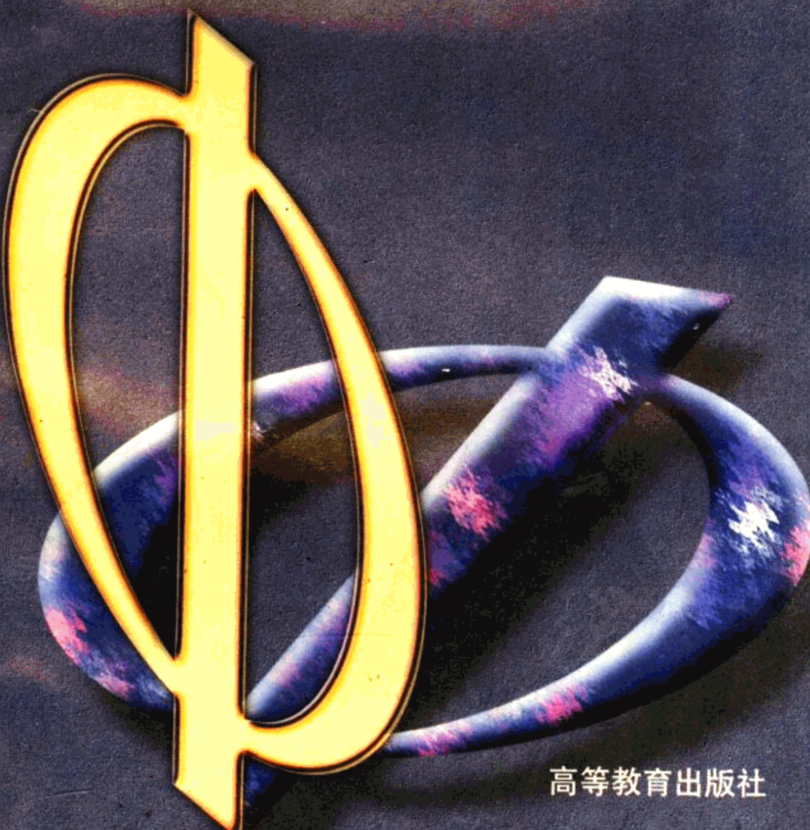
国家教委中等专业学校规划教材

工科类专业通用

数学第四册
教学参考书

上海市中专数学教材编写组 编



高等教育出版社

国家教委中等专业学校规划教材

工科专业通用

数学第四册

教学参考书

上海市中专数学教材编写组　编

高等教育出版社

（京）112 号

内 容 提 要

本教学参考书是以原教育部1983年审定的《中等专业学校数学教学大纲(工科专业通用)》为依据，为配合中专数学(工科类)的教学而编写的，与工科中专数学教材编写组编、上海市中专数学教材编写组修订的《数学》相应地分四册出版。主要内容包括教材各章的目的和要求、教材内容说明、重点和难点、教学建议、参考教案、测验参考题和部分习题的提示或解答等。

本书可供工科类中专数学教师参考。

图书在版编目(C I P)数据

数学第四册教学参考书/上海市中专数学教材编写组编．北京：高等教育出版社，1992.2（1996 重印）
ISBN 7-04-003630-4

Ⅰ．数…　Ⅱ．上…　Ⅲ．数学-专业学校-教学参考资料
Ⅳ．01-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 00454 号

*

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
江苏海安印刷厂印装

*

开本 787×1092　1/32　印张 9.875　字数 202 000
1992 年 2 月第 1 版　　1997 年 7 月第 6 次印刷
印数 17 876—21 344
定价　8.00 元

编者的话

本教学参考书是根据1983年原教育部审定的《中等专业学校数学教学大纲(工科专业通用)》和工科中专数学教材编写组编、上海市中专数学教材编写组修订的《数学》第一、二、三、四册编写的。

本教学参考书分四册出版。主要内容包括上述教材各章的目的和要求、教材内容说明、重点和难点、教学时数分配、教学建议、参考教案、测验参考题以及部分习题的提示或解答等。

本教学参考书是受国家教育委员会委托，由上海市教育局组织的工科中专数学教材编写组集体编写的。参加编写的有上海机械专科学校任必、上海市纺织工业专科学校秦柏前、上海市航空工业学校张又昌、上海市公用事业学校陈荣基、上海港湾学校袁时中等同志。第一、二、三册由任必同志和秦柏前同志担任主编，第四册由张又昌同志和陈荣基同志担任主编，全书由任必、秦柏前统稿。

本书在编写过程中，曾请上海市中专数学协作组的同志进行审阅，他们对初稿提出了许多宝贵意见，在此一并致谢。

本书可供招收初中毕业生的工科类中专数学教学参考。第三、四册也可供招收高中毕业生的工科类中专数学教学参考。

本书由于编者水平所限，难免有缺点和错误，殷切希望使用本书的学校和教师提出批评指正。

上海市中专数学教材编写组

1990年11月

目　录

第二十一章　级数……………………………………………1
第二十二章　行列式、矩阵与线性方程组………… 73
第二十三章　拉普拉斯变换…………………………144
第二十四章　概率初步………………………………183
第二十五章　数理统计初步…………………………262

第二十一章　级　　数

一　目的要求

1. 理解无穷级数及其收敛、发散的概念；知道绝对收敛与条件收敛的概念；会使用正项级数的比较审敛法；掌握正项级数的比值审敛法和交错级数的审敛法。

2. 理解幂级数的有关概念；掌握幂级数收敛半径的求法，以及幂级数的运算法则（加法，数与幂级数相乘，逐项求导数与逐项求积分）；会将简单函数展开为幂级数，会应用幂级数作近似计算及解较简单的线性微分方程。

3. 了解三角级数及三角函数系正交性的概念；掌握周期函数的傅里叶级数的系数计算公式；了解傅里叶级数的收敛定理；掌握奇、偶周期函数的傅里叶级数的特征；会利用周期延拓的方法求在一些有限区间上的函数的傅里叶级数。

二　教材说明

本章内容是在学生掌握了微积分知识的基础上，为适应某些专业（特别是电专业）的需要而编写的。

本章教材共分九节。

第一节是常数项级数。教材首先通过用圆的内接正多边形求圆面积的实例引出了无穷级数的概念，给出了函数项级

数与常数项级数的定义。其次，给出了常数项级数的收敛与发散的概念，说明了无穷级数的三个基本性质。最后，证明了级数收敛的必要条件(定理)，并通过例子说明了 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 只是级数收敛的必要条件，并不是充分条件。

第二节是常数项级数的审敛法。教材首先介绍了正项级数及其比较审敛法，并且着重对 p-级数的敛散性作了讨论。在此基础上，教材还介绍了正项级数的比值审敛法。其次，教材介绍了交错级数及其审敛法，并在数轴上对此审敛法的正确性作了考察。最后，讨论了任意项级数的敛散性，给出了任意项级数的绝对收敛和条件收敛的概念。

第三节是幂级数。教材首先提出了幂级数及其收敛域、收区间、收敛半径等概念，并举例说明了幂级数的收敛半径、收敛区间的求法。其次，教材介绍了幂级数在其收敛区间内的和函数的概念，并且提出了幂级数的运算法则。

第四节是函数的幂级数展开。教材通过分析提出了函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数，以及函数能够展开为麦克劳林级数的条件，并通过例子介绍将函数展开为麦克劳林级数的直接方法和间接方法。

第五节是幂级数的应用。本节通过例子介绍了幂级数在两个方面的应用：一是幂级数在近似计算中的应用；二是微分方程的幂级数解法。

第六节是傅里叶级数。教材首先介绍了三角级数和三角函数系的正交性的概念。然后，在此基础上讨论了将周期为 2π 的函数展开为傅里叶级数的方法，推导了函数的傅里叶系数的计算公式，并且不加证明地给出了关于以 2π 为周期

的函数展开为傅里叶级数的收敛定理。最后，举例说明了周期为 2π 的奇函数和偶函数的傅里叶级数的特点。

第七节是周期为 $2l$ 的函数展开为傅里叶级数。教材通过变量代换推导了以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶系数的计算公式，并举例说明这类周期函数展开为傅里叶级数的方法。

第八节是定义在 $[-l, l]$ 或 $[0, l]$ 上的函数展开为傅里叶级数。教材首先介绍了函数的周期延拓的意义，然后举例讨论了在区间 $[-l, l]$ 或 $[0, l]$ 上的函数展开为三角级数的方法。

第九节是傅里叶级数的复数形式。教材先利用欧拉公式推出了傅里叶级数的复数形式和它的系数计算公式。然后通过例子具体说明了将周期为 $2l$ 的函数展开为复数形式的傅里叶级数的方法。

本章教材的重点：

(1) 级数收敛和发散的概念及正项级数的审敛法。

(2) 五个重要的初等函数 (e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$) 的幂级数展开式及幂级数的运算。

(3) 以 2π 为周期的函数展开为傅里叶级数。

本章教材的难点：

(1) 将函数展开为幂级数；将周期函数展开为三角级数。

(2) 将函数展开为幂级数中的余项的讨论；近似计算中余项的估计。

级数收敛和发散的概念是本章最基本的概念，本章大部

分内容均是围绕这一概念而展开讨论的，由于这样的原因，级数的收敛或发散的判别也就成为本章的一个重要内容。正项级数的审敛法是各种审敛法中最基本的，许多有关级数收敛的问题都是在它的基础上进行讨论的。所以级数收敛和发散的概念及正项级数的审敛法是本章的重点。

初等函数的幂级数展开式是我们进一步研究和运用初等函数的一个重要工具。利用 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$，$(1+x)^m$ 五个初等函数的幂级数展开式及幂级数的运算可以求得其它许多初等函数的幂级数展开式。教材§21-5中所涉及的幂级数应用也是在这个基础上进行的。

以 2π 为周期的函数展开为傅里叶级数也是本章的重要内容，周期为 $2l$ 的函数展开为傅里叶级数，以及定义在 $[-l, l]$ 与 $[0, l]$ 上的函数展开为三角级数，从内容到方法都是在这个基础上进行的。

将函数展开为幂级数以及周期函数展开为傅里叶级数的过程比较长，无论是系数的计算或敛散性的判别都比较复杂，学生对此往往感到困难，所以讲授这些内容时，必须切合学生实际情况作妥善的引导。

不论是幂级数的余项估计，还是近似计算中的误差估计，它们的方法多变，学生不易掌握，对这部分的要求不宜过高，只需讨论几个最基本的典型例子，让学生有所了解即可。

本章教材约需26课时，具体分配如下（仅供参考）：

§21-1	常数项级数	约2课时
§21-2	常数项级数的审敛法	约4课时

§21-3	幂级数	约 6 课时
§21-4	函数的幂级数展开	
§21-5	幂级数的应用	约 2 课时
	习题课	约 2 课时
§21-6	傅里叶级数	约 4 课时
§21-7	周期为 $2l$ 的函数展开为傅里叶级数	
§21-8	定义在 $[-l, l]$ 或 $[0, l]$ 上的函数展开为傅里叶级数	约 4 课时
§21-9	傅里叶级数的复数形式	
本章总结及习题课		约 2 课时

三　教学建议

§21-1　常数项级数

1. 无穷级数是本章研究的对象，教材一开始就以圆面积的计算为例，引出无穷级数的定义。圆面积的计算过程必须让学生有比较清晰的了解，讲解时要突出两点：(1) 圆面积是无穷多个数累加的和；(2) 这个和可以利用极限的方法求得。这样，可以帮助学生理解有关无穷级数及其敛散性的定义。讲解了无穷级数的定义之后，可按教材列举的例子介绍函数项级数和常数项级数的定义。

2. 无穷级数敛散性的定义是本章的一个重要概念。教材首先提出常数项级数的和是无穷多个数累加的结果，这里可以启发学生思考两个问题：(1) 无穷多个数怎样累加？

(2) 无穷多个数累加起来是否会有一个确定的结果？关于第一个问题，可以结合圆面积的计算作些分析，说明一个无穷级数是先求出它的前 n 项（有限项）之和 S_n，然后再求当 $n\to\infty$ 时，S_n 的极限．对于第二个问题可以通过一些简单的例子具体地说明．例如，公比为 q 的等比级数，当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，而当 $|q|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在．由此可知，级数的无穷项累加的结果可归结为两种情形：(i) 级数的前 n 项和 S_n，当 $n\to\infty$ 时有极限 S（是一个确定的数，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$），(ii) 级数的前 n 项和 S_n，当 $n\to\infty$ 时没有极限，我们就认为这个级数不能求和．作了以上的分析，再引出教材中提出的无穷级数收敛和发散的定义，学生便可更好地理解了．讲解定义之后，可再强调一下无穷级数的和可通过它的前 n 项之和（部分和）的极限来解决．级数是无穷多项的累加，但无穷多项累加不一定有和，记号“$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$”只是表明了无穷多项累加的意思，不能认为它总是一个和数．只有当它的前 n 项和 S_n，在 $n\to\infty$ 时有极限时，无穷多项累加才能求出它的和，否则就不能求和．

教材给出了级数的收敛和发散的概念后，还附带指出了“当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时，级数的和 S 与它的部分和 S_n 之差

$$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

称为级数的余项，以部分和 S_n 作为和 S 的近似值所产生的误差，就是这个余项的绝对值 $|r_n|$”．这段话不仅说明了什么是余项，而且为以后级数在近似计算中的应用作好了准备，

这是一个伏笔，不能忽视.

教材 p.4～p.5 上的例 1 和例 2 是直接根据定义去判别级数的敛散性的，目的是使学生对于级数收敛与发散的概念多一些具体的了解。其中例 2 还为 §21-2 研究调和级数的敛散性作了准备。

3. 教材接着叙述了级数的三个基本性质，性质 1 与性质 2 实际上就是极限的两个运算法则的应用，学生理解这两个性质的证明并不困难，教材 p.7 上的例 3 具体说明了这两个性质的运用。关于性质 3，教材没有加以证明，讲解时可通过例子加以说明．但需指出，一个级数增加或减少有限项后，虽然其敛散性不变，但在一般情况下，如果有“和”，则这个“和”是会改变的。

这三个性质在后面判断级数的敛散性，以及讲解幂级数的一些运算法则时，将会用到。

4. 关于级数收敛的必要条件可按教材先进行分析，然后引出定理．讲解这个定理时，要让学生理解定理所包含的各个内容：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，即如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 一定成立。

(2) 定理没有说 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 是级数收敛的充分条件，即条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 不能保证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛。事实上这个条件是不充分的。因为一个发散的级数，它的通项也可以趋于零。

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必然发散。

§21-2 常数项级数的审敛法

1. 只根据级数收敛或发散的定义和性质去判定级数的敛散性往往是比较困难的，所以本节再介绍几种基本的常数项级数的审敛法. 常数项级数的每一项 u_n 可以是正数，可以是负数，也可以是零. 然而其中较为重要的是每一项都是非负数（即 $u_n \geqslant 0$）的一类级数，称为正项级数. 其它级数可以在正项级数的基础上进行讨论.

2. 正项级数的比较审敛法是正项级数各种审敛法中最基本的一种. 在这个基础上可以推导出正项级数的其它审敛法，但考虑到中专的要求，本教材只介绍比值审敛法的一种.

教材一开始就不加证明地提出了比较审敛法，从直观来说，学生接受这个审敛法并不困难. 但在应用这个审敛法判别某个级数的敛散性时，却比较困难，原因在于不善于找到用来作比较的级数.

教材上例 1 和例 2 比较系统地讨论了 p- 级数的敛散性. 一般来说，p-级数与等比级数是两类比较重要的正项级数，它们常常用来与所给级数作比较. 通过例题，要使学生熟悉 p- 级数与等比级数，以及它们的敛散性，以便作比较时作出适当选择.

例如，教师可以列出一些 p- 级数和等比级数，让学生判别它们的敛散性；

p- 级数或等比级数	敛 散 性
(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$	
(2) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$	
(3) $1+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\cdots$	
(4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$	
(5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$	

附带地，对于“调和级数是发散的”这一结论，下面给出一个利用反证法的证明，供教师参考：

假设调和级数收敛，其和为 r，则

$$
\begin{aligned}
r&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\
&>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=r,
\end{aligned}
$$

即 $r>r$，这个不等式是矛盾的，所以调和级数是发散的.

3．正项级数的比值审敛法是在比较审敛法的基础上，将所给的级数与无穷递缩等比级数（$|q|<1$）相比较而得出来的．在教学过程中应特别提醒学生注意，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ 时，不能判定级数的敛散性，教材中以 p- 级数为例作了说明，这是一个很典型的例子．

这里要提醒教师注意的是，正项级数没有一个十全十美的审敛法，因此判定级数的敛散性是一个极为复杂的问题，所

以教学中不宜多作补充或引伸。

4. 对于任意项级数的讨论，在这里着重讨论了交错级数，并提出了一个交错级数的审敛法(也称莱布尼兹审敛法)。关于这个审敛法的正确性，教材采用了几何直观考察。就是根据它的部分和 S_n 在数轴上对应点 A_n 位置的变化来作分析的。

关于按交错级数审敛法确定级数收敛，其余项估计的方法，在幂级数近似计算的误差估计中有直接的应用。

5. 教材最后还简单地介绍了任意项级数的绝对收敛和条件收敛的概念。这是讨论一般无穷级数的基本概念。对于中专学生，只要能通过例子了解这两个概念，并且知道二者之间的关系就可以了。这两个概念在幂级数的讨论中将要用到。

6. 讲完本节内容后，应作一小结，除复习本节的重要概念外，可着重总结判别一个常数项级数敛散性的一般思路：

(1) 先考察级数收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 是否成立，若不成立，则可判定级数发散；若成立，则继续考察。

(2) 如果所给的级数是交错级数，则用莱布尼兹审敛法。

(3) 如果所给级数是正项级数，则先用比值审敛法，若比值审敛法失效$\left(\text{即} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1\right)$，再试用比较审敛法或直接根据定义判定级数的敛散性。

(4) 如果上述方法都无法直接使用时，可先分析，作适当变形后，再利用上面所说的各种方法进行判别。如教材复习题二十一中的第1.(13)题。解法详见本章的部分习题的解答或提示。

§21-3 幂级数

1．幂级数是函数项级数中较简单而有广泛应用的一类级数。教材一开始就提出幂级数的一般形式：

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

接着就说明了本章主要讨论的是它的特殊情形，即当 $x_0=0$ 时的幂级数，

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

这是一个函数项级数，除第一项 a_0 外，它的每一项都是正整数指数幂的幂函数。

关于幂级数的收敛域和收敛半径的讨论都是以常数项级数中的有关结论为基础的，在教学过程中可以让学生明确这一思想，这是有好处的。因为以 x_0 代替幂级数中的 x，这样函数项级数就转化为常数项级数了。利用这种变化说明幂级数收敛点和发散点的概念。然后再说明幂级数的收敛域和发散域的概念。在此可注意两点：

（1）收敛点和发散点，收敛域和发散域等概念对于一般的函数项级数都适用。

（2）这里对于收敛点和发散点的集合分别只称为收敛域和发散域，并不称为收敛区间和发散区间，因为这时还不能说明这两个集合一定分别构成了区间。

2．如何确定幂级数的收敛域，教材是在正项级数的比值审敛法的基础上进行讨论。通过分析说明了若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$ 存在，只要 $\rho|x_0|<1$，则在 x_0 处的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$