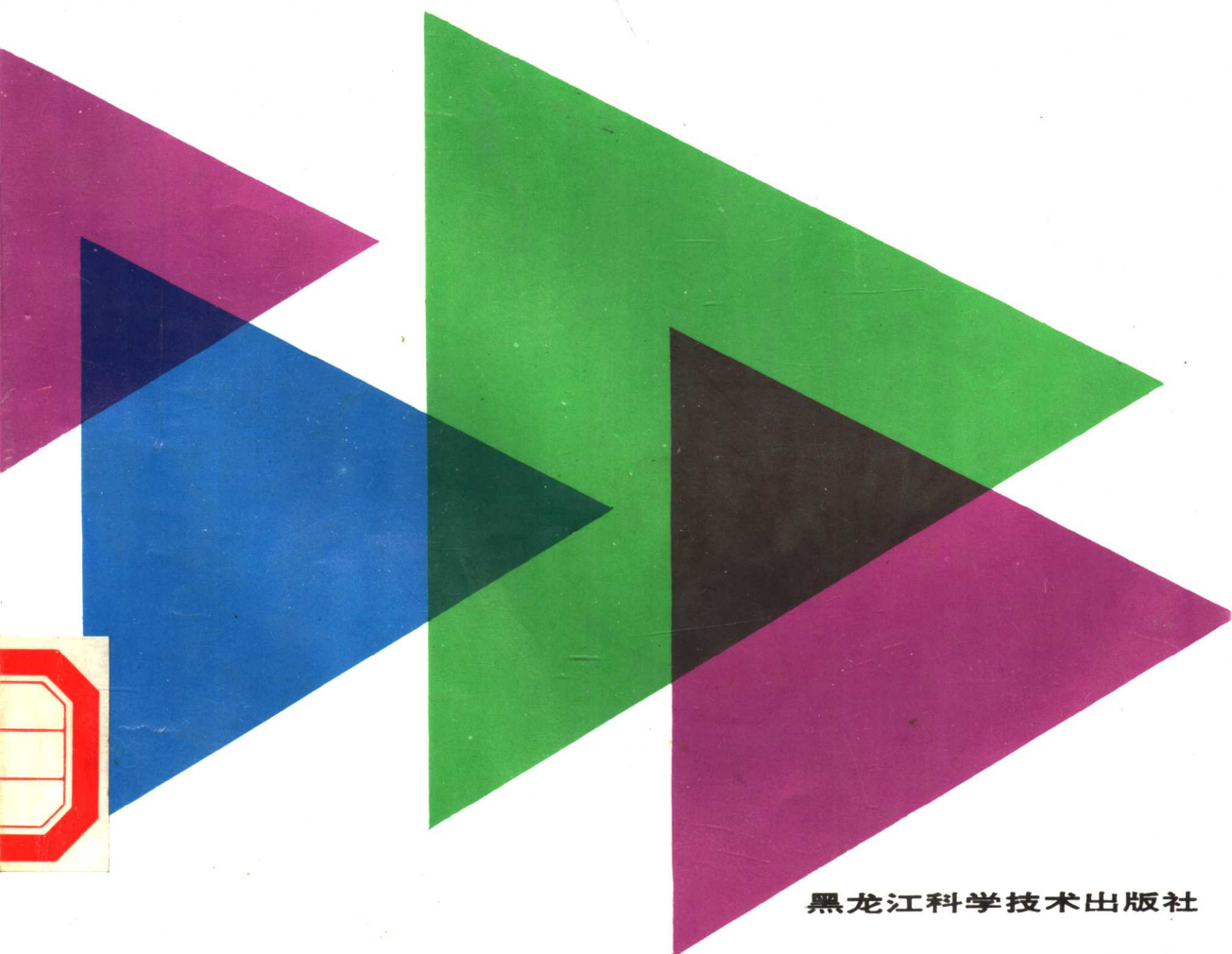


# 数学题型 解析

曹铁钢 刘国华 白延春 吕国文 主编



黑龙江科学技术出版社

51.055  
SX

# 数 学 题 型 解 析

曹铁钢 刘国华 白延春 吕国文 主编

黑龙江科学技术出版社

中国·哈尔滨

责任编辑：车承棣  
封面设计：赵元音  
版式设计：李 洪

### 数学题型解析

SHUXUE TIXING JIEXI

曹铁钢 白延春 主编  
刘国华 吕国文

---

**出 版** 黑龙江科学技术出版社

(150001 哈尔滨市南岗区建设街 41 号)

电话 (0451) 3642106 电传 3642143 (发行部)

**印 · 刷** 哈尔滨市哈平印刷厂

**发 行** 新华书店北京发行所

**开 本** 787×1092 1/16

**印 张** 18.5

**字 数** 530 000

**版 次** 1997 年 4 月第 1 版 · 1997 年 4 月第 1 次印刷

**印 数** 1—8 000

**书 号** ISBN 7-5388-3075-8/N · 145

**定 价** 19.50 元

## 《数学题型解析》编委会名单

**主 编** 曹铁钢 刘国华 白延春 吕国文

**副主编** 李会深 战秀荣 刘景昌 惠 菊

葛权贤 王红香 彭 珊 唐俊江

张永玲 曹春林 郑凜然 高慧卿

**编 委** (按姓氏笔画为序)

马德全 马德臣 王 扬 王 斌

王荣芹 任 凤 刘红梅 辛长友

李凤仪 李存连 李艳娟 李振东

李德胜 张青芝 张绍忠 张富强

杨春堂 杨桂艳 胡建丽 侯 辉

赵海波 高玉萍 郭振杰 崔 红

董玉冬 韩新民 路新珍 樊春红

## 前 言

本书是由黑龙江省四所升学率较高的重点中学把关教师,根据新教材的特点,与教学同步,分“代数”、“立体几何”、“平面解析几何”三部分,按章、节进行编写的。

本书的编写特点是紧紧围绕教材,注重对教材的基本概念、定理、定义进行科学的组合、剖析,使认知与行知紧密结合。突出教学的基本思想和基本方法,从多角度分析和解答题型,目的是培养学生发散思维,突破定势思维,激发学生的解题灵活性和综合性。

本书的每一节都有“知识点归纳”、“例题”、“习题”;每一章都有“综合练习题”、“单元测试题”、“习题答案”等内容。例题和习题的配备都紧扣教材的基本概念,围绕数学的基本思想和基本方法,对学生能起到熟悉、巩固和提高的作用;习题答案的配备可供教师和学生参考。

本书题型的解答分析,都经过学生的反复实践,并得到教育专家的认可之后定稿的。本书不仅适合高中三年级学生全面复习用,也适合高中一、二年级学生和教师使用。

由于编写人员水平有限,书中可能有错误和疏漏之处,敬请教师 and 同学们指正。

编者

# 目 录

## 第一编(代数)

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| 第一章 幂函数、指数函数和对数函数 .....                               | 1  |
| § 1.1.1 集合 .....                                      | 1  |
| § 1.1.2 一元二次不等式 .....                                 | 5  |
| § 1.1.3 映射与函数 .....                                   | 7  |
| § 1.1.4 幂函数 .....                                     | 13 |
| § 1.1.5 函数的单调性 .....                                  | 17 |
| § 1.1.6 函数的奇偶性 .....                                  | 21 |
| § 1.1.7 反函数 .....                                     | 25 |
| § 1.1.8 指数函数 .....                                    | 29 |
| § 1.1.9 对数的概念及性质 .....                                | 32 |
| § 1.1.10 对数函数 .....                                   | 34 |
| § 1.1.11 对数换底公式及其推论 .....                             | 37 |
| § 1.1.12 指数方程与对数方程 .....                              | 38 |
| § 1.1.13 二次方程、二次不等式与一元二次函数 .....                      | 41 |
| 综合练习题 .....                                           | 46 |
| 单元测试题 .....                                           | 47 |
| 习题答案 .....                                            | 49 |
| 第二章 三角函数 .....                                        | 52 |
| § 1.2.1 基本概念 .....                                    | 52 |
| § 1.2.2 同角三角函数的基本关系 .....                             | 55 |
| § 1.2.3 诱导公式 .....                                    | 57 |
| § 1.2.4 三角函数的图象和性质 .....                              | 59 |
| § 1.2.5 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 ..... | 64 |
| § 1.2.6 正切函数、余切函数图象和性质 .....                          | 66 |
| 综合练习题 .....                                           | 69 |
| 单元测试题 .....                                           | 70 |
| 习题答案 .....                                            | 71 |
| 第三章 两角和与差的三角函数 .....                                  | 73 |
| § 1.3.1 两角和与差的三角函数 .....                              | 73 |
| § 1.3.2 三角函数的倍半关系 .....                               | 75 |
| § 1.3.3 三角函数的积化和差与和差化积 .....                          | 77 |
| § 1.3.4 解斜三角形 .....                                   | 79 |
| 综合练习题 .....                                           | 81 |
| 单元测试题 .....                                           | 82 |
| 习题答案 .....                                            | 83 |
| 第四章 反三角函数和简单三角方程 .....                                | 85 |
| § 1.4.1 反三角函数 .....                                   | 85 |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| § 1.4.2 简单的三角方程解法 .....        | 89  |
| 综合练习题 .....                    | 93  |
| 单元测试题 .....                    | 95  |
| 习题答案 .....                     | 96  |
| <b>第五章 不等式</b> .....           | 98  |
| § 1.5.1 不等式的性质及证明 .....        | 98  |
| § 1.5.2 不等式的解法 .....           | 102 |
| § 1.5.3 不等式的应用举例 .....         | 106 |
| 综合练习题 .....                    | 109 |
| 单元测试题 .....                    | 110 |
| 习题答案 .....                     | 112 |
| <b>第六章 数列与数列极限</b> .....       | 114 |
| § 1.6.1 数列与数列性质 .....          | 114 |
| § 1.6.2 等差数列 .....             | 114 |
| § 1.6.3 等比数列 .....             | 116 |
| § 1.6.4 数列求和 .....             | 117 |
| § 1.6.5 等差与等比数列综合应用举例 .....    | 118 |
| § 1.6.6 数列极限 .....             | 121 |
| 综合练习题 .....                    | 123 |
| 单元测试题 .....                    | 124 |
| 习题答案 .....                     | 125 |
| <b>第七章 复数</b> .....            | 127 |
| § 1.7.1 复数的有关概念 .....          | 127 |
| § 1.7.2 复数的运算 .....            | 130 |
| § 1.7.3 复数的模、辐角、共轭、方根的性质 ..... | 132 |
| § 1.7.4 复数运算的几何意义 .....        | 136 |
| § 1.7.5 复数模与辐角主值的最值 .....      | 140 |
| § 1.7.6 复数与方程 .....            | 141 |
| § 1.7.7 复数与几何 .....            | 143 |
| § 1.7.8 复数与三角 .....            | 145 |
| 综合练习题 .....                    | 146 |
| 单元测试题 .....                    | 148 |
| 习题答案 .....                     | 149 |
| <b>第八章 排列组合、二项式定理</b> .....    | 152 |
| § 1.8.1 排列组合 .....             | 152 |
| § 1.8.2 二项式定理 .....            | 154 |
| 综合练习题 .....                    | 154 |
| 习题答案 .....                     | 156 |

## 第二编(立体几何)

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| <b>第一章 直线与平面</b> .....  | 157 |
| § 2.1.1 平面的基本性质 .....   | 157 |
| § 2.1.2 两条直线的位置关系 ..... | 161 |
| § 2.1.3 空间直线和平面 .....   | 165 |
| § 2.1.4 空间两个平面 .....    | 170 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 综合练习题 .....              | 175 |
| 单元测试题 .....              | 176 |
| 习题答案 .....               | 178 |
| <b>第二章 多面体和旋转体</b> ..... | 182 |
| § 2.2.1 多面体 .....        | 182 |
| § 2.2.2 旋转体 .....        | 187 |
| § 2.2.3 多面体与旋转体的体积 ..... | 192 |
| 综合练习题 .....              | 199 |
| 单元测试题 .....              | 201 |
| 习题答案 .....               | 202 |

## 第三编(平面解析几何)

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| <b>第一章 直线</b> .....         | 204 |
| § 3.1.1 有向线段、定比分点 .....     | 204 |
| § 3.1.2 直线的方程 .....         | 206 |
| § 3.1.3 两条直线的位置关系 .....     | 209 |
| 综合练习题 .....                 | 212 |
| 单元测试题 .....                 | 213 |
| 习题答案 .....                  | 215 |
| <b>第二章 圆锥曲线</b> .....       | 216 |
| § 3.2.1 充要条件 .....          | 216 |
| § 3.2.2 曲线和方程 .....         | 217 |
| § 3.2.3 圆的方程 .....          | 220 |
| § 3.2.4 直线与圆、圆与圆的位置关系 ..... | 223 |
| § 3.2.5 圆系 .....            | 225 |
| § 3.2.6 椭圆 .....            | 227 |
| § 3.2.7 双曲线 .....           | 231 |
| § 3.2.8 抛物线 .....           | 240 |
| § 3.2.9 坐标轴的平移 .....        | 245 |
| 综合练习题 .....                 | 248 |
| 单元测试题 .....                 | 250 |
| 习题答案 .....                  | 252 |
| <b>第三章 参数方程与极坐标</b> .....   | 256 |
| § 3.3.1 参数方程 .....          | 256 |
| § 3.3.2 极坐标系 .....          | 267 |
| § 3.3.3 曲线的极坐标方程 .....      | 268 |
| § 3.3.4 圆锥曲线的极坐标方程 .....    | 271 |
| § 3.3.5 极坐标与直角坐标互化 .....    | 273 |
| § 3.3.6 等速螺线 .....          | 275 |
| § 3.3.7 应用举例 .....          | 276 |
| 综合练习题 .....                 | 278 |
| 单元测试题 .....                 | 281 |
| 习题答案 .....                  | 282 |

# 第一编 (代 数)

## 第一章 幂函数、指数函数和对数函数

### § 1.1.1 集合

#### 【知识点归纳】

##### 1. 集合的描述

每一组对象的全体形成一个集合,每一个对象称这个集合的元素。

##### 2. 集合的特征

(1)元素的确定性:即某一元素是与不是集合中的元素,二者必居其一。

(2)元素的元序性:即元素之间无次序之分。

(3)元素的互异性:即集合中的元素不能相同。

##### 3. 集合的表示方法

(1)列举法:把集合中的元一一列举出来写在大括号内表示集合的方法。

(2)描述法:把集合中的元素的公共属性描述出来,写在大括号内表示集合的方法。

(3)文氏图法如图 1.1.1-1。

(4)字母法: $N, E, Q, R$ 。

注:数集表示方法为 $\{x|- \}$ ;点集表示方法为 $\{(x, y)|- \}$ 。

##### 4. 集合的分类

(1)有限集:含有有限个元素的集合。

(2)无限集:含有无限个元素的集合。

##### 5. 元素与集合的关系

$a \in A$  或  $a \notin A$

##### 6. 集合与集合的关系

(1)子集:对于两个集合  $A$  与  $B$ ,如果集合  $A$  的任一个元素都是集合  $B$  的元素,则集合  $A$  叫集合  $B$  的子集。表示方法  $A \subseteq B$  或  $B \supseteq A$ ,图 1.1.1-2。

(2)真子集:如果集合  $A$  是集合  $B$  的子集,且  $B$  中至少有一个元素不属于  $A$ ,则集合  $A$  叫集合  $B$  的真子集。表示方法:  $A \subset B$  或  $B \supset A$ ,如图 1.1.1-2。

(3)相等:对于两个集合  $A$  与  $B$ ,如果  $A \subseteq B$ ,同时  $B \subseteq A$ ,则称这两个集合相等。

注:① $\{a\}$ 与 $a$ 的区别;② $\emptyset$ 与 $0, \{0\}$ 的区别;③ $\emptyset \subseteq A$ ;④ $\emptyset \subset A (A \neq \emptyset)$ 。

##### 7. 集合的运算

(1)交集: $C = \{x|x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ,则  $C = A \cap B$ 。图示:1.1.1-3。

(2)并集: $C = \{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ,则  $C = A \cup B$ 。图示:1.1.1-4、1.1.1-5。

(3)补集:设  $I$  为集,  $A \subseteq I$ ,  $C = \{x|x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$ ,则  $C = \bar{A}$ 。图示:1.1.1-6。

#### 【例题】

1. 若  $3 \in \{0, 7, a^2 - 4a - 2, 2a - 3\}$ ,求实数  $a$  的值。

分析:从元素与集合的关系入手,一旦给定元素是已知集合的元素,由元素的确

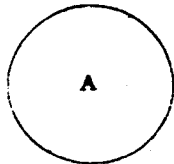


图 1.1.1-1

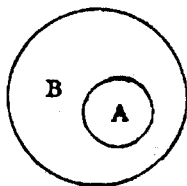


图 1.1.1-2

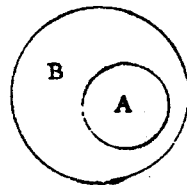


图 1.1.1-3

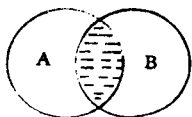


图 1.1.1-4

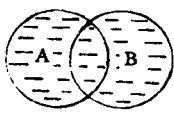


图 1.1.1-5

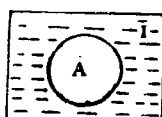


图 1.1.1-6

注:① $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ ; ② $A \cup \bar{A} = I, A \cap \bar{A} = \emptyset, \bar{\bar{A}} = A$ ; ③ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

定性,它必等于集合中的某一元素,本题由  $a$  的变化可得  $3 = a^2 - 4a - 2$ , 或  $3 = 2a - 3$  分类计算求  $a$  的值,根据元素的互异性,解完后应检验。

解:(1)当  $a^2 - 4a - 2 = 3$  时,解得  $a = 5$  或  $a = -1$ ,检验: $a = 5$  时,  $2a - 3 = 7$ (舍去),当  $a = -1$  时,  $2a - 3 = -5$  成立。

(2)当  $2a - 3 = 3$  时  $a = 3$ ,检验:  $a^2 - 4a - 2 = -5$ ,成立。所以,所求实数  $a$  的值为  $-1$  或  $3$ 。

小结:元素的确定性,互异性,无序性是集合的特征,在解有关元素与集合的关系问题时,必然要运用这三个特征,我们往往根据元素的确定性进行分类,利用互异性进行检验。

2. 若  $A = \{y | y = a^2 + 2a + 4, a \in \mathbb{R}\}, B = \{y | y = b^2 - 4b + 3, b \in \mathbb{R}\}$ ,试确定集合  $A, B$  的关系。

分析:集合  $A$  与集合  $B$  都是以描述法给出的集合,要明确集合的含义,必须从代表元素入手,  $y$  代表函数值,  $y$  是  $a^2 + 2a + 4$  的值,因此,  $\{y | y = a^2 + 2a + 4, a \in \mathbb{R}\}$  是二次函数  $y = a^2 + 2a + 4$  的函数值的集合,由公式  $y \geq \frac{4 \times 4 - 2^2}{4 \times 1} = 3$ ,同理,  $B$  中  $y \geq 1$ ,因此  $A \subseteq B$ 。

解:  $A = \{y | y = a^2 + 2a + 4, a \in \mathbb{R}\} = \{y | y \geq 3\}$   $B = \{y | y = b^2 - 4b + 3, b \in \mathbb{R}\} = \{y | y \geq -1\}$ ,  $\therefore A \subseteq B$ 。

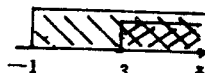


图 1.1.1-7

3. 已知集合  $A = \{x | 10 + 3x - x^2 \geq 0\}, B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$ ,当  $A \cap B = \emptyset$  时,求  $m$  的取值范围。

分析:首先将集合  $A$  化简,  $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$ ,由  $A \cap B = \emptyset$ ,则  $B$  分两类(1) $B = \emptyset$  即  $m + 1 > 2m - 1$ , (2) $B \neq \emptyset$ ,采用直观手段——数轴。

满足:  $\begin{cases} m + 1 \leq 2m - 1 \\ 2m - 1 < -2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} m + 1 \leq 2m - 1 \\ m + 1 > 5 \end{cases}$

解:化简集合  $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$ ,由  $A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset$ ,则(1) $B = \emptyset$ ,得  $m + 1 > 2m - 1$ ,解得  $m < 2$ 。(2) $B \neq \emptyset$ ,得:

$\begin{cases} m + 1 \leq 2m - 1 \\ 2m - 1 < -2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} m + 1 \leq 2m - 1 \\ m + 1 > 5 \end{cases}$  解得:  $m > 4$

由(1)、(2)得  $m$  的取值范围是  $m < 2$  或  $m > 4$ 。

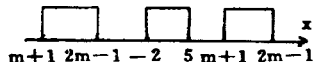


图 1.1.1-8

4. 已知集合  $A = \{(x, y) | y = -x + m\}, B = \{(x, y) | y = -x^2 - 2x + 3\}$ ,且  $A \cap B$  中有两个元素,求常数  $m$  的取值范围。

分析:本题有两种理解途径。

(1) $(x, y)$ 代表点,则  $A, B$  两个集合是点集。  $A$  集合代表直线  $y = -x + m$ ,  $B$  集合代表抛物线  $y = -x^2 - 2x + 3$ ,由  $A \cap B$  有两个元素根据元素的互异性,直线与抛物线有两个不同的交点,故联立方程运用  $\Delta > 0$ 。

(2)从交集的定义入手,  $A \cap B = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} y = -x + m \\ y = -x^2 - 2x + 3 \end{cases} \right\}$   $(x, y)$ 代表解,  $A \cap B$  有两个元素即方程组:  $\begin{cases} y = -x + m \\ y = -x^2 - 2x + 3 \end{cases}$  有两个不同的解,故  $\Delta > 0$ 。

解:  $\because A \cap B$  有两个元素  $\therefore$  方程组  $\begin{cases} y = -x + m & \text{①} \\ y = -x^2 - 2x + 3 & \text{②} \end{cases}$

有两个不同的解。将①代入②得:  $-x^2 - x + 3 - m = 0$ ,有两个不同的解。  $\therefore \Delta = 1 + 4(3 - m) > 0$ ,解得  $m < \frac{13}{4}$ 。故满足条件的  $m$  的取值范围是  $m < \frac{13}{4}$ 。

5. 全集  $I=R, A=\{x|2x^2-5x<0\}, B=\{x|6x^2-x-2\geq 0\}$ , 求  $\overline{A\cup B}, \overline{A\cap B}, \overline{A\cap B}, \overline{A\cup B}$ .

解:  $A=\{x|2x^2-5x<0\}=\{x|0<x<\frac{5}{2}\}$ ,

$B=\{x|6x^2-x-2\geq 0\}=\{x|x\leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x\geq \frac{2}{3}\}$ ,  $A\cap B=\{x|\frac{2}{3}\leq x<\frac{5}{2}\}$ ,  $\overline{A\cap B}=\{x|x<\frac{2}{3} \text{ 或 } x\geq \frac{5}{2}\}$ .

$A\cup B=\{x|x\leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x>0\}$ ,  $\overline{A\cup B}=\{x|-\frac{1}{2}<x\leq 0\}$ .

$\overline{A\cup B}=\{x|x\leq \frac{2}{3} \text{ 或 } x\geq \frac{5}{2}\}$   $\overline{A\cap B}=\{x|-\frac{1}{2}<x\leq 0\}$

小结: 通过比较四个集合的关系可得:  $\overline{A\cap B}=\overline{A\cup B}, \overline{A\cup B}=\overline{A\cap B}$

利用文氏图(或集合相等定义)可以证明: 在进行交、并、补的运算中, 运用集合运算这一性质, 可以使运算简捷.

例:  $I=\{x|x \text{ 为小于 } 20 \text{ 的正偶数}\}$ ,  $A\cap B=\{12, 14\}$ ,  $\overline{A\cap B}=\{2, 4, 16, 18\}$ ,  $\overline{A\cap B}=\emptyset$ , 求集合  $A, B$ .

分析: 解决问题①是充分运用直观手段——文氏图, ②是利用  $\overline{A\cap B}=\overline{A\cup B}$  简化运算过程, 可得  $A\cup B=I$ .

解:  $I=\{x|x \text{ 为小于 } 20 \text{ 的正偶数}\}=\{2, 4, 6, \dots, 16, 18\}$ ,  $\overline{A\cap B}=\overline{A\cup B}=\emptyset$ , 得  $A\cup B=I$ , 利用文氏图表示  $A\cap B=\{12, 14\}$ ,  $\overline{A\cap B}=\{2, 4, 16, 18\}$ ,  $\therefore A\cap B=\{6, 8, 10\}$ . 则  $A=(A\cap B)\cup(A\cap B)=\{12, 14, 16, 8, 10\}$ ,  $B=(\overline{A\cap B})(A\cap B)=\{2, 4, 16, 18, 6, 8, 10\}$ .

6. 其大学有外语教师 130 人, 其中教日语 40 人, 教英语 60 人, 教法语 35 人, 能教日和英语的 15 人, 能教英语和法语的 10 人, 能教法语和日语的 8 人, 能教英语、法语、日语的 6 人, 问不教英语、日语、法语的有多少人?

分析: 已知所给的条件, 是教英、日、法的人所构成的集合进行运算的结论. 它们与这三个集合所对应的文氏图划分的区域是一致的. 因此用文氏图解题就显得直观易懂.

解: 设某大学教外语的教师所构成的集合为全集  $I$ ,  $A, B, C$  分别为某大学教英、日、法语的人所构成的集合,  $n(s)$  表示有限集  $S$  中元素的个数.

由已知  $n(A\cap B\cap C)=6$

$n(A\cap B)=15$   $n(A\cap C)=10$   $n(B\cap C)=8$

$n(A)=60$   $n(B)=40$   $n(C)=35$   $n(I)=130$  得  $n[(A\cap B)\cap \bar{C}]=15-6=9$

$n[(A\cap C)\cap \bar{B}]=10-6=4$   $n[(B\cap C)\cap \bar{A}]=8-6=2$   $n[(A\cap \bar{B}\cap \bar{C})]=60-9-6-4=41$   $n[B\cap \bar{A}\cap \bar{C}]=40-9-6-2=23$   $n[C\cap \bar{A}\cap \bar{B}]=35-4-6-2=23$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=n[(A\cap B)\cap \bar{C}]+[(A\cap C)\cap \bar{B}]+n[(B\cap C)\cap \bar{A}]+n[A\cap \bar{B}\cap \bar{C}]+n[B\cap \bar{A}\cap \bar{C}]+n[C\cap \bar{A}\cap \bar{B}]=9+4+2+41+23+23=108$

故  $n(\overline{A\cup B\cup C})=130-108=32$ .

7. 设  $m, n, p, q \in \mathbb{Z}, M=\{x|x=12m+8n\}, N=\{x|x=20p+16q\}$ , 求证  $M=N$ .

分析: 根据两集合相等定义:  $M=N \Leftrightarrow M \subseteq N$  且  $N \subseteq M$ , 即证明: 对任意  $x \in M \Rightarrow x \in N$ , 且  $x \in N \Rightarrow x \in M$ .

证明: (1) 证  $M \subseteq N$

设:  $x \in M$ , 则  $x=12m+8n, m, n \in \mathbb{Z}$

而  $12m+8n=4(3m+2n)=20-16(3m+2n)=20(3m+2n)+16(-3m-2n)$

$\therefore m, n \in \mathbb{Z} \therefore 3m+2n, -3m-2n \in \mathbb{Z}$  设  $p=3m+2n$   $Q=-3m-2n$  则  $p, q \in \mathbb{Z}$

$\therefore x=20p+16q \in N$  故  $M \subseteq N$ .

(2) 证明  $N \subseteq M$

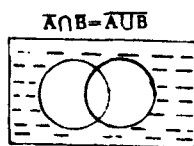


图 1.1.1-9

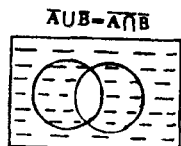


图 1.1.1-10

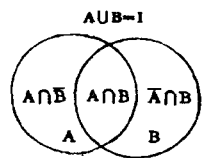


图 1.1.1-11

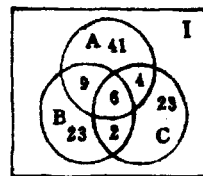


图 1.1.1-12

设  $x \in N$  则  $x = 20p + 16q$   $p, q \in z$  而  $20p + 16q = (12 - 8)p + 28q = 12p + 8(2q - p)$

$\therefore p, q \in z \therefore 2q - p \in z$  设  $p = m$   $2q - p = n$  则  $m, n \in z, x = 12m + 8n$

故  $N \subseteq M$ . 由(1)(2)得  $M = N$ .

### 【习题】

1. 在直角坐标系内,坐标轴上点的集合可表示为( ).

(A)  $\{(x, y) | x=0, y \neq 0; \text{或 } x \neq 0, y=0\}$  (B)  $\{(x, y) | x=0 \text{ 且 } y=0\}$

(C)  $\{(x, y) | xy=0\}$  (D)  $\{(x, y) | x, y \text{ 不同时为 } 0\}$

2. 设集合  $M = \{m | m \leq \sqrt{10}\}$ ,  $a = \sqrt{3}$  那么( ).

(A)  $a \subset M$  (B)  $a \in M$  (C)  $\{a\} \in M$  (D)  $\{a\} \subset M$

3. 给出下面六个关系式①  $0 \subset \{0, 1\}$  ②  $0 \in \{0, 1\}$  ③  $\emptyset \in \{0\}$  ④  $\emptyset \subset \{0\}$  ⑤  $\{0\} \subseteq \{0, 1\}$  ⑥  $\{0\} \subseteq \{0\}$  其中正确的是( ).

(A) ①、②、④、⑤ (B) ②、③、④、⑤ (C) ②、④、⑤ (D) ②、④、⑤、⑥

4. 设集合  $A = \{(x, y) | \frac{y}{1-x^2} = 1, x, y \in R\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = 1 - x^2, x, y \in R\}$ ,  $C = \{(x, y) | (x, y) \in B, \text{但 } (x, y) \notin A\}$  则  $B \cap C$  是( ).

(A)  $\{(1, -1)\}$  (B)  $\{(-1, 0)(1, 0)\}$  (C)  $\emptyset$  (D)  $\{(-1, 1)\}$

5. 适合  $\{1, 2\} \subseteq M \subset \{1, 2, 3, 4\}$  的集合  $M$  的个数是( ).

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 7

6.  $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in R\}$ ,  $N = \{y | y = x + 1, x \in R\}$  则  $M \cap N$  等于( ).

(A)  $\{(0, 1), (1, 2)\}$  (B)  $[1, +\infty)$  (C)  $\{0, 1\}$  (D)  $(0, 1)$

7. 由实数  $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$  所组成的集合最多含有元素的个数是( ).

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

8. 已知集合  $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ ,  $A = \{1, 3\}$  则集合  $B$  的子集最多可能有( ).

(A) 2 个 (B) 3 个 (C) 4 个 (D) 8 个

9. 对于集合  $x, y$ , 若  $x \subset y$ , 则下面集合中表示空集的是( ).

(A)  $x \cap \bar{y}$  (B)  $\bar{x} \cap y$  (C)  $\bar{x} \cap \bar{y}$  (D)  $x \cap y$

10. 集合  $M = \{1, 3, t\}$ ,  $N = \{t^2 - t + 1\}$ , 若  $M \cap N = M$ , 则  $t$  的值是( ).

(A) 1 (B) 2 (C) 2, 1, -1 (D) 2, 0, -1, 1

11. 已知  $M = \{\text{平行四边形}\}$ ,  $P = \{\text{菱形}\}$ ,  $Q = \{\text{矩形}\}$ ,  $T = \{\text{正方形}\}$ , 则下列判断中正确的是( ).

(A)  $Q \cup P = M$  (B)  $M \cup T = P \cup Q = M$

(C)  $(M \cap P) \cup M = M$  (D)  $(P \cap Q)$

12. 已知  $A = \{x | 10 + 3x - x^2 > 0\}$ ,  $B = \{x | m + 1 < x < 2m - 1\}$  若  $A \cap B = B$  则  $m$  的取值范围是( ).

(A)  $-3 \leq m \leq 3$  (B)  $m \leq 3$  (C)  $m \geq -3$  (D)  $m \leq 2$

13. 已知  $A = \{x | \frac{x+1}{2-x} < 0\}$ ,  $B = \{x | 4x + p < 0\}$  且  $B \subseteq A$  则实数  $P$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 设  $I = R$ ,  $M = \{m | \text{方程 } mx^2 - x + 1 = 0 \text{ 有实根}\}$ ,  $N = \{n | \text{方程 } x^2 - nx + 1 = 0 \text{ 有实根}\}$ , 则  $M \cap N =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知集合  $M = \{a, a+d, a+2d\}$   $N = \{a, aq, aq^2\}$  其中  $a \neq 0$  且  $M = N$ , 则  $q$  的值等于\_\_\_\_\_.

16. 已知  $(1, 2) \in A \cap B$ , 且  $A = \{(x, y) | ax - y^2 + b = 0\}$ ,  $B = \{(x, y) | x^2 - ay - b = 0\}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.

17. 已知  $A = \{x | x^2 + (2+m)x + 1 = 0, x \in R\}$ , 若  $A \cap R^+ = \emptyset$ , 则  $P$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

18. 已知  $I = \{x | x = 2n - 1, n \in N, \text{且 } n \leq 7\}$ ,  $A \cap B = \{3, 7\}$ ,  $\bar{A} \cap B = \{9, 13\}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 11\}$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_,  $B =$ \_\_\_\_\_.

19. 若  $\{x | (m+1)x^2 - (m-1)x + 3(m-1) < 0\} = R$ , 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

20. 对于适合  $|P| < 2$  的任一实数  $P$ , 定义集合  $A = \{x | x^2 + px + 1 > 2x + p\}$  则所有这样的集合  $A$  的交

集  $B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

21. 设全集  $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$ ,  $A = \{b, 2\}$ ,  $\bar{A} = \{5\}$ , 求实数  $a$  和  $b$  的值。

22. 已知  $A = \{x | x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$ ,  $B = \{x | x - 1 \geq 0\}$ ,  $C = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$

求 (1)  $A \cap B$   $\bar{A} \cap \bar{B}$ 。

(2) 设  $D = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$  求使  $D \cup C = \{x | x + 2 > 0\}$  且  $D \cap C = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$  的  $a, b$  的值。

23. 设  $S$  为满足下列两个条件的实数所构成的集合, (I)  $S$  内不含 1, (II) 若  $a \in S$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in S$ 。

(1) 若  $2 \in S$ , 则  $S$  中必存在其它两个数, 求出这两个数。

(2) 求证若  $a \in S$ , 则  $1 - \frac{1}{a} \in S$ 。

(3) 在集合  $S$  中, 元素的个数能否只有一个? 为什么?

24. 设集合  $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - ax + 2 = 0\}$  若  $A \cup B = A$ , 求  $a$  的值组成的集合。

25. 某班 50 人中, 数学爱好者 30 人, 化学爱好者 26 人, 求数学与化学都爱好的可能人数的最大值与最小值。

26. 某年级先后举行数、理、化三科竞赛, 学生至少参加一科的, 数学 220 人, 物理 185 人, 化学 170 人, 参加两科的数学、物理 154 人, 数学化学 120 人, 物理、化学 102 人, 三科都参加的 90 人, 求参加竞赛的学生总人数。

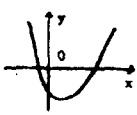
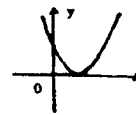
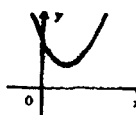
## § 1.1.2 一元二次不等式

### 【知识点归纳】

#### 1. 绝对值不等式

|           | $a > 0$            | $a = 0$     | $a < 0$     |
|-----------|--------------------|-------------|-------------|
| $ x  > a$ | $x < -a$ 或 $x > a$ | $x \neq 0$  | $R$         |
| $ x  < a$ | $-a < x < a$       | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

#### 2. 一元二次不等式

| $\Delta = b^2 - 4ac$                  | $\Delta > 0$                                                                                     | $\Delta = 0$                                                                                     | $\Delta < 0$                                                                                      |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = ax^2 + bx + c$<br>( $a > 0$ )    | <br>图 1.1.2-1 | <br>图 1.1.2-2 | <br>图 1.1.2-3 |
| $ax^2 + bx + c = 0$<br>( $a \neq 0$ ) | $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$                                                   | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$                                                                      | $\emptyset$                                                                                       |
| $ax^2 + bx + c > 0$<br>( $a > 0$ )    | $\{x   x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$                                                             | $\{x   x \in R \text{ 且 } x \neq -\frac{b}{2a}\}$                                                | $R$                                                                                               |
| $ax^2 + bx + c < 0$<br>( $a < 0$ )    | $\{x   x_1 < x < x_2\}$                                                                          | $\emptyset$                                                                                      | $\emptyset$                                                                                       |

注: 当二次项系数是负数的不等式, 可以先化成二次项系数是正数的不等式, 再求它的解集。

### 【例题】

1. 解不等式  $|x - 3| > x - 1$ 。

分析: 本题有两种解法 (1) 从绝对值定义入手, 分  $x - 3 \geq 0$  与  $x - 3 < 0$  去绝对值。 (2) 从绝对值不等式的解法入手, 分  $x - 1 \geq 0$  与  $x - 1 < 0$  来解。

解法(一):  $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 > x-1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x-3 < 0 \\ -(x-3) > x-1 \end{cases}$  解得:  $x < 2$

$\therefore$  原不等式的解集为  $\{x|x < 2\}$

解法(二): 当  $x-1 < 0$ , 即  $x < 1$  时, 不等式成立。

当  $x-1 \geq 0$  时, 得  $x-3 > x-1$  或  $x-3 < -(x-1)$ , 即  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 > x-1 \text{ 或 } x-3 < -(x-1) \end{cases}$

解得  $\{x|x < 2\}$

2. 解不等式  $|x-2| + |x+3| > 5$ 。

分析: 本题应运用绝对值的定义去绝对值符号。 $|x-2|$  分  $x \geq 2$  与  $x < 2$  来去绝对值, 而  $|x+3|$  则分  $x \geq -3$  与  $x < -3$  去绝对值, 综合起来, 本题应分  $x < -3$ ,  $-3 \leq x < 2$ ,  $2 \leq x$  去绝对值符号。

解:  $\begin{cases} x < -3 \\ -(x-2) - (x+3) > 5 \end{cases}$  或  $\begin{cases} -3 \leq x < 2 \\ -(-) + (x+3) > 5 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2) + (x+3) > 5 \end{cases}$

解得  $x < -3$  或  $x > 2$

$\therefore$  原不等式的解集为  $\{x|x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$ 。

3. 已知:  $x^2 + ax + b < 0$  的解集为  $\{x|2 < x < 3\}$ , 求  $bx^2 + ax + 1 > 0$  的解集。

分析: 解本题的关键是确定  $a, b$  的取值由不等式的解法知:  $x^2 + ax + b = 0$  的  $\Delta > 0$  时, 有两个不等实根  $x_1, x_2$ , 设  $x_1 < x_2$ , 所以  $x_1 = 2, x_2 = 3$ 。运用韦达定理就可以确定  $a$  与  $b$  的值。

解: 由韦达定理  $\begin{cases} -a = 2+3, \\ b = 2 \times 3 \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} a = -5 \\ b = 6 \end{cases}$   $bx^2 + ax + 1 > 0$  即:  $6x^2 - 5x + 1 > 0$

解集为  $\{x|x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$ 。

4. 求不等式  $6x^2 - ax - a^2 < 0$  的解集 ( $a \in R$ )。

分析: 由一元二次不等式的解题步骤: (1)  $\Delta = 25a^2 \geq 0$ , (2) 当  $a = 0, \Delta = 0$  时解集为  $\emptyset$ , 当  $a \neq 0$  时, 求根为  $-\frac{a}{2}$ , 要想写出解集, 必须判断根的大小关系, 所以将  $a$  分成两类:  $a > 0$  或  $a < 0$ 。

解: 当  $a = 0$  时,  $\dots = 0$  原不等式解集为  $\emptyset$ 。

当  $a \neq 0$  时, 方程的根为  $-\frac{a}{3}, -\frac{a}{2}$  故  $a > 0$  时,  $-\frac{a}{3} < -\frac{a}{2}$ , 解集为  $\{x|-\frac{a}{3} < x < -\frac{a}{2}\}$

$a < 0$  时,  $-\frac{a}{2} < -\frac{a}{3}$ , 解集为  $\{x|-\frac{a}{2} < x < -\frac{a}{3}\}$ 。

本题对  $a$  进行分类讨论, 源于一元二次不等式的解法 (1) 判别式  $\Delta$  的取值范围不同, 解集不同, (2) 根的大小不同, 解集不同。

5. 对任意  $x \in R, \frac{1}{mx^2 + mx + 2}$  恒有意义, 求  $m$  的取值范围。

分析: 本题可等价转化为: 对任意  $x \in R, mx^2 + mx + 2 > 0$  恒成立, 即  $mx^2 + mx + 2 > 0$  的解集为全体实数。参照一元二次不等式的解法必须满足  $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ , 另  $m = 0$  时, 也应检验。

解: 本题即  $mx^2 + mx + 2 > 0$  的解集为  $R$  当  $m = 0$  时,  $2 > 0$  恒成立, 当  $m \neq 0$  时, 应满足  $\begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 8m < 0 \end{cases}$  解得  $0 < m < 8$ 。  $\therefore m$  的取值范围是  $0 \leq m < 8$ 。

### 【习题】

1. 已知集合  $A = \{x|-x^2 + 5x - 6 \leq 0\}, B = \{x||2x-1| < 1\}$ , 则  $A \cap B$  为 ( )。

(A)  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$  (B)  $(0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, 1)$  (C)  $-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  (D)  $\emptyset$

2. 若不等式  $ax^2 + bx + 2 > 0$  的解集是  $\{x|-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\}$ , 则  $a-b$  的值为 ( )。

(A) -10 (B) -14 (C) 10 (D) 14

3. 已知不等式  $x^2 - 4x + 3 < 0 \dots \textcircled{1}, x^2 - 6x + 8 < 0 \dots \textcircled{2}, 2x^2 - 9x + a < 0 \dots \textcircled{3}$ , 要使满足  $\textcircled{1}$  且  $\textcircled{2}$  的  $x$  也满足  $\textcircled{3}$ , 则 ( )。

(A)  $a > 9$  (B)  $a = 9$  (C)  $a \leq 9$  (D)  $0 < a \leq 9$

4. 已知  $A = \{x \mid |3x-2| \geq 3\}$ ,  $B = \{x \mid (7-2x)(5x+3x) > 0\}$ , 则  $A \cup B$  为( ).  
 (A)  $(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{5}{3}, \frac{7}{2})$  (B)  $(-\infty, -\frac{5}{3}) \cup [-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}] \cup [\frac{7}{2}, +\infty)$  (C)  $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup (-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}) \cup [\frac{7}{2}, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$
5. 已知  $A = \{x \mid (x-1)^2 > -1\}$ ,  $B = \{x \mid -x^2+2x-3 > 0\}$ ,  $C = \{x \mid |2x-3| \leq 0\}$ , 则( ).  
 (A)  $B = C \subset A$  (B)  $B \subset C \subset A$  (C)  $C \subset B \subset A$  (D)  $A = B = C$
6. 已知  $A = \{x \mid 2x+m \leq 0\}$ ,  $B = \{x \mid -6x^2+13x-6 < 0\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $m$  的取值范围是( ).  
 (A)  $m \geq -3$  (B)  $m < -\frac{4}{3}$  (C)  $m > -\frac{4}{3}$  (D)  $m > -3$
7. 已知  $A = \{x \mid 2x^2+4mx+3m-1=0\}$ , 若  $A \cap R^-$  中含两个元素, 则  $m$  的取值范围是( ).  
 (A)  $m > \frac{1}{3}$  (B)  $m < \frac{1}{2}$  或  $m > 1$  (C)  $\frac{1}{3} < m \leq \frac{1}{2}$  或  $m \geq 1$  (D)  $\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$  或  $m > 1$
8. 已知  $A = \{x \mid x(x+2) \leq x(3-x)+1\}$ ,  $B = \{1, a-3, a^2-2a-3\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $a$  的值为( ).  
 (A) -1 或 3 (B) -1 (C) 3 (D) 4
9. 若不等式  $kx^2-2x+6k < 0$  ( $k \neq 0$ ) 的解集为  $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > -2\}$ , 则  $k$  的值为\_\_\_\_\_.
10.  $A = \{x \mid |3x-8| < 13\}$ ,  $B = \{x \mid \frac{x}{2}+4 \geq 7\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
11.  $A = \{x \mid -6x^2-x+2 \leq 0\}$ ,  $B = \{x \mid 3x^2-7x+2 < 0\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
12. 方程  $mx^2-(1-m)x+m=0$  有实根, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
13. 若对任意实数  $x$ ,  $\frac{1}{mx^2+mx+2}$  恒成立, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
14. 设  $A = \{x \mid x^2+(a+2)x+1=0\}$ , 且  $R^+ \cap A = \emptyset$ , 则  $a$  取值范围是\_\_\_\_\_.
15. 求不等式  $x^2-2x-a > 0$  ( $a$  为常数) 的解集.
16. 求不等式  $|x-2|+|x+3| > 5$  的解集.
17. 解不等式  $|x^2-x| < \frac{1}{2}x$ .
18.  $m$  为何值时,  $\frac{2x^2+2mx+m}{4x^2+6x+3} < 1$  对任意的实数  $x$  恒成立.
19. 已知  $A = \{x \mid |x - \frac{(a+1)^2}{2}| \leq \frac{(a-1)^2}{2}\}$ ,  $B = \{x \mid x^2-3(a+1)x+2(3a+1) \leq 0\}$  ( $a \in R$ ), 求使  $A \subseteq B$  的  $a$  的取值范围.
20. 解不等式  $(1-m)x^2+2mx-(m+z) > 0$  ( $m \in R$ ).

### § 1.1.3 映射与函数

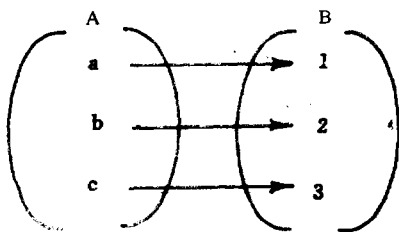
#### 【知识点归纳】

##### 1. 映射

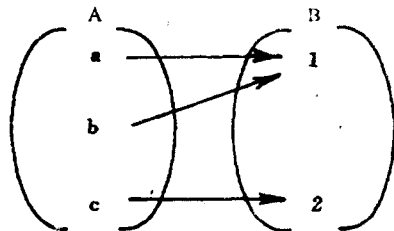
(1) 理解映射. ①  $A, B$  可以是数集, 也可以是点集或其它集合两个集合有先后次序, 即  $f: A \rightarrow B$  与  $f: B \rightarrow A$  截然不同, 表示两种不同映射; ②  $f: A \rightarrow B$ ,  $A$  中的元素  $a$  对应的  $B$  中元素  $b$  叫(在  $f$  下)的象,  $a$  叫  $b$  的原象; ③ 集合  $A$  中一个元素都有象, 并且象是唯一的,  $A$  中两个(或多个)元素可以有相同的象; ④ 不要求集合  $B$  中每一个元素都有原象, 即  $B$  中可以有有些元素是  $A$  中元素的象,  $\{象\} \subseteq B$ .

(2) 形成映射的几种对应方法.

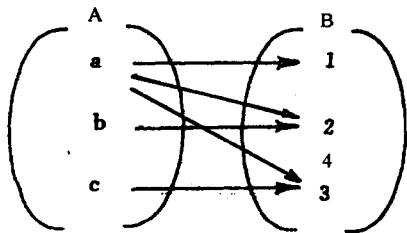
①  $1 \rightarrow 1$



② 多  $\rightarrow$  1



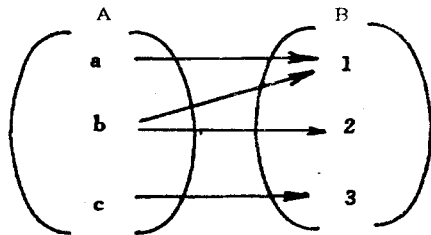
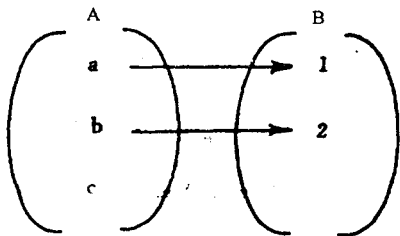
③ B 集合中可有多余元素



(3) 不能构成映射折对应。

① A 中存在元素在 B 中无象

②  $1 \rightarrow$  多



## 2. 函数

定义: 函数  $y=f(x)$  是定义域到值域的映射  $y=f(x)$ 。

(1) 理解函数。①  $f: A \rightarrow B$  中,  $A = \{x | y = f(x)\}$ ,  $B = \{y | y = f(x)\}$  ②  $A, B$  是非空的数集; ③  $B$  中每个元素在  $A$  中都有原象,  $\{象\} = B$ 。

(2) 理解  $y=f(x)$ 。①  $y=f(x)$  表示“ $y$  是  $x$  的函数”是一个函数的符号; ②  $x$  表示自变量,  $f$  表示对应法则,  $y$  为  $x$  在  $f$  下的函数值; ③ 对应法则  $f$  的表达形式有: 数表、图表、解析式等方式, 在中学, 函数的对应法则大多以解析式表示, 当函数以解析式  $y=f(x)$  表示时  $f$  可以理解为: 由  $x$  算  $y$  的一种“算法”例  $f(x) = 2x^2 + 1$  对应法则  $f$  表示: 自变量的平方除以 2 再减去 1,  $f(\Delta) = 2\Delta^2 + 1$ , 不管自变量  $\Delta$  发生怎样的变化, 只要  $f$  不变就可以算出新的解式, 如: 求  $f(\frac{x}{2})$ ,  $f(x^2 + 1)$ ,  $f[f(x)]$ 。可得  $f(\frac{x}{2}) = 2 \times (\frac{x}{2})^2 + 1 = \frac{x^2}{2} + 1$ ,  $f(x^2 + 1) = 2 \times (x^2 + 1)^2 + 1 = 2x^4 + 8x^2 + 3$ ,  $f[f(x)] = 2[f(x)]^2 + 1 = 2(2x^2 + 1)^2 + 1 = 8x^2 + 8x + 3$ 。

### 【例题】

1. 设集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 3, 7, 15, 31, 33\}$  下面的对应法则能构成从  $A$  到  $B$  的映射是 ( )。

(A)  $f: x \rightarrow x^2 - x + 1$  (B)  $f: x \rightarrow x + (x-1)^2$  (C)  $f: x \rightarrow 2^{x-1} - 1$  (D)  $f: x \rightarrow 2^x - 1$

分析: 根据定义, 要检验  $A$  中的任一元素按对应法则  $f$ , 在  $B$  中是否都有唯一元素和它对应。(A) 当  $x = 4$  时  $x^2 - x + 1 = 13 \notin B$ , (B) 当  $x = 4$  时  $x + (x-1)^2 = 13 \notin B$ , (C) 当  $x = 1$  时  $2^{x-1} - 1 = 0 \notin B$ , 故 (A)、(B)、(C) 都不能构成  $A$  到  $B$  的映射, 再作一一检验, 可知 (D) 构成从  $A$  到  $B$  的映射。解选 (D)。

2. 已知  $A = R$  (实数集),  $B = \{(x, y) | x, y \in R\}$ ,  $f: A \rightarrow B$  是从  $A$  到  $B$  的映射  $f: x \rightarrow (x+1, x^2+1)$ , 求  $A$  中元素  $\sqrt{2}$  的象,  $B$  中元素  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$  的原象。

分析:求  $A$  中元素  $\sqrt{2}$  的象,实际上即求当  $x=\sqrt{2}$  时  $x+1$  与  $x^2+1$  的值,求  $B$  中元素  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$  的

原象,实际上即解方程组 
$$\begin{cases} x+1=\frac{3}{2} \\ x^2+1=\frac{5}{4} \end{cases}$$
 求  $x$ 。

解:当  $x=\sqrt{2}$  时,  $x+1=\sqrt{2}+1$ ,  $x^2+1=3$ , 故  $\sqrt{2}$  的象是  $(\sqrt{2}+1, 3)$

由  $\begin{cases} x+1=\frac{3}{2} \\ x^2+1=\frac{5}{4} \end{cases}$  解得  $x=\frac{1}{2}$ , 故  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$  的原象是  $\frac{1}{2}$ 。

3. 集合  $M=\{a, b, c\}$ ,  $N=\{-1, 0, 1\}$ , 从  $M$  到  $N$  的映射  $f$  满足  $f(a)-f(b)=f(c)$  那么映射  $f$  的个数是( )。

(A)2 (B)4 (C)6 (D)7

分析:要找一个分类标准,按  $a \rightarrow -1, a \rightarrow 0, a \rightarrow 1$  分类:

(一)  $a \rightarrow -1$   $b \rightarrow -1$   $f(a)-f(b)=-1-(-1)=0 \Rightarrow c \rightarrow 0$

$a \rightarrow -1$   $b \rightarrow 0$   $f(a)-f(b)=-1-0=-1 \Rightarrow c \rightarrow -1$

$a \rightarrow -1$   $b \rightarrow 1$   $f(a)-f(b)=-1-1=-2 \notin N$  不成立

(二)  $a \rightarrow 0$   $b \rightarrow -1$   $f(a)-f(b)=0-(-1)=1 \Rightarrow c \rightarrow 1$

$a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$   $f(a)-f(b)=0-0=0 \Rightarrow c \rightarrow 0$

$a \rightarrow 0, b \rightarrow 1, f(a)-f(b)=0-1=-1 \Rightarrow c \rightarrow -1$

$a \rightarrow 1, b \rightarrow -1, f(a)-f(b)=1-(-1)=2 \notin N$  不成立

$a \rightarrow 1, b \rightarrow 0, f(a)-f(b)=1-0=1 \Rightarrow c \rightarrow 1$

$a \rightarrow 1, b \rightarrow 1, f(a)-f(b)=1-1=0 \Rightarrow c \rightarrow 0$

故满足条件的映射共  $2+3+2=7$  种解选(D)。

4. 下列函数中,与函数  $y=x$  是相同的函数是( )。

(A)  $y=\sqrt{x^2}$  (B)  $y=\frac{x^2}{|x|}$  (C)  $y=\sqrt[3]{x^3}$  (D)  $y=(x^{\frac{1}{2}})^2$

分析:函数的三要素是判断两个函数是否相同的依据,只有三要素分别相同的函数才是相同的函数,三要素之一不同的函数就不是同一个函数,由于函数的定义域和对应法则决定了函数的值域,判断两个函数是相同的,只要判断其定义域和对应法则分别相同即可,并且对应法则相同的含义是二种法则是等价的,并不要求外在形式上相同。

由于  $y=\sqrt{x^2}=|x|$ , 它不同于  $y=x$ ,  $y=\frac{x^2}{|x|}=|x|$  定义域是  $\{x|x \in R \text{ 且 } x \neq 0\}$ ,  $y=(x^{\frac{1}{2}})^2$  的定义域是  $\{x|x \geq 0\}$  它们的定义域都与  $y=x$  的定义域不同。

故(A)、(B)、(D)与  $y=x$  不是相同函数。

而只有  $y=\sqrt[3]{x^3}=x$  定义域、值域和对应法则才分别相同,它们是相同的函数。解:选(C)。

5. 求函数  $f(x)=\sqrt{4x-3-x^2}+(x-2)^0+\frac{x}{\sqrt[3]{2x^2-x-3}}$  的定义域。

分析:给定函数解析式求定义域的问题,所求函数定义域就使函数解析式有意义的自变量的取值范围,这里必须掌握各类基本函数定义域,如

解:欲使函数解析式有意义,  $x$  必须满足

$$\begin{cases} 4x-3-x^2 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ 2x^2-x-3 \neq 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x \neq 2 \\ x \neq -1, x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

即  $1 \leq x \leq 3$  且  $x \neq 2, x \neq \frac{3}{2}$

$\therefore f(x)$  的定义域是  $\{x|1 \leq x \leq 3 \text{ 且 } x \neq 2, x \neq \frac{3}{2}\}$

6. 已知  $f(x)$  的定义域是  $[-3, 3]$  求函数  $f(x^2-1)$  的定义域。