

上海科普创作出版专项资金资助

优 化 与 决 策

最小网络

斯坦纳树问题

越民义 著

上海科学技术出版社

优 化 与 决 策

最小网络

—— 斯坦纳树问题

越民义 著



上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

最小网络——斯坦纳树问题/越民义著. —上海:上海科学技术出版社, 2006. 11

(优化与决策)

ISBN 7-5323-8579-5

I. 最... II. 越... III. ①运筹学—普及读物②决策学—普及读物 IV. ①022-49②C934-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 085652 号

上海科普创作出版专项资金资助

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行

上海科学技术出版社

(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)

新华书店上海发行所经销

苏州望电印刷有限公司印刷

开本 889×1194 1/32 印张 3.875

字数 80 000

2006 年 11 月第 1 版 2006 年 11 月第 1 次印刷

印数:1—3 000

定价:15.00 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向工厂调换

《优化与决策》丛书编委会

名誉主编 吴文俊 谷超豪

主 编 胡毓达

编 委 (以姓氏笔画为序)

王长钰 王兴华 王则柯 方伟武

石钟慈 史树中 刘源张 李 端

汪寿阳 张连生 陈光亚 茆诗松

姚恩瑜 袁亚湘 顾基发 徐利治

唐国春 章祥荪 越民义 韩继业

管梅谷 魏权龄

序



“人尽其能，物尽其用”，是人类进步的重要标志和社会发展的根本动力。

在现代社会中，小至个人事务的处理，大到国家政策的制定，无不需要人们进行关于“人”和“物”的选优抉择，以求取好的结果。在科技日新月异和经济快速发展的 21 世纪，人们要面临各种愈来愈复杂的决策问题，因此，现代优化思想和科学决策知识，已是当今人们普遍需要具备的基本素养。

现代教育提倡对学生进行创新精神和综合能力的素质培养。在我国大中学教育中，让学生们了解某些现代优化方法和进行决策能力培养，也正是素质教育的重要内容。

为了向广大读者普及最优化和科学决策的思想和方法，在中国运筹学会及其决策科学分会、数学规划分会和排序分会，中国系统工程学会，中国数学会计算数学分会以及上海运筹学会的倡议和支持下，我们邀请了在相应领域卓有成就的有关专家，撰写了这套《优化与决策》系列丛书。

这套丛书具有以下特点：

选题实用求新 本丛书的重要特色是内容的实用性。各选题在扩大知识的同时，均注重联系实际结合应用展开讨论。不论是定量或定性的决策问题，进行选优建模和效益分析一

般要归为用数量刻画和作数值计算,因此,数学是这套丛书各选题的基本工具。但是,与以往作为中学数学教科书内容补充的科普性数学读物或抽象的数学专著不同,本丛书强调综合运用数学和有关知识去解决现实中的应用问题。另外,丛书的选题既考虑其内容是具代表性的,同时也注意对新领域和某些发展中问题的介绍。

表述浅出深入 本丛书着力于用通俗易懂的方式引导读者掌握现代优化和决策知识。书中特配置了形象的图画以帮助读者加深对内容的理解。我们计划,具有高中数学基础的读者,即可读懂其中的基本内容。但是,为了每一选题的系统性和完整性,也不放弃对一些最基本和著名理论结果的介绍。因此,主要想了解思想方法和借鉴应用手段的读者,阅读时可以略去其中某些理论和证明部分,而不会影响对主要内容的理解。然而,对于具相当数学素养并对理论结果同样有兴趣者,这些较深入的内容对他们是有价值的,其中有些结果即使对于同行学者也将具有重要的参考意义。因此,不同层次的读者,阅读本丛书后均会有所得益。

这套丛书的读者面是多层次和极广泛的,它既适用于各行业管理者,各级行政公务员,广大科技工作者,以及各专业

大学生、研究生和教师们阅读,同时也可作为大专和高中学生的选读材料或课外读物。

写作这套既具科普性又基于一定理论分析的现代应用丛书,对于丛书作者是一种新的尝试。本丛书从酝酿组织、确定选题,直至现在与读者见面,曾经历了较长的时间。许国志院士和俞文钺教授生前曾积极参与出版本丛书的策划,并热情承担了写作任务,可惜未及如愿。值得一提的是,各位作者对分担撰写选题的内容都进行了精心选择和安排。特别是,许多作者专业造诣精深,但写作科普著作则是第一次,因此在可读性方面曾倾注了许多心血。对于他们的这种认真和奉献精神,谨致以衷心感谢和崇高的敬意!鉴于著述这套丛书对多数作者是一件新的工作,其中难免或有不足之处,期待读者们不吝指正。

最后,我们对吴文俊院士和谷超豪院士关心和支持本丛书的出版,并乐于担任名誉主编致以诚挚的谢忱!同时,感谢上海科学技术出版社对出版这套丛书所作的一系列努力。

胡毓达

2006年9月19日

前言

本书所介绍的斯坦纳树(Steiner tree)问题,是组合优化这门学科中的一个著名问题。

在正文开始之前,先对组合优化这门学科作一简要介绍。所谓优化问题,一般的提法是:在一定的要求之下,在众多可供选择的方案中求出一个满足该要求的方案,使得某一个或某几个目标达到最优。通常将所提的要求称为约束条件,一般由一些给定的函数(不)等式所界定的区域来表达;目标则由某些数学式子表出。但是在实际生活中,大量的问题却不能如此表达。例如本书所说的问题,它的提法归为:要在给定的 n 个点上求一连接它们的最小网络,而这类问题的约束条件和目标函数都无法用数学式子表出。又如排序问题:设有 n 个零件 $J_1, \dots, J_n$, 要在 m 台机器上按某种规定的工艺要求加工,已知每一 J_i 在每台机器上的加工时间,问题是如何将 $J_1, \dots, J_n$ 安排一个加工顺序,使某项目标(例如全部完工时间、所需费用等等)达到最优,诸如此类的问题,统称为组合(或离散)优化问题。这类问题为数众多,在大型工程、大规模生产、大型设计等等的工作中频繁出现,而对这些问题,经典的数学方法往往无能为力。这就要求用新的思路、新的方法,甚至新的认识来处理它们。

其实,这类问题的出现可以追溯到很早的年代。例如,本书所考虑的问题,早在 1634 年即由法国数学家费马(P. de Fermat)正式提出($n=3$ 的情况);对于网络流的情况,高斯(K. F. Gauss)在 1836 年也已经考虑过($n=4$ 的情况)。只是由于时机未到,没有引起人们认真的考虑。在高斯所处的时代,虽然工业革命已经开始一段时间,但生产工艺相当简单、生产规模仍很局限,单凭经验还可应付。再加上计算技术的简陋,对这类问题的解决尚非急需。因此,这类问题尚在萌芽阶段,即被置于不顾。只有当生产发展到一定阶段,伴随着大量的新问题,它们才重新被人们所关注。

为了将问题说得具体一些,先来看下面的例子:

假定南水北调的水利工程首先到达的是天津,然后再送往北京和唐山。此时输送管道的选取,若一支是由天津到北京,而另一支则是从天津到唐山还是另有别的更好的选择呢?

也就是说,假如平面上有三个点 A , B 和 C ,要设计一个网络将它们连起来,使得这一网络的线路总长为最小,这一网络应如何选取? 假若只从线路的总长为最小这一观点来考虑,应该在 $\triangle ABC$ 内找一点 P ,使得 $\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 120^\circ$ 。这时, $AP + PB + PC$ 是连接 A , B 和 C 三点

的网络中,长度为最小者。就是说,当南水引到天津之后,应先引到 P 点再从 P 点直接送到北京和唐山。这样的 P 点是容易求出的。

但假如问题是要在这三个城市之间建立一个公共的垃圾处理站,由于每一城市每天都要将大批垃圾送到处理站,若要求总的输送费用最小的话,这时的问题就和刚才提到的送水问题有所不同了。因为各城市每日产生的垃圾量互不相同,北京每天所产生的垃圾与唐山所产生的在数量上可能悬殊,所以垃圾处理站自应设在靠近垃圾量最多的城市为宜。但究竟设在何处,则需经过精密计算。它比上述的送水问题要难得多。

假若所考虑的城市不止三个,比如将石家庄也考虑进去,问题就会更加困难。

如何去对付这类问题,就是本书要介绍的斯坦纳树问题的内容。

本书将借助在直观上容易理解的这一斯坦纳树问题,向读者介绍:近代应用数学中的优化问题是如何提出来的,为什么说它是一种生产力;对于一个困难问题,人们是如何对付的,即从哪些方面去攻克它;这一优化问题的当前发展情况如何。

阅读本书,基本上只要求读者具备高中数学知识。

目 录

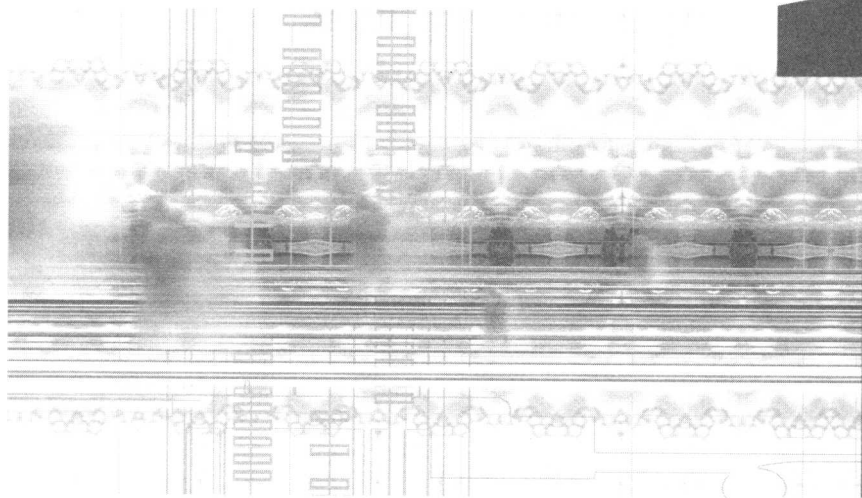
前言

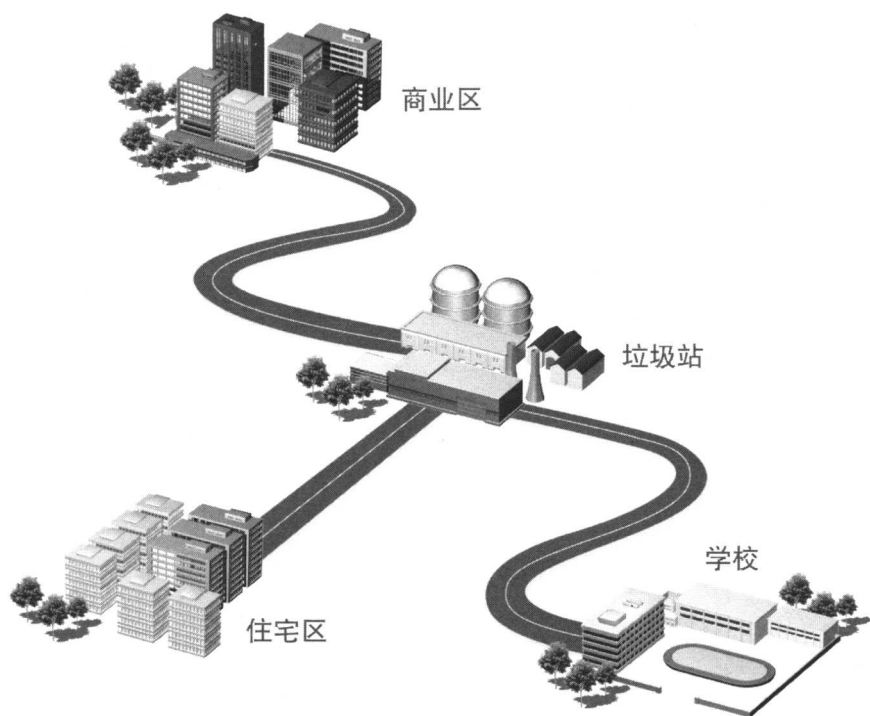
1. 什么是斯坦纳树……1
2. 构造一棵斯坦纳树……11
3. 权衡过后的近似算法……37
4. 种在网格上的斯坦纳树……65
5. 斯坦纳比猜想……83

后记……103

参考文献……107

什么是 斯坦纳树





在城市中,有商业区、住宅区、工业区、休闲娱乐区,如何设置垃圾回收站的位置,使从各个区域运送垃圾的总的路程最短? 对于日益扩大的城市而言,建立一个高效的资源回收网络,需要考虑诸多的因素。设想一种最简单的情形,在购物广场、住宅小区和学校之间修建一座垃圾回收站,最短的运输路线是什么? 这个例子的实质就是法国数学家费马在 1634 年提出的费马点问题:求一个点,使其到三个任意给定点的距离之和最小;这也是接下来要介绍的斯坦纳树问题最简单的一种情形。

对 斯坦纳树的讨论由来已久,可以上溯到 17 世纪初。1634 年,法国数学家费马写了一本关于求某些曲线的切线的小册子,其中便提到了这样一个问题:对平面上任意给定的三个点,如何求出一个点,使得该点到这三点的距离之和为最小。这问题可认为是本书所要介绍的斯坦纳树问题的滥觞。

费马所提的问题后来被瑞士的斯坦纳(J. Steiner, 1796—1863)推广成:在平面上任意给定 n 个点 $A_1, \dots, A_n$, 如何求一点 P 使得 $\sum_{i=1}^n |A_i P|$ 为最小,这里的 $|A_i P|$ 表示从 A_i 到 P 的距离。斯坦纳本人虽然未曾做过任何具体贡献,但这一问题却引起不少人的注意。由于在数学上无法解决,一些人还为之设计出某些简单器械来求此点 P (图 1-1)。1750 年,英国的辛普森(T. Simpson)曾将费马所提的问题推广到一个加权的问题,即对任意给定的三个正数 a_1, a_2 和 a_3 和平面上的三个点 A_1, A_2 和 A_3 , 如何求一点 P , 使 $a_1 |A_1 P| + a_2 |A_2 P| + a_3 |A_3 P|$ 为最小。例如,在城市的商业区、住宅区和学校之间要修建一个垃圾处理站,如何选取垃圾站的位置,使运输的总路径最短,就

是这样的问题。

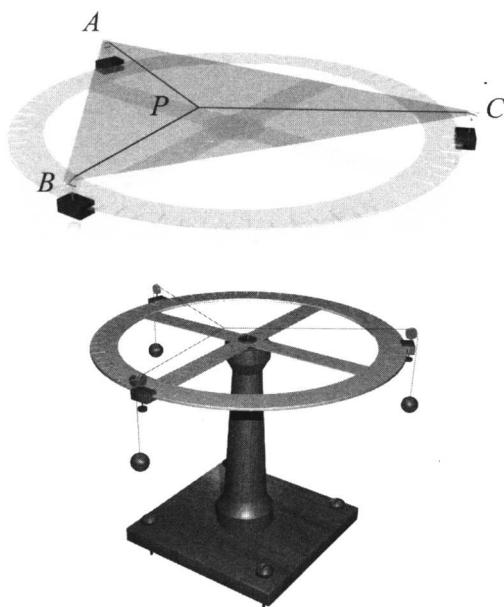


图 1-1 奇妙的工具

在《工厂选址理论》的附录中,韦伯建立了一个在原料产地和市场之间建造工厂的数学模型,使用图中的工具帮助计算工厂位置。他使用重物来代替相同的运输费用, A 和 B 代表原料产地, C 代表市场。假如所有方向上单位运输费用相等,使总费用最低的点 P ,即工厂的位置,可以通过三个角尽力“拉伸”确定。然而,韦伯后来强调,这种单纯靠拉力来确定工厂位置的方法是不充分的,除非被真实世界的地理、社会和政治环境所验证。

19 世纪末,工业革命已经开始,铁路运输、能源、电话通讯以及城市的发展为生产流程和物资分配提供了更多的选择。在 1909 年出版的《工厂选址理论》中,韦伯(A. Weber)提出了第一个工厂选址问题的普遍发展理论。他的模型考虑了几个空间变量,以寻找最佳的位置和最少的花费建造工厂,还把这一模型应用于投资公司等服务性机构,并拓展到特定的政府和文化部门。问题可以表达成:求一点 P , 使 $\sum a_i |A_i P|$ 为最小的问题。

这一问题,在 20 世纪 50 年代末,在中国又作为麦场选址问题被提出来。直到 1937 年,德国的维斯费尔德(Wieszfeld)才第一次设计出一个算法,用以求出韦伯所提的问题。但据美国的库恩(H. W. Kuhn)在 1970 年的一篇文章中所说,维斯费尔德的算法并不收敛。为此,他提出了一个具有收敛性的算法,可用来求出该问题的近似解。几乎与此同时,曲阜师范学院的王长钰对此问题也给出了一个具有收敛性的算法。但他的文章由于明显的原因,直到 20 世纪 80 年代才得到发表。

1934 年,亚尔尼克(V. Jarnik)和克斯勒(M. Kossler)曾提出现在所说的斯坦纳树问题:对于平面上给定的 n 个点 $A_1, \dots, A_n$, 如何求出一个连接这 n 个点的最小网络。即所引进的不是一个 P 点,而是由一些线段构成的连接这 n 点的一个最小连通网络。原来的斯坦纳树问题显然是这一问题的特例。亚尔尼克等人的文章是用捷克文发表的。1941 年,库朗(R. Courant)和罗宾斯(H. Robbins)在他们所著的《数学是什么》(*What is Mathematics*, 见图 1-2)一书中又提出这一问题,并说:斯坦纳对费马问题所作的只是一种浅薄的推广。

要对该问题作出真正有意义的推广,所应考虑的不是用一个点去连接所给定的 n 个点,而应是用一个最短网络去连接它们。这样一来,问题的应用范围大为扩大,难度也大为增加。库朗和罗宾斯仍将这一问题叫作斯坦纳最小树问题(Steiner Minimum Tree Problem),简记作 SMTP。若点集 $X = \{A_1, \dots, A_n\}$ 已经给定,则将此问题的解,即连接 $A_1, \dots, A_n$ 的斯坦纳最小树,记作 $SMT(X)$,问题就是:对于给定的 X ,如何去求它的 $SMT(X)$ 。斯坦纳最小树的问题简称斯坦纳树问题。

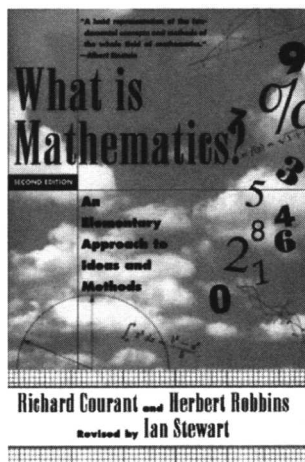


图 1-2 《数学是什么》和库朗

这一源远流长的问题,在历史上曾引起许多数学家的注意。德国大数学家高斯(K. F. Gauss)的一位朋友舒马赫尔(H. C. Schumacher)就曾向他提出如何去求四个点的斯坦纳最小树,但高斯并未给出解答。例如,设 A, B, C, D 为矩形的四个顶点(图 1-3), AB 之长为 1.5, AC 之长为 1。又 E