国家工科数学课程教学基地建设系列教材

复变函数

（第二版）

南理工大学数学科学学院

吴敏 洪毅 刘深泉 编著

华南理工大学出版社

复变函数

国家工科数学课程教学基地建设系列教材·精品课程教材

复变函数

（第二版）

吴　敏　洪　毅　刘深泉　编著

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目（CIP）数据

复变函数/吴敏，洪毅，刘深泉编著. —2版. —广州：华南理工大学出版社，2006.8

（国家工科数学课程教学基地建设系列教材·精品课程教材）

ISBN 7-5623-2469-7

Ⅰ.复… Ⅱ.①吴…②洪…③刘… Ⅲ.复变函数-高等学校-教材
Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 094782 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020—87113487　87111048（传真）
E-mail：scutc13@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com

责任编辑：欧建岸

印 刷 者：广东省农垦总局印刷厂

开　　本：787×960　1/16　**印张**：12　**字数**：242 千

版　　次：2006 年 8 月第 2 版第 2 次印刷

印　　数：5 001～8 000 册

定　　价：22.50 元

总　序

自1995年以来，华南理工大学应用数学系（现数学科学学院）的老师们为建设国家工科数学课程教学基地不懈努力，在教育改革中做出了显著的成绩。“国家工科数学课程教学基地建设系列教材”的出版，就是这些成果的重要部分。

21世纪是经济全球化、信息化的时代，数学科学在科学技术中占有核心地位，成为直接的生产力。大学数学课程在高等教育中起着关键的作用，对学生素质的提高和创新能力的培养起着越来越重要的作用。提高大学数学的教学质量，是一项艰巨而重要的任务。

大学数学的教学，应该使学生在理解数学思想、数学建模和运算能力等方面，得到最基本的训练。为使学生理解数学思想，必须讲清基本概念，并通过必要的逻辑推理训练使学生理解基本概念和基本定理。通过数学建模的学习，学生可以了解数学的来源，并且学会运用数学。运算能力的培养是以上两种能力的基础。当然，这三种能力的培养是一个有机的整体，根据不同专业的要求和学生的实际情况可以有所侧重。

为了适应新形势，本系列教材力求反映数学与其他学科的最新发展，删减过时的内容，介绍各种数学软件的应用，充分使用多媒体等技术。

本系列教材的出版，反映了我院教师多年来教学改革的成果，也吸取了不少兄弟院校同行的宝贵经验。限于我们的水平，其中疏漏在所难免，恳请国内外专家、同行指正。本系列教材的出版得到华南理工大学校领导与华南理工大学出版社的大力支持，特此表示感谢。

华南理工大学数学科学学院

2004年8月

第二版前言

复变函数是工科数学的一门重要基础课程。为了适应高等教育的发展和教育改革的需要，我们编写了这本教材。

复数是16世纪在解代数方程时引入的。开始人们认为复数只是人类主观思维的产物，不是客观世界真实的反映，因此称它为“虚数”。后来发现复数可以表示向量，复数运算实质上是在平面上平移、旋转和相似变换。这一观点的进一步发展，把解析函数看作复平面的保形映照，促进了人们对复数的认识，也使复变函数论得到迅速的发展。

在18世纪，达朗贝尔（1717—1783年）和欧拉（1707—1783年）等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题。复变函数论逐步建立起来，成为数学的一个重要分支。在19世纪，柯西（1789—1857年）、外尔斯特拉斯（1815—1897年）和黎曼（1826—1857年）等人奠定了近代复变函数论的基础。柯西和外尔斯特拉斯应用积分和级数研究复变函数，使人们了解复变函数和一元实变函数的联系和区别。黎曼研究了复变函数的映照性质，使复变函数与数学的其他分支，如偏微分方程、微分几何等联系起来。

复变函数论的建立和发展与解决实际问题有密切联系。复变函数论是在研究流体力学、电学、空气动力学、热力学和理论物理中发展起来的，在解决这些学科的实际问题中起了很大作用。复变函数和数学的其他分支也有密切联系。保形映射在偏微分方程和微分几何中，富里埃变换在微分方程、积分方程、概率论、泛函分析、数论中都是重要工具。即使最简单的函数，如多项式、指数对数函数、三角函数等，也只有在复变函数论中才能充分揭示其本质。

作为高等学校工科的基础课程，本课程主要介绍复变函数的微积分、级数和保形映照等内容，书中补充的几个阅读材料，旨在帮助学生了解本课程是怎样有趣和有用。

本书2004年9月第一次出版。第二版作者根据使用此书作为教材的广大教师及作者的体会对书中内容作了适当的修改，更正了印刷错误，增加阅读材料及数学建模的实例，以便能更好地为教学服务。本书的编写得到华南理工大学教务处和数学科学学院的支持，特此表示感谢。

编　者

2006年7月

目　录

第一章　复数与复变函数 …………………………………………………… (1)

§1.1　复数 …………………………………………………………………… (1)

§1.2　复变函数 ……………………………………………………………… (9)

本章提要 ………………………………………………………………… (18)

习　题 …………………………………………………………………… (18)

第二章　解析函数 …………………………………………………………… (21)

§2.1　解析函数 …………………………………………………………… (21)

§2.2　初等函数 …………………………………………………………… (27)

本章提要 ………………………………………………………………… (32)

习　题 …………………………………………………………………… (33)

第三章　复变函数的积分 …………………………………………………… (35)

§3.1　复变函数积分的定义、性质及其计算 ……………………………… (35)

§3.2　柯西-古萨基本定理 ………………………………………………… (39)

§3.3　原函数与不定积分 ………………………………………………… (42)

§3.4　柯西积分公式 ……………………………………………………… (45)

*§3.5　调和函数 …………………………………………………………… (50)

本章提要 ………………………………………………………………… (54)

习　题 …………………………………………………………………… (54)

第四章　级数 ………………………………………………………………… (58)

§4.1　复数项级数和序列的基本性质 …………………………………… (58)

§4.2　泰勒级数 …………………………………………………………… (65)

§4.3　洛朗级数 …………………………………………………………… (74)

§4.4 解析函数的孤立奇点……………………………………………… (81)
本章提要 …………………………………………………………………… (87)
习　题 ……………………………………………………………………… (87)
第五章　留数理论及其应用 ……………………………………………… (92)
§5.1 留数理论…………………………………………………………… (92)
§5.2 用留数计算实积分 ………………………………………………… (101)
*§5.3 幅角原理及其应用 ………………………………………………… (108)
本章提要…………………………………………………………………… (112)
习　题……………………………………………………………………… (113)
第六章　保形映射………………………………………………………… (116)
§6.1 保形映射的概念 …………………………………………………… (116)
§6.2 分式线性映射 ……………………………………………………… (119)
§6.3 基本初等函数构成的变换 ………………………………………… (128)
*§6.4 保形映射的基本问题 ……………………………………………… (138)
本章提要…………………………………………………………………… (140)
习　题……………………………………………………………………… (141)
阅读材料…………………………………………………………………… (143)
Ⅰ.欧拉定理的应用 …………………………………………………… (143)
Ⅱ.复变函数在振动系统中的应用 …………………………………… (144)
Ⅲ.解析函数在平面场的应用 ………………………………………… (148)
Ⅳ.共形映射在静电学、热力学与流体力学中的应用………………… (156)
Ⅴ.分形艺术和作品欣赏 ……………………………………………… (163)
习题解答…………………………………………………………………… (168)
结束语……………………………………………………………………… (182)

第一章　复数与复变函数

复变函数就是自变量为复数的函数．复变函数论所研究的对象是复数域里的解析函数——具有某种特性的复变函数．在引入解析函数概念之前，本章将介绍一些预备知识，先从复数及平面点集谈起，然后引入复变函数及其极限、连续等概念．

§1.1　复　数

1. 复数及其几何表示

从初等代数中我们已经知道，虚数单位 i 具有性质 $i^2=-1$，将这一虚数单位与两个实数 x、y 用加、乘结合起来，则得一复数 $x+iy$．x 及 y 分别称为这一复数的实部与虚部．若记 $z=x+iy$，则记 $\mathrm{Re}z=x$，$\mathrm{Im}z=y$．若 $x=0$，称这一数为纯虚数；若 $y=0$，它当然是实数．零是同时可作为实数与纯虚数的惟一数．

对于平面上一个给定的直角坐标系来说，复数 $z=x+iy$ 可以用坐标为 (x, y) 的点 P 来表示．这样复数就与平面上的点一一对应．实数与 x 轴上的点一一对应，x 轴称为实轴；虚数 iy 与 y 轴上的点一一对应，y 轴称为虚轴；这个平面称为复平面．全体复数或复平面记作$\mathbb{C}$．

此外，也可用向量$\overrightarrow{OP}$表示复数 $z=x+iy$，x 与 y 分别是$\overrightarrow{OP}$在 x 轴和 y 轴上的投影．$\overrightarrow{OP}$的长度 r 称为复数 z 的模，记作 $|z|$．显然(图 1-1)

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.1}$$

容易看出

$$|\mathrm{Re}z|\leqslant|z| \quad |\mathrm{Im}z|\leqslant|z| \quad |z|\leqslant|\mathrm{Re}z|+|\mathrm{Im}z| \tag{1.2}$$

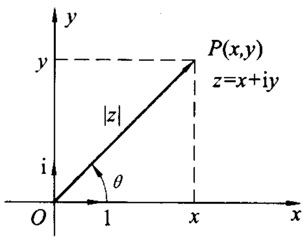

图 1-1

假如 P 点不是原点(即 $z\neq0$)，则称向量$\overrightarrow{OP}$与 x 轴正向之间的夹角 θ 为 z 的幅角，记作 $\mathrm{Arg}z$．幅角的方向规定为：逆时针方向为正，顺时针方向为负．

显然，一个非零复数有无穷多个幅角，彼此相差 2π 的整数倍，但其中只有一个幅角位于 $-\pi$ 与 π 之间，称之为 z 的主幅角，或幅角的主值，记作 $\arg z$. 注意，为方便也可取其他的主值范围，如 0 与 2π 之间. 但无论 $\arg z$ 的范围怎么取，总有

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi\ (k\text{ 为整数}) \tag{1.3}$$

在平面上只有原点(即复数 $z=0$)的幅角是不定的.

如果取 Ox 为极坐标系的极轴，那么，复数 z 的模和幅角分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 的极径和极角. 由直角坐标系与极坐标系的关系，我们有

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 r、θ 分别是复数 z 的模和幅角. 所以

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.5}$$

式(1.5)称为复数 z 的三角表示式.

式(1.4)表明可以用 z 的模和幅角来表示 z 的实部和虚部，反之亦然. 有

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\arg z=\begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & (x>0) \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & (x=0,\ y>0\text{ 取正号；}y<0\text{ 取负号}) \\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi & (x<0,\ y>0\text{ 取正号；}y<0\text{ 取负号}) \\ \pi & (x<0,\ y=0) \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$.

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，可把(1.5)式改写为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z} \tag{1.7}$$

这就是复数的指数表示式.

例 1.1 将下列复数化为三角表示式与指数表示式：

(1) $z_1=-3-4\mathrm{i}$;

(2) $z_2=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解 (1) $|z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\arg z_1=\arctan\dfrac{4}{3}-\pi$，故

$$\begin{aligned} z_1&=5\left[\cos\left(\arctan\frac{4}{3}-\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{4}{3}-\pi\right)\right] \\ &=5\mathrm{e}^{\left(\arctan\frac{4}{3}-\pi\right)\mathrm{i}} \end{aligned}$$

(2) $|z_2|=1$，$\arg z_2=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{3}{10}\pi$，故

$$z_2=1\cdot(\cos\frac{3}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{10}\pi)=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}} \qquad \square$$

例 1.2 设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. 试把 $1+z$ 化为三角表示式.

解 $1+z=1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}) \qquad \square$$

2. 复数的运算及几何意义

在定义复数的运算之前，我们首先注意到两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是不能比较大小的. 如果 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$，称 z_1 与 z_2 相等，记为 $z_1=z_2$.

复数 z_1、z_2 的加法和减法定义如下：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$$
$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$$

容易验证，复数的加法满足交换律和结合律，且减法是加法的逆运算.

两复数相加符合向量按平行四边形相加的法则，即作起点在原点的向量 z_1 及 z_2，取 z_1 及 z_2 为两边作平行四边形，从原点出发沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2.

由于复数相减是复数相加的逆运算，因此 z_1-z_2 就得到起点在向量 z_2，终点在向量 z_1 的向量(图 1-2).

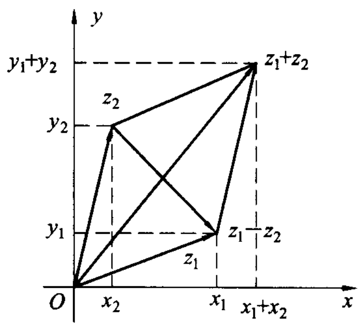

图 1-2

根据图 1-2 有不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.8}$$

它称为三角不等式.

此外还有

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$$

在定义复数的乘法时，利用多项式乘法法则，只需注意 $\mathrm{i}^2=-1$，即得

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)$$

容易验证，复数的乘法满足交换律与结合律以及乘法对于加法的分配律.

除法定义为乘法的逆运算. 有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \quad (z_2\neq0)$$

对复数引进上述运算后就称为复数域. 它可看作是由实数域扩展而得的.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，由乘法的定义得

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

因此

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2 \tag{1.9}$$

同理

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{|z_2|}{|z_1|},\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\mathrm{Arg}z_2-\mathrm{Arg}z_1\quad(z_1\neq0) \tag{1.10}$$

注意式(1.9)中后一等式的意思是：对于 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，一定有 $\mathrm{Arg}z_1$ 及 $\mathrm{Arg}z_2$ 的各一值，使其和与前者相等；反过来也如此. 式(1.10)中后一等式可以类似地理解. 由式(1.9)及式(1.10)，可以推出复数积与商的几何意义.

现考虑复数的乘幂. 设 n 是正整数，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\neq0$，那么由式(1.9)递推得

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \tag{1.11}$$

规定 $z^0=1$，则当 $n=0$ 时式(1.11)成立. 定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，则

$$z^{-n}=r^{-n}[\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)]$$

所以式(1.11)对所有整数成立.

在(1.11)中取 $|z|=1$，得到著名的棣莫弗公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \tag{1.12}$$

设 z 是已知复数. 考虑方程

$$w^n=z \tag{1.13}$$

当 $z=0$ 时，它只有惟一的根(n 重根)$w=0$. 当 $z\neq0$ 时，它有 n 个根，每一个根称为 z 的 n 次根，都记作 $\sqrt[n]{z}$. 令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，那么

$$w^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

上式成立的充要条件是

$$\rho^n=r\qquad n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k\ 为整数)$$

取 $\theta=\arg z$，当 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时，得到式(1.13)的 n 个根：

$$w_k=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)+i\sin\frac{1}{n}(\arg z+2k\pi)\right] \tag{1.14}$$

当 k 取其他整数值时，这些根又重复出现.

由于这 n 个根的模都相等，它们都在以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆上，又因相邻两个根(看作向量)的夹角都是 $\dfrac{2\pi}{n}$，所以这 n 个根是圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 1.3 求$(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$的所有值.

解 因 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$，有

$$(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{1}{3}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{3}(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\right]\quad(k=0,\ 1,\ 2)$$

故$(1+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$的 3 个值为

$$w_0=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12})$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi)$$

$$w_2=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{17}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{17}{12}\pi)$$

如图 1-3. □

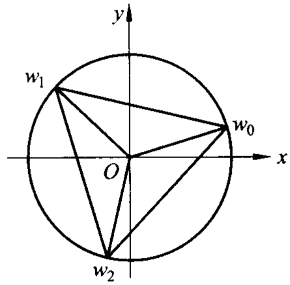

图 1-3

例 1.4 已知正三角形两顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\mathrm{i}$，求它的第三个顶点.

解 如图 1-4，设第三个顶点为 z_3，那么向量 z_3-z_1 是由向量 z_2-z_1 绕 z_1 正向旋转$\frac{\pi}{3}$(或$-\frac{\pi}{3}$)所得，所以 $z_3-z_1=\mathrm{e}^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1)$. 由此可得问题的两个解

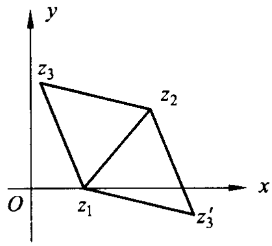

图 1-4

$$\begin{aligned}z_3&=z_1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1)\\&=1+(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3})(1+\mathrm{i})\\&=\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\mathrm{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z'_3&=z_1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1)\\&=\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})\mathrm{i}\end{aligned}$$ □

例 1.5 设 $P_0P_1\cdots P_{n-1}$ 是单位圆内接正 n 边形. 证明 $P_0P_1\cdot P_0P_2\cdot\cdots\cdot P_0P_{n-1}=n$.

证 取圆心 O 为原点，OP_0 为实轴正向，则 P_k 对应复数 $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$，$0\leqslant k\leqslant n-1$. 它们满足方程 $z^n-1=0$，故

$$z^n-1=(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1})$$

因而

$$P_0P_1\cdot P_0P_2\cdot\cdots\cdot P_0P_{n-1}=|(z_0-z_1)(z_0-z_2)\cdots(z_0-z_{n-1})|$$
$$=\lim_{z\to z_0}\left|\frac{z^n-1}{z-z_0}\right|=\lim_{z\to z_0}|nz^{n-1}|=n \qquad \square$$

例 1.6 试用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 表示 $\cos3\theta$ 和 $\sin3\theta$.

解 由式(1.12)得

$$\begin{aligned}\cos3\theta+\mathrm{i}\sin3\theta&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot\mathrm{i}\sin\theta+3\cos\theta\cdot(\mathrm{i}\sin\theta)^2+(\mathrm{i}\sin\theta)^3\\&=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+\mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)\end{aligned}$$

所以
$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$
$$\sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta \qquad \square$$

复数 $x-\mathrm{i}y$ 称为复数 $x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数，记作 $\bar{z}$. 显然有

$$|z|=|\bar{z}| \qquad \mathrm{Arg}z=-\mathrm{Arg}\bar{z}$$

上面的后一式理解为:对于 $\mathrm{Arg}\bar{z}$ 中的任一值，必有 $\mathrm{Arg}z$ 中的一个值，使得它们仅相差一个符号;反之亦然.

共轭复数的几何意义是:在复平面上 z 与 $\bar{z}$ 关于实轴对称.

容易验证，共轭复数有下列重要性质:

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2 \qquad \bar{\bar{z}}=z \qquad \overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$$
$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 \qquad \overline{(z_1/z_2)}=\bar{z}_1/\bar{z}_2\ (z_2\neq0)$$
$$\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

3. 复数在代数、几何上的应用举例

例 1.7 证明:实系数一元 n 次方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的复数根总是互为共轭成对出现.

证 设 $p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$，并设 z_0 为已给方程的一个复数根. 由题设有

$$p(z_0)=a_0z_0^n+a_1z_0^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

于是
$$\overline{p(z_0)}=\overline{a_0z_0^n+a_1z_0^{n-1}+\cdots+a_n}=0$$

即
$$\overline{p(z_0)}=\overline{a_0z_0^n}+\overline{a_1z_0^{n-1}}+\cdots+\bar{a}_n=0$$

故有
$$\begin{aligned}\overline{p(z_0)}&=a_0\,\overline{z_0^n}+a_1\,\overline{z_0^{n-1}}+\cdots+a_n\\&=a_0\bar{z}_0^n+a_1\bar{z}_0^{n-1}+\cdots+a_n\\&=p(\bar{z}_0)=0\end{aligned}$$

即 $\bar{z}_0$ 也是 $p(z)=0$ 的根. $\square$

例 1.8 设方程 $z^n-1=0$ 的 n 个解为 1，w_1，w_2，…，w_{n-1}，试证:

$$1+w_1+w_2+\cdots+w_{n-1}=0$$

证 由求 n 次根的公式得 n 次单位根为

$$1,\ w_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=1,2,\cdots,n-1)$$

又由棣莫弗公式，有

$$w_k=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$$

令 $w=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，则 $z^n-1=0$ 的解为 1，w，w^2，…，w^{n-1}. 这是因为

$$w_k=w^k\quad(k=1,2,\cdots,n-1)$$

又因为 $w\neq1$，所以有

$$1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=\frac{1-w^n}{1-w}$$

又 $1-w^n=0$，故证得

$$1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=0$$

即 $1+w_1+w_2+\cdots+w_{n-1}=0$. 这是 1 的三个立方根之和为零的推广. □

例 1.9 已知三角形的三个顶点为 z_1、z_2、z_3，求其面积.

解 记 θ 为由向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 转动到向量 $\overrightarrow{z_1z_3}$ 的转动角，则

$$\theta=\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)\Big/\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|$$

因 θ 可能为正或负，所以

$$\begin{aligned}\pm S_{\triangle z_1z_2z_3}&=\frac{1}{2}|z_2-z_1||z_3-z_1|\sin\theta\\&=\frac{1}{2}|z_2-z_1||z_3-z_1|\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(|z_2-z_1||z_3-z_1|\frac{(z_3-z_1)|z_2-z_1|}{(z_2-z_1)|z_3-z_1|}\right)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}((z_3-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_1))\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(z_3\bar{z}_2-z_1\bar{z}_2-z_3\bar{z}_1)\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_3+\bar{z}_3z_1)\end{aligned}$$

所以 $$S_{\triangle z_1z_2z_3}=\frac{1}{2}|\mathrm{Im}(\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_3+\bar{z}_3z_1)|$$ □

例 1.10 求四点 z_1、z_2、z_3、z_4 共圆的充要条件.

解 先设四点的位置如图 1-5，则四点共圆的充要条件是

$$\arg\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}=\arg\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}$$

(当然要求四点不共线). 上式等价于

$$\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\div\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}\right)=0$$

也就是说，四点 z_1、z_2、z_3、z_4 共圆的充要条件为 $\frac{(z_3-z_1)}{(z_4-z_1)}\div\frac{(z_3-z_2)}{(z_4-z_2)}$ 为实数，但 $\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}$ 不是实数.

在其他情况下，也可证明这一结论. □

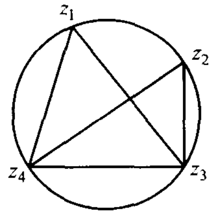

图 1-5

4. 复球面和无穷远点

复数还有一种重要的表示方法，就是用球面上的点表示复数.

在三维空间中取定直角坐标系(x, y, u)，把 xOy 平面看作 $z=x+y\mathrm{i}$ 平面，考虑球面

$$x^2+y^2+u^2=1$$

球面上的点 $N(0, 0, 1)$ 称为北极(图 1-6). 在平面 xOy 上任意取一点 $P(x,y,0)$，它表示复数 $z=x+y\mathrm{i}$. 直线 NP 与球面的另一交点 P' 称为 P 在球面上的球极射影，它的坐标为

$$x'=\frac{2x}{x^2+y^2+1}\qquad y'=\frac{2y}{x^2+y^2+1}\qquad u'=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$$

这样，在复平面$\mathbb{C}$与去掉北极的球面之间一一对应，因而可以用点 P' 表示复数 $z=x+y\mathrm{i}$. 复数 z 的模越大，它的球极射影越接近北极 N. 在复平面上添加一个假想的点∞，称为无穷远点，其球极射影为复球面上的北极. 加上无穷远点的复平面称为扩充复平面. 扩充复平面与球面之间建立了一一对应关系，这种球面称为复球面. 扩充复平面(或复球面)记为$\overline{\mathbb{C}}$.

复数∞的模约定为$+\infty$，它的实部、虚部和幅角都没有意义. 其他复数称为有限复数. 关于∞的四则运算作如下规定：

设 a 为有限复数，则

$$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty$$

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty\ (a\neq 0)$$

$$\frac{a}{0}=\infty\ (a\neq 0)\qquad\frac{a}{\infty}=0\qquad\frac{\infty}{a}=\infty$$

$\infty\pm\infty$，$0\cdot\infty$，$\frac{0}{0}$以及$\frac{\infty}{\infty}$都没有意义.

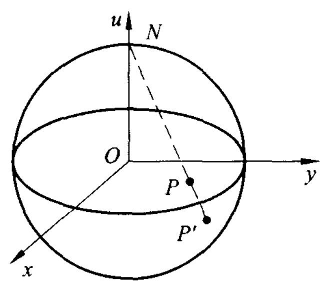

图 1-6

§1.2 复变函数

1. 平面点集

关于复平面$\mathbb{C}$或平面$\mathbb{R}^2$的基本点集理论，在高等数学中已讲过，这里只把主要内容回顾一下.

设a是复平面$\mathbb{C}$上一点，r是正数. 集合

$$B(a, r)=\{z \mid z\in\mathbb{C}, |z-a|<r\} \tag{1.15}$$

称为以a为中心，r为半径的开圆盘，也称为a的r邻域. 而集合

$$\overline{B}(a, r)=\{z \mid z\in\mathbb{C}, |z-a|\leqslant r\} \tag{1.16}$$

称为以a为中心，r为半径的闭圆盘. 集合

$$\check{B}(a, r)=\{z \mid z\in\mathbb{C}, 0<|z-a|<r\} \tag{1.17}$$

称为a的去心r邻域.

定义 1.1 设$E\subset\mathbb{C}$是平面点集. 若复数a有邻域$B(a, r)\subset E$，称a是E的内点. 若复数b有邻域$B(b, \epsilon)$与E无公共点，称b为E的外点. 若复数c的任意邻域$B(c, \delta)$都同时包含E和E^c(E的补集)的点，则称c为E的边界点.

由定义可知，给定点集E，复平面上所有的点恰好被分成三类：内点、外点和边界点. 注意：E的内点必属于E，E的外点必不属于E，E的边界点既可能属于E，也可能不属于E(图 1-7).

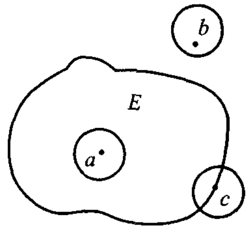

图 1-7

E的全部边界点所组成的集合，称为E的边界，记为∂E.

定义 1.2 若集合E的每个点都是它的内点，E称为开集. 若集合E的所有边界点都属于E，E称为闭集. 若有邻域$B(0, r)\supset E$，E称为有界集；否则E称为无界集.

例如，开圆盘$B(a, r)$是开集，并且是有界开集. 闭圆盘$\overline{B}(a, r)$是闭集，并且是有界闭集.

复平面$\mathbb{C}$是无界开集.

定义 1.3 设$E\subset\mathbb{C}$，$a\in\mathbb{C}$，若a的任意去心邻域$\check{B}(a, \delta)$必包含E的点，则称a是E的聚点(或极限点).

集合E的聚点不一定属于E. 例如，集合