学校 一流老师 一流资源

三一丛书

概率统计

要点与解题

吴云江 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交大教学资源文库　三一丛书

概率统计

要点与解题

吴云江　编著

西安交通大学出版社

内容提要

本书按工学、医学、经济学各专业的本科教学和硕士研究生入学考试的大纲，精选了一批有代表性的和可开拓思路的概率统计题目(也包括基本训练的题目)，每题除详尽的解答外，全部配有注释(对题目的说明，解题易犯的错误等)，各章有精练的基本知识提要(便于读者查阅)和自测练习题。

本书可供考研和本、专科学习概率统计的学生做解题训练和学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计要点与解题 / 吴云江编著．—西安：西安交通大学出版社，2006.8
(西安交大教学资源文库．三一 丛书)
ISBN 7-5605-2226-2

Ⅰ．概… Ⅱ．吴… Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 064454 号

书　　名：概率统计要点与解题
编　　著：吴云江
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路 25 号(邮编：710049)
电　　话：(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷：陕西新世纪印刷厂
字　　数：206 千字
开　　本：880 mm×1 230 mm　1/32
印　　张：5.75
版　　次：2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-5605-2226-2/O·240
定　　价：9.00 元

丛书总序

为了使普通高等学校理工类专业的大学生更好地学习、掌握基础课和专业基础课知识，我们组织出版了这套“三一”丛书，目的就是**提供一流的学习资源，使大家共享一流教师的教学经验和教学成果**，为今后的学习打下良好的基础。

西安交通大学是国内仅有的几所具有百年历史的高等学府，是首批进入国家“211 工程”建设的七所大学之一，1999 年被国家确定为我国中西部地区惟一一所以建设世界知名高水平大学为目标的学校。西安交大历来重视本科生教学，1996 年成为全国首家本科教学评估为优秀的大学。学校拥有国家级、省部级、校级教学名师数十名，具有丰富的、一流的教学资源。本丛书均由西安交通大学长期在教学一线主讲的教授、副教授主编，他们具有丰富的基础课、专业基础课教学和辅导经验。丛书作者们在长期的教学实践中，**深深了解学生在学习基础课、专业基础课时的难点和困惑点之所在，对如何使学生更有效地学习、掌握课程的基本知识和解题技巧进行了深入的探索和研究，并将成果体现于书中。**

本丛书针对中少学时课程的特点和教学要求，**以普通高等学校的学生为主要对象，不拘泥于某一本教材，而是将有特色和使用量较大的各种版本的教材加以归纳总结**，取其精华，自成一体。书中对课程的基本内容、研究对象、教学要求、学习方法、解题思路进行了全面、系统的

总结和提炼，按基本知识点、重点与难点、典型题解析、自我检测题等环节进行编排。本丛书既可单独使用，也可与其他教材配合使用。

我们衷心希望本丛书成为您大学基础课和专业基础课学习阶段的良师益友，帮助您克服困难，进入大学学习的自由王国，并祝您早日成为国家的栋梁之材！

在学习使用过程中，您如果发现书中有不妥之处或有好的建议，敬请批评指正并反馈给我们，我们会进一步改进自己的工作，力争使您满意。

真诚感谢您使用西安交大版图书。

西安交大出版社网址：http://press.xjtu.edu.cn

http://www.xjtupress.com

理工医事业部信箱：jdlgy31@126.com

西安交通大学出版社

2006年6月

前　言

有人说概率论与数理统计很难学，其实那是未得要领。

概率论中最难的是古典概型的题目，但这并不是重点（在有时间、精力的时候，做些古典概型的题可以培养自己的分析、归纳能力和想象力，当然还要看兴趣了），最繁的是“随机变（向）量函数的分布”的题目，但这主要难在解函数不等式、求积分（上、下限可能是变量）这些“概率圈外”的内容上。对非数学专业的学生而言，随机变量部分应明确：当随机变量的分布列（离散型）、概率密度（连续型）和分布函数这三个量已知其中之一时，这个随机变量就算完全彻底地告诉你了，这时题目问关于这个随机变量的一切（无非是上述三个量的互求、求概率、函数的分布、数字特征、函数的期望，高维时还可求边缘分布、判独立性、求条件分布），你都应会求。理顺这个思路，主要的公式、方式就可以串起来记忆了。剩下的如概率的性质、数字特征的性质、全概率公式、中心极限定理等应该不觉得难了吧？

数理统计部分呢？可能自学时有点费劲。其实，主要是记住三个特殊分布的构成（重点不是记分布），再熟悉一个定理（正态总体下样本均值、方差的分布），就掌握了“抽样分布”这一入门知识，后面再掌握点估计的两种方法（以及 3 个主要的评选标准），一批区间估计、假设检验的公式，这只需做一些基本的题目，就能基本掌握（本书未涉及回归分析、方差分析等后边的内容）。

本书按概率统计的章节，选了一些典型的题目，包括基本训练题和一些易混淆的题，而对解题思路、方法相近的题目，一般不重复选，过于容易的“送分”题也尽量少选。有的题是“开眼界”的，如果读者觉得太难，就“仅供参考”。各章有基本要求、基本内容和重点难点（把主要内容都过了一遍），帮助读者复习基本知识。每题后有注释，说一说解题

的关键处、学生易犯的错误或关于此题的一些说明，相当于作者与读者的“交谈”，对做题后愿意多思考一会儿的读者，估计会有帮助。

本书数理统计采用“下侧”分位数，注意与上侧分位数相区别。

本书难免有不足之处，欢迎广大读者批评指正。

编者

2006 年 4 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　基本要求

1. 了解随机事件的定义和基本的关系、运算.
2. 知道概率空间和概率的公理化定义、统计学定义.
3. 理解、掌握概率的性质.
4. 会计算古典概率和几何概率.
5. 理解条件概率，掌握乘法公式、全概率公式和 Bayes(贝叶斯) 公式.
6. 理解事件的独立性的定义，掌握独立性的应用和贝努利概型.

1.2　基本内容提要

1. 随机事件(可简称"事件") 是指在一次试验中可能发生也可能不发生的事件，如抛硬币一次——(随机) 试验，而"出现正面"——(随机) 事件. 试验中必然发生的事件(称为"必然事件"，记为 Ω) 和不可能发生的事件(称为"不可能事件"，记为 $\varnothing$) 可以看成特殊的随机事件.

2. 若事件 A 发生必导致事件 B 发生，称 B 包含 A，记作 $A \subset B$.

若事件 A、B 至少一个发生(即 A 或 B 发生)，称 A 并 B 发生，记作 $A \cup B$(有的书上记成 $A+B$).

若事件 A、B 都发生，称 A 交 B 发生，记作 $A \cap B$ 或 AB.

若事件 A 发生而 B 不发生，称 A 减 B 发生，记作 $A-B$(这种事件称为差事件).

若事件 A 不发生，称 A 的对立事件(或称补事件) 发生，记作 $\overline{A}$.

若事件 A、B 有关系：$AB=\varnothing$(即不可能同时发生)，称 A 与 B 互不相容(有时称为互斥).

若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：(1) $\forall i, j=1,2,\cdots,n, i \neq j$ 时，有 $A_iA_j=\varnothing$(即 $A_1,\cdots,A_n$ 中任意两个不相容)；(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$. 则称事件组 $A_1,\cdots,A_n$ 为互不相容完备事件组.

3. 事件的并、交运算具有我们熟悉的交换律、结合律和相互间的分配律. 如 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这 n 个事件至少发生一个，而 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$ 表示它们都发生.

常见的运算式有：$A\bar{B} = A - B = A - AB$ 及 $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \bar{A}_i$，$\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \bar{A}_i$（此为对偶律，又称为德·摩根原则. 记忆口诀：长杠变短杠，开口换方向）

其他的关系和运算较简单，不再详细列举，如：① 如果 $A \subset B$，则 $\bar{A} \supset \bar{B}$，$AB = A$，$A \cup B = B$；② 若 $AB = \varnothing$，则 $(AC)(BD) = \varnothing$；③ $AB \subset A \subset (A \cup B)$；④ $A \subset \Omega$，$\varnothing \subset A$；⑤ $\bar{\Omega} = \varnothing$，$\bar{\varnothing} = \Omega$ 等等.

4. Ω 可称为样本空间，Ω 中所含的元素可称作样本点. 重复大量试验时，某一事件 A 所发生的频率有一个“稳定值”，这个稳定值即是 A 的概率，记作 $P(A)$. 这是概率的统计学定义.

5. 概率的性质：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；（可见概率是一个数）

(2) $P(\Omega) = 1$，$P(\varnothing) = 0$；（注意其逆非真，如 $P(A) = 0$ 不能推出 $A = \varnothing$）

(3) 若 $AB = \varnothing$，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$；（此结论可推广到任意多个，如 $A_1, \cdots, A_n$ 两两不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$）

（另注：$P(A) \geqslant 0$ 称“非负性”；$P(\Omega) = 1$ 称“规范性”；若 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 称“可列可加性”，这三条是概率的公理化定义）

(4) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

(5) 若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$.（这种 $B - A$ 称“真差”）同时有 $P(A) \leqslant P(B)$.

(6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.（此性质可推广到 n 个，即 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.）

6. 已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率称为条件概率，记作 $P(B|A)$，$(P(A) > 0)$. $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

乘法公式：$P(AB) = P(A)P(B|A)$.

全概率公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为互不相容完备事件组，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Bayes 公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为互不相容完备事件组，则

$$P(B_j|A)=\frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$$

7. 古典概率：$P(A)=\frac{k}{n}$，其中 n 为基本结果的总个数（即 Ω 中所含的"样本点"—— 可理解为基本结果 —— 的个数），k 为事件 A 所含的样本点的个数.

几何概率：$P(A)=\frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}}$. 测度在此处可理解为：一维时指长度，二维时指面积，三维时指体积.

8. 抽签原理：在抽签模型中（随机、依次、不放回），抽到某签的概率与先后次序无关.

9. 若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立，实际意义为 A 与 B 互不影响，这里 $\bar{A}$ 与 B 也独立.

对三个事件 A、B、C 而言，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 都成立，则称 A、B、C 相互独立（只有前三个式子成立时称"两两独立"）. 可类推到 n 个事件的相互独立的定义上.

10. 贝努利概型：做 n 次独立重复试验，每次只有两个结果：A 与 $\bar{A}$，每次试验中 A 发生的概率均为 p，则这 n 次试验中 A 共发生 k 次的概率为：$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

1.3 重点与难点

1. 利用概率的第(4)、(5)、(6) 条性质进行概率的基本运算（这类题常出成填空题）.

2. 根据题目所给的背景，将有关的事件用字母表示，然后用乘法公式、全概率公式、Bayes 公式计算相应的概率.

3. 利用题目背景所给的独立性计算概率，判断是否属贝努利概型并计算概率.

1.4 典型题解析

1-1 设 A、B、C 为事件，试用 A、B、C 的运算来表示下列事件：(1) 仅 A 发生；(2) A、B、C 都发生；(3) A、B、C 都不发生；(4) A、B、C 至少一个发生；(5) A、B、C 恰好一个发生；(6) A 不发生，而 B、C 至少一个发生；(7) A、B、C 中不多于一个发生；(8) A、B、C 中至少两个发生；(9) A、B、C 中不多于两个发生；(10) A、B、C 中恰有两个发生.

解

(1) 仅 A 发生:$A\bar{B}\bar{C}$(或 $A-B-C$)

(2)A、B、C 都发生:ABC

(3)A、B、C 都不发生:$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(4)A、B、C 至少一个发生:$A\cup B\cup C$

(5)A、B、C 恰好一个发生:$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

(6)A 不发生,而 B、C 至少一个发生:$\bar{A}(B\cup C)$

(7)A、B、C 中不多于一个发生:$\overline{AB\cup AC\cup BC}$

(或表示为:$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$)

(8)A、B、C 中至少两个发生:$AB\cup AC\cup BC$(或表示为:$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$)

(9)A、B、C 中不多于两个发生:$\overline{ABC}$(或表示为 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$,也可表示为:$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$,说法还可以是"$A$、$B$、$C$ 不都发生",请与(3) 区别)

(10)A、B、C 中恰有两个发生:$AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$

注释 事件描述时要盯清每一个字,有时差一个字意思会相差相大. 如(1)改为"A 发生",则应表示为:A 即可,而多一"仅"字,意思差别很大.

1-2 (选择)电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的. 在使用中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电. 以 E 表示"电炉断电",而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则 $E=(\quad)$.

(a) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$ (b) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$ (c) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$ (d) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解 应选(c). 它们之间的关系是

$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}\supset\{T_{(2)}\geqslant t_0\}\supset\{T_{(3)}\geqslant t_0\}=E\supset\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

注释 事件间的相等如"$A=B$"要求"$A\subset B$"且"$A\supset B$",对有实际背景的题目一定要注意验证两个式子都成立.

1-3 (填空)设 A、B 为二事件,则 $P\{(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})\}=$ ______.

解 应填 0. 因为:

$$(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})$$
$$=(A\cup A\bar{B}\cup AB\cup B\bar{B})(\bar{A}\cup\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}B\cup B\bar{B})=A\bar{A}=\varnothing$$

注释 事件间的"并"、"交"运算具有交换、结合、分配律,因此运算可以像多

项式相乘一样(像$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$一样),这种题目不难,要熟练,做题不能太慢.

1-4 对事件A、B,已知$P(\overline{A}\cup B)=0.75$,$P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.8$,$P(B)=0.3$,求$P(A)$,$P(AB)$,$P(\overline{A}\,\overline{B})$,$P(A-B)$,$P(B-A)$,$P(A\cup\overline{B})$.

解 $0.8=P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(AB)$,所以$P(AB)=0.2$

$$0.75=P(\overline{A}\cup B)=1-P(\overline{\overline{A}\cup B})=1-P(A\overline{B})=1-P(A-B)$$
$$=1-[P(A)-P(AB)]$$

所以$P(A)=1-0.75+P(AB)=0.25+0.2=0.45$

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$
$$=1-(0.45+0.3-0.2)=0.45$$
$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.45-0.2=0.25$$
$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.3-0.2=0.1$$
$$P(A\cup\overline{B})=1-P(\overline{A\cup\overline{B}})=1-P(\overline{A}B)=1-P(B-A)$$
$$=1-0.1=0.9$$

注释 这是一类较常见的基本题.(1)$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$应熟悉(注意概率的性质(5)),切勿$P(A-B)=P(A)-P(B)$!(2)对两个事件$A$、$B$的求概率题目,建议思路为:想法先求出$P(A)$、$P(B)$和$P(AB)$这三个基本量.

1-5 已知$P(\overline{B}|A)=\frac{1}{3}$,$P(B|\overline{A})=\frac{4}{7}$,$P(AB)=\frac{1}{5}$,求$P(A)$、$P(B)$.

解 $\frac{1}{3}=P(\overline{B}|A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)}$

所以$P(A)=3P(A)-3P(AB)=3P(A)-\frac{3}{5}$,故$P(A)=\frac{3}{10}$.

$$\frac{4}{7}=P(B\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-\frac{1}{5}}{1-\frac{3}{10}},\text{得}P(B)=\frac{3}{5}.$$

注释 参见1-4题的注释.此题当然也可求诸如$P(\overline{A}\,\overline{B})$、$P(A\cup\overline{B})$等.

1-6 (填空)对事件A、B、C,已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$,则$A$、$B$、$C$都不发生的概率为____.

解 应填$\frac{3}{8}$.

因为 $ABC \subset AB$，所以 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB) = 0$，故 $P(ABC) = 0$.

故 $$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - P(\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$
$$= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)]$$
$$= 1 - [\frac{1}{4} \times 3 - 0 - \frac{1}{16} \times 2 + 0] = \frac{3}{8}.$$

注释　(1)"A、B、C 都不发生"用"$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$"表示(请区分"A、B、C 不都发生"表示为"$\overline{ABC}$")，注意理解.(2) 本题中 $P(ABC) = 0$ 的证法用的概率性质(5)，不要这样推："因为 $P(AB) = 0$，所以 $AB = \varnothing$，所以 $ABC = \varnothing$，…"不可！因为得不到 $AB = \varnothing$ 的结论.

1-7　(填空) 设三事件 A、B、C 两两独立，且 $P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$，$P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$，$ABC = \varnothing$，则 $P(A) =$ ____.

解　应填 $\frac{1}{4}$.

由已知，$P(AB) = P(A)P(B)$，$P(AC) = P(A)P(C)$，$P(BC) = P(B)P(C)$，

若设 $P(A) = x$，得

$$\frac{9}{16} = P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$
$$= 3P(A) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) = 3x - 3x^2$$

解得 $x = \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$.(因为 $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$，舍去) 故 $P(A) = \frac{1}{4}$

注释　$P(A \cup B \cup C)$ 的展开式是概率性质(6) 的推广.

1-8　(选择) 设事件 A、B 同时发生时，事件 C 必发生，则(　).

(a) $P(C) \leqslant P(A) + P(B) - 1$　　(b) $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$

(c) $P(C) = P(AB)$　　(d) $P(C) = P(A \cup B)$

解　应选(b).

由题意知 $AB \subset C$，所以 $P(AB) \leqslant P(C)$，故有

$$1 \geqslant P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \geqslant P(A) + P(B) - P(C)$$

得　$P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$，即选(b).

注释　对题目给的条件勿理解成"$AB = C$". 本题结论还可推广到多个如 $P(ABC) \geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2$.

1-9 （填空）对二事件 A、B，已知 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，那么 $P(AB)$ 可能取到的最大值是____；可能取的最小值是____；$P(A\cup B)$ 可能取的最大值是____；可能取的最小值是____.

解 应依次填为：0.6；0.3；1；0.7.

因为 $AB\subset A$，所以 $P(AB)\leqslant P(A)$. 如果 $A\subset B$，则 $P(AB)=P(A)$，故 $P(AB)$ 可能取的最大值是 $P(A)=0.6$（实际上是 $P(A)$ 与 $P(B)$ 中较小的一个）.
又：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.7-P(AB)=1.3-(AB)$
所以 $P(AB)=1.3-P(A\cup B)\geqslant 1.3-1=0.3$
而当 $A\cup B=\Omega$ 时 $P(A\cup B)=1$，$P(AB)=0.3$. 即 $P(AB)$ 可能取的最小值为 0.3（实际上是 $P(A)+P(B)-1$ 与 0 中较大的一个）.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B)$，故 $P(A\cup B)$ 可能取的最大值为 $P(A)+P(B)$ 与 1 中较小的一个，本题中填 1.

因为 $A\cup B\supset B$，所以 $P(A\cup B)\geqslant P(B)$. 若 $A\subset B$，则 $P(A\cup B)=P(B)$，故 $P(A\cup B)$ 可能取的最小值为 $P(B)=0.7$（实际上是 $P(A)$ 和 $P(B)$ 中较大的一个）.

注释 本题要考虑的是事件 A、B 间特殊的（极端的）情形，如包含、不相容（本题无法做到 A、B 不相容，因为 $P(A)+P(B)>1$，但可考虑 $A\cup B=\Omega$）等情形.

1-10 设玻璃杯整箱出售，每箱 20 只各箱含 0、1、2 只残次品的概率分别为 0.8、0.1、0.1. 一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客开箱随机查看 4 只，若无残次品，则买此箱玻璃杯，否则不买. 求（1）顾客买此箱玻璃杯的概率；（2）在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率.

解 记 $B=\{$顾客买下此箱玻璃杯$\}$

$A_i=\{$售货员取的这箱玻璃杯中，恰有 i 只残次品$\}$，$i=0,1,2$.
则 A_0、A_1、A_2 互不相容且 $P(A_0)=0.8$，$P(A_1)=P(A_2)=0.1$

而 $$P(B|A_0)=1,P(B|A_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},P(B|A_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}.$$

（1）由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(B|A_i)P(A_i)=0.8\times 1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}=0.943$$

$$(2)P(A_0|B)=\frac{P(A_0B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_0)P(A_0)}{\sum_{i=0}^{2}P(B|A_i)P(A_i)}=\frac{1\times 0.8}{0.943}=0.848$$

注释 此题是应用全概率公式和 Bayes 公式的较典型的题目. ① 用字母表述

事件时，应是“一个事件”，不要这样设：$A_1=\{$顾客买的这箱玻璃杯中恰有1只残次品$\}$（一个字母 A_1 表述了2个事件——一是顾客“买”这箱玻璃杯，一是“恰有1只残次品”——不妥），或设 $A=\{$售货员取1箱玻璃杯$\}$（非随机事件），你可以试一试你用字母表述的“事件”其对立事件是否易于准确描述，就知道你的描述是否合适了；② 第2问其实用的是Bayes公式，Bayes公式可以用条件概率定义式、全概率公式和乘法公式推出，不必专门去记；③ 第2问问的是 $P(A_0|B)$，勿求成 $P(A_0B)$ 或 $P(A_0)$，注意题意的理解；④ 解中 A_0、A_1、A_2 可视为互不相容完备事件组.

1-11 设考生的报名表来自三个地区，各有10、15、25份，其中女生表分别为3、7、5份. 现随机地取一地区的报名表，从中先后抽2份报名表. 求(1) 先抽到的是女生表的概率 p；(2) 已知后抽到的是男生表，求先抽到的是女生表的概率 q.

解 记 $A_i=\{$取的是第 i 区的报名表$\}$，$i=1,2,3.$

$B_i=\{$从报名表中第 i 次取的是女生表$\}$，$i=1,2.$

则 $$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(B_1|A_1)=\frac{3}{10},\ P(B_1|A_2)=\frac{7}{15},\ P(B_1|A_3)=\frac{5}{25}$$

由“抽签原理”知：$P(\bar{B}_2|A_1)=\frac{7}{10}$，$P(\bar{B}_2|A_2)=\frac{8}{15}$，$P(\bar{B}_2|A_3)=\frac{20}{25}$

且有：$$P(B_1\bar{B}_2|A_1)=\frac{3\times 7}{10\times 9}=\frac{7}{30},\ P(B_1\bar{B}_2|A_2)=\frac{8\times 7}{15\times 14}=\frac{4}{15},$$

$$P(B_1\bar{B}_2|A_3)=\frac{5\times 20}{25\times 24}=\frac{1}{6}.$$

(1) 由全概率公式，得

$$p=P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_1|A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

$$(2)\ q=P(B_1|\bar{B}_2)=\frac{P(B_1\bar{B}_2)}{P(\bar{B}_2)}$$

而 $$P(\bar{B}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(\bar{B}_2|A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$

$$P(B_1\bar{B}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_1\bar{B}_2|A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{4}{15}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{9}$$

故得 $q=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}$.

注释 参见1-10题注释.“抽签原理”可用在解题的过程中，如 $P(\bar{B}_2|A_1)$ 的