中等财经学校（四年制）试用教材

经济应用数学

（下册）

zhongzhuan jiaocai

李冠云 主编

中国财政经济出版社

中等财经专业学校(四年制)试用教材

经 济 应 用 数 学

下 册

李冠云 主编

中国财政经济出版社

(京)新登字038号

中等财经专业学校(四年制)试用教材

经 济 应 用 数 学

下 册

李冠云 主编

中国财政经济出版社 出版

(北京东城大佛寺东街8号)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

涿州新华印刷厂印装

787×1092毫米 32开 12.25 印张 250 000字

1991年11月第1版 1994年10月涿州第7次印刷

印数:59 721—89 780 定价: 6.70元

ISBN 7-5005-1402-0/F·1321(课)

目　录

第三篇　线性代数初步

第四篇　线性规划初步

第五篇 概率论初步

第六篇　数理统计初步

第三篇　线性代数初步

本篇主要介绍行列式和矩阵的基本知识，并对投入产出方法作简单介绍.

第十二章　行　列　式

行列式是从解线性方程组的需要建立起来的，它不仅是解线性方程组的重要工具，而且在数学的许多分支及其它学科有着广泛应用.

本章的主要内容是行列式的概念、基本性质及利用行列式解线性方程组.

§12—1　行列式的概念

一、二元线性方程组与二阶行列式

二元线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法解方程组(1)，可得：

$$x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}};\qquad (2)$$

$$y=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}.\qquad (3)$$

其中：$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$。

为了进一步研究线性方程组的解法而分析这一组解，比较(2)、(3)两式可见：两式的分母均为$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})$，且构成此式的元素仅包含未知量$x$和$y$的系数，若将这些系数按它们在方程组中的位置相应地列成如下形式：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

并用左上角与右下角的两数之乘积减去左下角与右上角的两数之乘积，就得式子$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})$。

通常用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\qquad (12\text{—}1)$$

表示$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

称(12—1)式为二阶行列式。行列式中横排称行，纵排称列，a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}称为二阶行列式的元素，$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$称为二阶行列式(12—1)的展开式，给各元素赋以数值后，

展开式的计算结果称为行列式的值.

应用二阶行列式，则（2）、（3）两式中的分子也可分别记为：

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix};$$

（2）、（3）两式可记为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; & (4) \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. & (5) \end{cases}$$

其中：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

通常还将方程组(1)的解简记为：

$$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}; \\ y=\dfrac{D_y}{D}. \end{cases} \quad (D\neq 0)} \qquad (12—2)$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}、\quad D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}、\quad D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

D是由方程组(1)中未知量x、y的系数按原来位置次序组成的行列式，称为方程组(1)的系数行列式；

D_x是将D中x的系数a_{11}、a_{21}依次换为方程组(1)的常数项b_1、b_2而得；

D_y是将D中y的系数a_{12}、a_{22}依次换为方程组(1)的常数项b_1、b_2而得。

利用(12—2)式，可解二元线性方程组。

例 1 用行列式解线性方程组：

$$\begin{cases}3x-2y-3=0,\\ x+3y+1=0.\end{cases}$$

解 将方程组写成一般形式：

$$\begin{cases}3x-2y=3,\\ x+3y=-1.\end{cases}$$

因为

$$D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3\times3-(-2)\times1=9+2=11\neq0;$$

$$D_x=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=3\times3-(-2)\times(-1)=9-2=7;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3\times(-1)-3\times1=-3-3=-6.$$

所以方程组的解为：

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{7}{11},\\ y=\dfrac{D_y}{D}=-\dfrac{6}{11}.\end{cases}$$

二、三阶行列式与 n 阶行列式

1. 三阶行列式

一般形式的三元线性方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \qquad (6)$$

用加减消元法解此方程组，并对其解的形式进行分析后，也可类似于二阶行列式，用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (12—3)$$

表示：$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}$

$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$，即

$$\boxed{D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23};}$$

称(12—3)式为三阶行列式.

这里D称为方程组(6)的系数行列式，若用 b_1、b_2、b_3 分别代替系数行列式中第一、第二、第三列便得：

$$D_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_{x_3}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

于是，方程组(6)的解可表示为：

$$\boxed{\begin{cases} x_1=\dfrac{D_{x_1}}{D}; \\ x_2=\dfrac{D_{x_2}}{D}; \quad (D\neq 0) \\ x_3=\dfrac{D_{x_3}}{D}. \end{cases}} \qquad (12\text{—}4)$$

其中 D、D_{x_1}、D_{x_2} 及 D_{x_3} 可按三阶行列式展开的法则展开后求得.

三阶行列式一般可按“对角线法则”进行展开.

展开三阶行列式的对角线法则如图12-1所示：将图中实线所联结的三个元素之乘积分别取正号；虚线所联结的三个元素之乘积分别取负号，然后再相加便得三阶行列式的展开式.

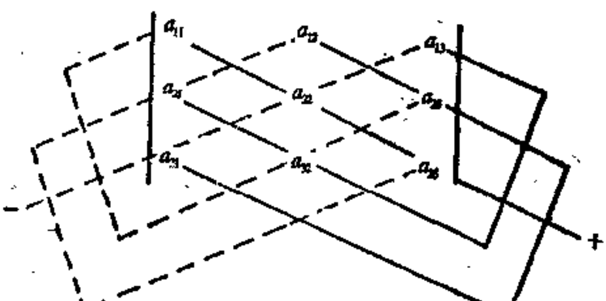

图 12-1

上述法则，也可用图12-2表示：图中在三阶行列式右方顺序增加了该行列式的第一、二两列元素. 展开行列式时，仍然将每条实线上三个元素之乘积取正号；每条虚线上三个

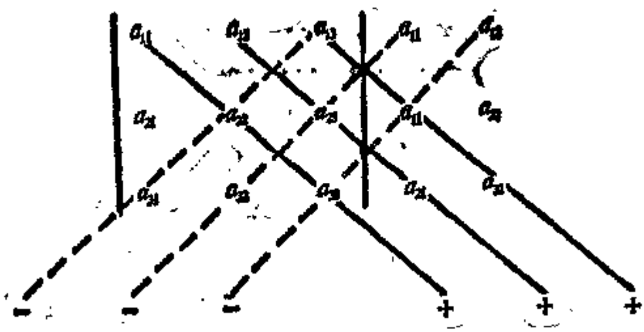

图 12 2

元素之乘积取负号，然后各项相加。

"对角线法则"除适用于三阶行列式外，还适用于二阶行列式。如图12-3所示，图中、实线(称主对角线)上两元素的乘积减去虚线(称付对角线)上两元素的乘积，就得二阶行列式的展开式。

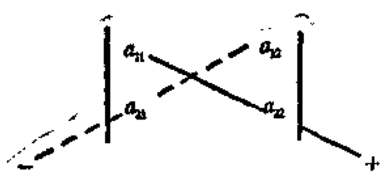

图 12-3

2. n阶行列式

由以上讨论可知，二阶行列式由 $2^2=4$ 个元素，按一定的顺序排成二行二列组成；三阶行列式由 $3^2=9$ 个元素，按一定的顺序排成三行三列组成。类似地，有确定运算关系的n^2个元素，若按一定的顺序排成n行 n 列，即可组成 n 阶行列式。

n阶行列式可记为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (12\text{—}5)$$

一般用a_{ij}表示行列式中第i行、第j列的元素。

为了说明n阶行列式的展开式，先以三阶行列式为例，应用对角线法则进行讨论。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})+a_{12}(a_{31}a_{23}-a_{21}a_{33})$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

分析以上结果：

其中第一项为a_{11}与二阶行列式$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$之乘积，这

个行列式恰是在D中，划去a_{11}所在的行（第一行）和列（第一列）之后，余下的元素按原来顺序构成的行列式，称为元素a_{11}的余子式、记为M_{11}。

一般地、行列式中元素a_{ij}的**余子式**M_{ij}是将行列式中第i行和第j列的元素都划去后，所余下的元素按原来顺序构成的行列式。M_{ij}与$(-1)^{i+j}$相乘的结果称为a_{ij}的**代数余子式**，记为A_{ij}，即$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$。

因而D的展开式中的第一项，就是元素a_{11}与其代数余子式

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^2M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$之乘积；

第二项：$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$是元素$a_{12}$与其代数余子式

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$的乘积；

第三项：$a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$是元素$a_{13}$与其代数余子式

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$的乘积。

于是，可将D的展开式简记为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

这就是行列式D按其第一行展开的展开式。

类似地也可将D按该行列式的任意一行（或列）展开。例如，将D按第二列展开为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$$

$$=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

可以证明，n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$\boxed{\begin{aligned} D&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\ &=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\ (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned}} \qquad (12\text{—}6)$$

或

$$\boxed{\begin{aligned} D&=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \\ &=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{aligned}} \qquad (12\text{—}7)$$