

① 中等财经学校（四年制）试用教材

经济应用数学

（下 册）

*xhōngxhuan
jiàccai*



李冠云 主编

中国财经出版社

29.18
29.18
29.18
29.18
29.18

中等财经专业学校(四年制)试用教材

经济应用数学

下 册

李冠云 主 编

中国财政经济出版社

(京.)新登字038号

中等财经专业学校(四年制)试用教材

经济应用数学

下 册

李冠云 主编

•
中国经济出版社 出版

(北京东城大佛寺东街8号)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

涿州新华印刷厂印装

•
787×1092毫米 32开 12.25 印张 250 000字

1991年11月第1版 1994年10月涿州第7次印刷

印数, 59 721—89 730 定价, 6.70元

ISBN 7-5005-1402-0/F·1321(课)

目 录

第三篇 线性代数初步

第十二章 行列式	(1)
§ 12-1 行列式的概念	(1)
§ 12-2 行列式的性质	(15)
§ 12-3 用克莱姆法则解线性方程组	(21)
第十三章 矩阵	(26)
§ 13-1 矩阵的概念	(26)
§ 13-2 矩阵的运算	(31)
§ 13-3 逆矩阵	(47)
§ 13-4 矩阵的初等变换	(63)
*§ 13-5 矩阵的秩、一般线性方程组的解	(71)
第十四章 投入产出方法简介	(85)
§ 14-1 投入产出数学模型简介	(85)
§ 14-2 直接消耗系数	(92)
*§ 14-3 完全消耗系数	(98)
§ 14-4 投入产出法用于计划与管理	(105)

第四篇 线性规划初步

第十五章 线性规划概述	(111)
-------------	---------

§ 15-1	线性规划问题	(114)
§ 15-2	线性规划问题的数学模型	(117)
第十六章	线性规划问题的图解法	(125)
§ 16-1	求使目标函数取值最大的解	(125)
§ 16-2	求使目标函数取值最小的解	(132)
第十七章	运输问题的特殊解法	(138)
§ 17-1	运输问题及其数学模型	(138)
§ 17-2	表上作业法	(146)
§ 17-3	图上作业法	(161)
* 第十八章	单纯形法简介	(174)
§ 18-1	几个基本概念	(174)
§ 18-2	单纯形法的基本步骤	(182)

第五篇 概率论初步

第十九章	排列、组合	(195)
§ 19-1	加法原理和乘法原理	(195)
§ 19-2	排列	(199)
§ 19-3	组合	(207)
第二十章	随机事件及其概率	(216)
§ 20-1	概率及其求法	(216)
§ 20-2	事件的关系及其运算	(228)
§ 20-3	概率加法公式	(234)
§ 20-4	条件概率和乘法公式	(239)
* § 20-5	全概率公式和贝叶斯公式	(247)

第二十一章	随机变量的分布及数字特征	(255)
§ 21-1	离散型随机变量及其分布.....	(255)
§ 21-2	离散型随机变量的数字特征.....	(261)
§ 21-3	二项分布和泊松分布.....	(270)
§ 21-4	连续型随机变量的概率分布 及数字特征.....	(278)
§ 21-5	正态分布.....	(282)
第二十二章	决策策略	(293)
§ 22-1	概率与决策.....	(293)
* § 22-2	决策分析范例.....	(304)

第六篇 数理统计初步

第二十三章	样本与分布的近似求法	(318)
§ 23-1	总体、个体、简单随机抽样.....	(318)
§ 23-2	分布密度的近似求法.....	(321)
第二十四章	参数的估计和检验	(326)
§ 24-1	总体均值和方差的估计.....	(326)
§ 24-2	正态总体均值的区间估计.....	(332)
§ 24-3	比率的区间估计.....	(337)
* § 24-4	参数的假设检验.....	(341)
第二十五章	一元线性回归分析与经济预测	(353)
§ 25-1	一元线性回归分析.....	(353)
§ 25-2	回归方程的显著性检验.....	(361)
§ 25-3	经济预测实例分析.....	(365)

* § 25-4	可化线性的回归方程·····	(373)
附录 4	累计二项分布·····	(379)
附录 5	泊松分布累计概率值表·····	(382)
附录 6	标准正态分布函数值表·····	(383)
附录 7	相关系数临界值表·····	(384)

第三篇 线性代数初步

本篇主要介绍行列式和矩阵的基本知识，并对投入产出方法作简单介绍。

第十二章 行 列 式

行列式是从解线性方程组的需要建立起来的，它不仅是解线性方程组的重要工具，而且在数学的许多分支及其它学科有着广泛应用。

本章的主要内容是行列式的概念、基本性质及利用行列式解线性方程组。

§12—1 行列式的概念

一、二元线性方程组与二阶行列式

二元线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

用加减消元法解方程组(1)，可得：

$$x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}; \quad (2)$$

$$y = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}. \quad (3)$$

其中： $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \neq 0$ 。

为了进一步研究线性方程组的解法而分析这一组解，比较(2)、(3)两式可见：两式的分母均为 $(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})$ ，且构成此式的元素仅包含未知量 x 和 y 的系数，若将这些系数按它们在方程组中的位置相应地列成如下形式：

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

并用左上角与右下角的两数之乘积减去左下角与右上角的两数之乘积，就得式子 $(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})$ 。

通常用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (12-1)$$

表示 $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$ ，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}.$$

称(12-1)式为二阶行列式。行列式中横排称行，纵排称列， a_{11} 、 a_{12} 、 a_{21} 、 a_{22} 称为二阶行列式的元素， $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$ 称为二阶行列式(12-1)的展开式，给各元素赋以数值后，

展开式的计算结果称为行列式的值。

应用二阶行列式，则 (2)、(3) 两式中的分子也可分别记为：

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$a_{11} b_2 - a_{21} b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix};$$

(2)、(3)两式可记为：

$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases} \quad (5)$$

其中：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

通常还将方程组(1)的解简记为：

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{D_x}{D}; \\ y = \frac{D_y}{D}. \end{cases}} \quad (D \neq 0) \quad (12-2)$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

D 是由方程组(1)中未知量 x 、 y 的系数按原来位置次序组成的行列式,称为方程组(1)的系数行列式;

D_x 是将 D 中 x 的系数 a_{11} 、 a_{21} 依次换为方程组(1)的常数项 b_1 、 b_2 而得;

D_y 是将 D 中 y 的系数 a_{12} 、 a_{22} 依次换为方程组(1)的常数项 b_1 、 b_2 而得.

利用(12-2)式,可解二元线性方程组.

例 1 用行列式解线性方程组:

$$\begin{cases} 3x-2y-3=0, \\ x+3y+1=0. \end{cases}$$

解 将方程组写成一般形式:

$$\begin{cases} 3x-2y=3, \\ x+3y=-1. \end{cases}$$

因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - (-2) \times 1 = 9 + 2 = 11 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - (-2) \times (-1) = 9 - 2 = 7,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 3 \times 1 = -3 - 3 = -6.$$

所以方程组的解为:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{11}, \\ y = \frac{D_y}{D} = -\frac{6}{11}. \end{cases}$$

二、三阶行列式与 n 阶行列式

1. 三阶行列式

一般形式的三元线性方程组为:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (6)$$

用加减消元法解此方程组, 并对其解的形式进行分析后, 也可类似于二阶行列式, 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (12-3)$$

表示: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

称(12-3)式为三阶行列式。

这里 D 称为方程组(6)的系数行列式, 若用 b_1 、 b_2 、 b_3 分别代替系数行列式中第一、第二、第三列便得:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

于是，方程组(6)的解可表示为：

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{D_{x_1}}{D}; \\ x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}; \quad (D \neq 0) \\ x_3 = -\frac{D_{x_3}}{D}. \end{cases} \quad (12-4)$$

其中 D 、 D_{x_1} 、 D_{x_2} 及 D_{x_3} ，可按三阶行列式展开的法则展开后求得。

三阶行列式一般可按“对角线法则”进行展开。

展开三阶行列式的对角线法则如图12-1所示；将图中实线所联结的三个元素之乘积分别取正号；虚线所联结的三个元素之乘积分别取负号，然后再相加便得三阶行列式的展开式。

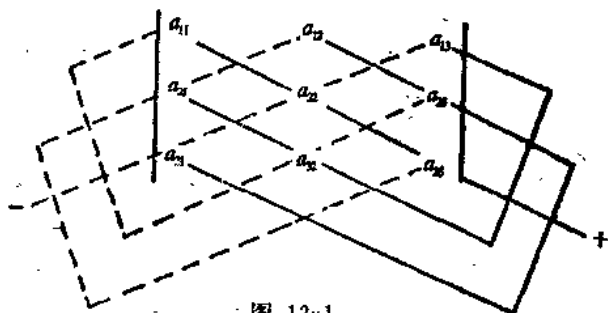


图 12-1

上述法则，也可用图12-2表示；图中在三阶行列式右方顺序增加了该行列式的第一、二两列元素。展开行列式时，仍然将每条实线上三个元素之乘积取正号；每条虚线上三个

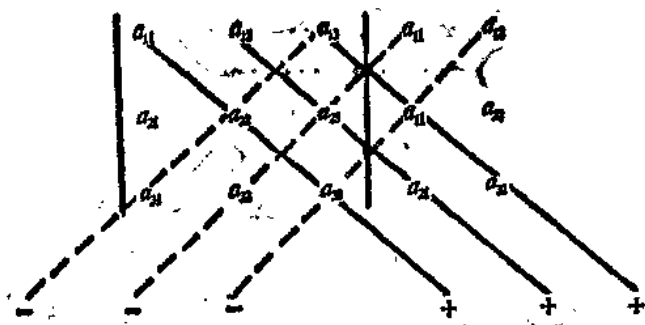


图 12-2

元素之乘积取负号，然后各项相加。

“对角线法则”除适用于三阶行列式外，还适用于二阶行列式。如图12-3所示，图中、实线（称主对角线）上两元素的乘积减去虚线（称付对角线）上两元素的乘积，就得二阶行列式的展开式。

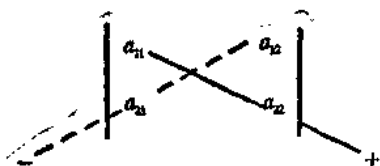


图 12-3

2. n 阶行列式

由以上讨论可知，二阶行列式由 $2^2=4$ 个元素，按一定的顺序排成二行二列组成；三阶行列式由 $3^2=9$ 个元素，按一定的顺序排成三行三列组成。类似地，有确定运算关系的 n^2 个元素，若按一定的顺序排成 n 行 n 列，即可组成 n 阶行列式。

n 阶行列式可记为：

n 阶行列式可记为：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (12-5)$$

一般用 a_{ij} 表示行列式中第 i 行、第 j 列的元素。

为了说明 n 阶行列式的展开式，先以三阶行列式为例，应用对角线法则进行讨论。

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ &\quad + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

分析以上结果：

其中第一项为 a_{11} 与二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 之乘积，这

个行列式恰是在 D 中，划去 a_{11} 所在的行（第一行）和列（第一列）之后，余下的元素按原来顺序构成的行列式，称为元素 a_{11} 的余子式，记为 M_{11} 。

一般地，行列式中元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是将行列式中第 i 行和第 j 列的元素都划去后，所余下的元素按原来顺序构成的行列式。 M_{ij} 与 $(-1)^{i+j}$ 相乘的结果称为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij} ，即 $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ 。

因而 D 的展开式中的第一项，就是元素 a_{11} 与其代数余子式

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ 之乘积；}$$

$$\text{第二项，} -a_{12} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ 是元素 } a_{12} \text{ 与其代数余子式}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ 的乘积；}$$

$$\text{第三项，} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ 是元素 } a_{13} \text{ 与其代数余子式}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ 的乘积。}$$

于是，可将 D 的展开式简记为：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

这就是行列式 D 按其第一行展开的展开式。

类似地也可将 D 按该行列式的任意一行（或列）展开。

例如，将 D 按第二列展开为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

可以证明， n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}, \quad (i=1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \quad (12-6)$$

或

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}, \quad (j=1, 2, \cdots, n) \end{aligned} \quad (12-7)$$