普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济管理数学基础

白岩 赵建华 杨淑华 编著

微积分习题课教程（下册）

6

清华大学出版社

普通高等教育"十一五"

经济管理数学基础

白岩　赵建华　杨淑华　编著

微积分习题课教程（下册）

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，是《微积分》（上、下册）（李辉来、孙毅等编著，清华大学出版社，2005）的配套习题课教材. 本书内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、差分方程和常微分方程.

本书下册与主教材经济管理数学基础《微积分》下册相应分为6章，各章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还进行了常见错误类型分析，最后给出习题、综合练习题及参考答案与提示.

与主教材配套的除了《微积分习题课教程》（下册）外，还有教师参考书《微积分习题解答》和供课堂教学使用的《微积分电子教案》.

本书可作为高等学校经济、管理、金融及相关专业微积分课程的习题课教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

微积分习题课教程. 下册/白岩，赵建华，杨淑华编著. 一北京：清华大学出版社, 2007.3
（经济管理数学基础）
ISBN 978-7-302-14109-9

Ⅰ.微…　Ⅱ.①白…　②赵…　③杨…　Ⅲ.微积分–高等学校–解题　Ⅳ. O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 133665 号

责任编辑：佟丽霞
责任校对：焦丽丽
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
c – service@ tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　**印　张**：15　**字　数**：291 千字
版　次：2007 年 3 月第 1 版　　**印　次**：2007 年 3 月第1 次印刷
印　数：1 ~4000
定　价：20.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：017826 – 01

总　序

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学. 在过去的一个世纪中，数学理论与应用得到了极大的发展，使得数学所研究的两个重要内容，即“数量关系”和“空间形式”具备了更丰富的内涵和更广泛的外延.数学科学在发展其严谨的逻辑性的同时，作为一门工具，在几乎所有的学科中大展身手，产生了前所未有的推动力.

在经济活动和社会活动中，随时都会产生数量关系和相互作用. 数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，这种数量关系概括地表述为一种数学结构，这种结构通常称为数学模型，建立这种数学结构的过程称为数学建模. 数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的. 微积分、线性代数等是建模的基本数学工具. 第二类为随机性模型，即模型所反映的实际问题具有偶然性或随机性. 概率论、数理统计和随机过程是建模的基本数学方法. 第三类为模糊性模型,即模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性. 模糊数学理论是建模的基本数学手段.

高等学校经济管理类专业本科生的公共数学基础课程一般包括微积分、线性代数、概率论与数理统计 3 门课程，它们都是必修的重要基础理论课. 通过这些课程的学习，学生可以掌握一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数、常微分方程与差分方程、向量代数与空间解析几何、线性代数、概率论与数理统计等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机量方面的数学基础. 在学习过程中，通过数学知识与其经济应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力.

“经济管理数学基础”系列教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，包括《微积分》（上、下册）、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及与其配套的习题课教程. 为了方便一线教师教学，该系列教材又增加了与各主教材配套的电子教案和教师用书（习题解答）. 该系列教材内容涵盖了教育部非数学专业数学教学指导委员会最新制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，吸取了国内外同类教材的精华，特别是借鉴了近几年我国一批“面

向21世纪课程”教材和国家“十五”规划教材，同时也凝聚了作者多年来在大学数学教学方面积累的经验. 该系列教材编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意到了时代的特点，本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一. 注重理论联系实际，通过实例展示数学方法在经济管理领域的成功应用. 把数学实验内容与习题课相结合，为学生展现科学发现的基本原理，突出数学应用和数学建模的思想方法. 借助电子和网络手段提供经济学、管理学的背景资源和应用资源，提高学生的数学人文素养，使数学思维延伸至一般思维. 同时注意到与后续课程的衔接.

本系列教材特点是：体现了现代数学思想与方法，建立了后续数学方法的接口，考虑了专业需求和学生动手能力的培养，使教材的系统性和文字简洁性相统一.

在教材体系与内容编排上，认真考虑作为经济类、管理类和人文类各专业以及相关的人文社会科学专业不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的专业可讲授教材的全部内容，其他专业可以根据实际需要选择适当的章节讲授. “经济管理数学基础”系列教材中主教材在每节后面都配备了习题，每章后面配备了总习题，其中（A）题是体现教学基本要求的习题，（B）题是对基本内容提升、扩展以及综合运用性质的习题. 书末给出了习题参考答案，供读者参考. 该系列教材中习题课教程帮助学生全面、系统、深刻理解、消化主教材的主要内容，使学生能够巩固、加深、提高和拓宽所学知识，并综合运用所学知识分析、处理和解决经济、管理领域中的某些数学应用的问题. 每章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还进行了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示.

在本系列教材的编写过程中，吉林大学教务处、吉林大学数学学院给予了大力支持，公共数学教学与研究中心副主任吴晓俐女士承担了本系列教材初稿的编务工作. 清华大学出版社的领导和编辑们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心的指导和大力支持. 在此一并致谢.

作为公共数学教学的一种改革模式，我们希望起到抛砖引玉的作用，恳请读者不吝赐教，不断提高本系列教材的质量.

《经济管理数学基础》系列教材编委会

2006年8月

前　　言

本书是“经济管理数学基础”系列教材中《微积分》（上、下册）（李辉来、孙毅等编著，清华大学出版社，2005）的配套的习题课教材，是依据经济类、管理类、人文类各专业对微积分课程的教学要求而编写的.

在主教材《微积分》（上、下册）的编写过程中，按循序渐进的原则，深入浅出. 从典型的自然科学与经济分析中的实际例子出发，从直观的几何现象出发，引出微积分的基本概念，如极限、导数及积分等. 再从理论上进行论证，得到一些有用的方法和结果，然后再利用它们解决更多的自然科学和经济分析中的实际问题. 这样从特殊到一般，再从一般到特殊，从具体到抽象，再从抽象到具体，将微积分和经济分析的有关内容有机地结合起来，为学生将来利用数学分析的方法讨论更深入的经济问题打下良好的基础.

主教材《微积分》（上、下册）在教材体系结构及讲解方法上我们进行了必要的调整，适当淡化运算上的一些技巧，降低了一元函数的极限与连续的理论要求，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明. 在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面有较大的提高. 书中将数学素质培养有机地融合于知识讲解中，突出数学思想的介绍，突出数学方法的应用. 本书拓广了经济应用实例的范围，让学生更多地了解应用数学知识、数学方法解决经济管理类问题的实例，增加他们的应用意识和能力.

本书密切配合主教材《微积分》（上、下册），内容充实，题型全面. 每章首先概括主要内容和教学要求；继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还进行了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示. 本书体现了现代数学思想与方法，总结学习规律，解决疑难问题，提示注意事项，特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力.

本书下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、差分方程和常微分方程共 6 章，其中第 1、2 章由白岩编写，第 3、4 章由赵建华编写，第 5、6 章由杨淑华编写，全书由白岩统稿. 青年教师孙鹏、侯影、朱本喜、卢秀双及研究生李健完成了本书的录入、排版、制图工作.

由于水平有限，书中的错误和不妥之处恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

编　者

2006 年 8 月

目　　录

第 1 章　向量代数与空间解析几何

本章包含向量代数与空间解析几何两部分内容. 这些内容是学习多元函数微积分的预备知识, 同时也是重要的数学工具, 在后继数学课程的学习中也有重要应用.

1.1　向量代数

一、主要内容

向量的概念, 向量的运算, 向量的积.

二、教学要求

1. 理解空间直角坐标系的概念, 理解向量的概念及其表示;

2. 掌握向量的运算 (线性运算、数量积、向量积), 了解两个向量垂直、平行的条件;

3. 理解单位向量、方向角与方向余弦, 向量的坐标表示式, 掌握用坐标表示式进行向量运算的方法;

4. 掌握向量的数量积、向量积的运算, 了解混合积.

三、例题选讲

例 1.1 在 x 轴上求出一点 M, 使它与点 $M_1(4,1,2)$ 的距离为 $\sqrt{30}$.

解 设在 x 轴上所求点 M 的坐标为 $(x,0,0)$, 下面求出 x.
由条件 $|M_1M|=\sqrt{30}$, 即

$$\sqrt{(x-4)^2+(0-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{30},$$

$$(x-4)^2=25,$$

得

$$x=9 \quad 或 \quad x=-1.$$

故所求点 M 为 $(9,0,0)$ 或 $(-1,0,0)$.

例 1.2 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,-4,7)$，其终点坐标为 $(2,-1,7)$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标及模 $|\boldsymbol{a}|$.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标为 (x,y,z)，因为向量的坐标是其终点坐标与始点坐标之差，所以有

$$2-x=4,\quad -1-y=-4,\quad 7-z=7,$$

由此解得

$$x=-2,\quad y=3,\quad z=0.$$

而

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=\sqrt{81}=9.$$

故向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点坐标为 $(-2,3,0)$，$|\boldsymbol{a}|=9$.

例 1.3 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的负向及 y 轴、z 轴的正向构成相等的锐角，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解 依题意知

$$\alpha=\pi-\theta,\quad \beta=\theta,\quad \gamma=\theta\quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right),$$

因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，即

$$\cos^2(\pi-\theta)+\cos^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

所以

$$3\cos^2\theta=1\quad 或\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

例 1.4 模长为 2 的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角是 $\dfrac{\pi}{4}$，与 y 轴的夹角是 $\dfrac{\pi}{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的夹角是 γ，则

$$\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\gamma=1,$$

即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cos^2\gamma=1.$$

由此解得

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

因为

$$\boldsymbol{e}_a = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right),$$

而 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_a$, 所以

$$\boldsymbol{a} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{2}, 1, \pm 1\right).$$

例 1.5 已知 $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2$, 求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

解 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}), |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, 所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2$, 即

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = 8 - 4 = 4, \quad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 2 \quad (\text{由 } |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \geqslant 0, \text{故舍去} -2).$$

或由给定条件知

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$, 于是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

例 1.6 设 $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 5, (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{2}{3}\pi$, 若向量 $\boldsymbol{m} = \lambda\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 互相垂直, 求常数 λ.

分析 两个向量互相垂直的充分必要条件是其数量积为零，由此入手求出常数 λ.

解

$$\begin{aligned}
0 = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n} &= (\lambda\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\
&= 3\lambda\boldsymbol{a}^2 + (51 - \lambda)\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 17\boldsymbol{b}^2 \\
&= 12\lambda + (51 - \lambda)\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 425 \\
&= 12\lambda + (51 - \lambda)\times 2\times 5\times\cos\frac{2}{3}\pi - 425 \\
&= 17\lambda - 680.
\end{aligned}$$

即 $\lambda = 40$.

例 1.7 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量，且有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

分析 利用数量积的运算律和单位向量的概念求解.

解 因为

$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\\&=3+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

例 1.8 求垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,2,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(4,5,3)$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}_c$.

解 因为向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$. 所以所求的单位向量 $\boldsymbol{e}_c$ 必与向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 共线. 而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&1\\4&5&3\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3,$$

于是，所求的单位向量 $\boldsymbol{e}_c$ 为

$$\boldsymbol{e}_c=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k},$$

或 $-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$ 也是所求的单位向量.

例 1.9 已知向量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1),\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$, 且与向量 $\boldsymbol{c}=(1,2,-7)$ 的数量积为 10, 求向量 $\boldsymbol{x}$.

分析 利用 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 即可.

解 设 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$, 则依题意得

$$\begin{cases}2x-3y+z=0,\\x-2y+3z=0,\\x+2y-7z=10.\end{cases}$$

由上面方程组解得

$$x=7,\quad y=5,\quad z=1,$$

故所求向量为 $\boldsymbol{x}=(7,5,1)$.

四、疑难问题解答

1. 从 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是否可以推出 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$? 反过来，从 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是否可以推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, 为什么？

答 从 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 可知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的大小必相等，所以必有 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 反过来，由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 只知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，二向量的方向未必相同，所以由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 不能推出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

2. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，下列各式在什么条件下才能成立？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;　　(4) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

答 当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，(1) 式成立 (图 1.1); 当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})>\dfrac{\pi}{2}$ 时，(2) 式成立 (图 1.2); $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向时，(3) 式成立; $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，即当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$ 时，(4) 式成立 (图 1.3).

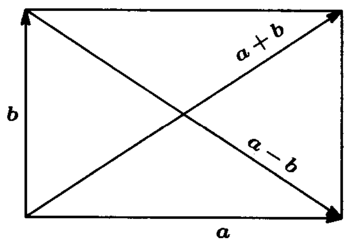

图 1.1

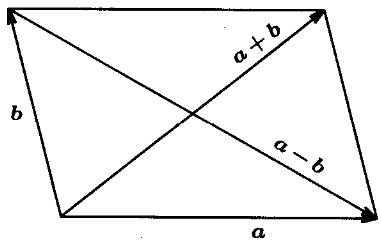

图 1.2

3. 下列说法是否正确，为什么？

(1) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 是单位向量;

(2) $2\boldsymbol{i}>\boldsymbol{j}$;

(3) 与 x,y,z 三坐标轴的正向夹角相等的向量，其方向角为 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

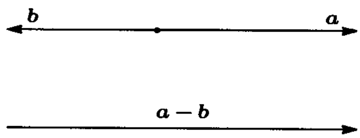

图 1.3

答 (1) 不正确. 由单位向量的定义知，模为 1 的向量称为单位向量. 因为向量 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的模 $|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\neq 1$, 故 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 不是单位向量.

(2) 不正确. 由于向量是既有大小又有方向的量，所以 $2\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 没有大小可言，不能比较. 当然向量的模是可以比较大小的，如 $|2\boldsymbol{i}|=2>|\boldsymbol{j}|=1$.

ISBN 7-302-07244-2

(3) 不正确. 与三坐标轴正向夹角相等的向量，其方向角不是 $\dfrac{\pi}{3}$. 因为任一向量的三个方向角 α,β,γ 应满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

当 $\alpha=\beta=\gamma$ 时，有 $3\cos^2\alpha=1$, 即 $\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\alpha=\arccos\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\neq\dfrac{\pi}{3}$. 又因为

$$\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\neq 1,$$

所以三个方向角均为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的向量是不存在的.

练习 1.1

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=(4,-1,3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(5,2,-2)$, 求 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角相等，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

3. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点坐标为 $A(1,0,-1)$, 终点坐标为 $B(4,-4,11)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模和方向角.

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦满足下列条件:
(1) $\cos\beta=0$; (2) $\cos\beta=1$; (3) $\cos\beta=\cos\gamma=0$. 说明这时向量 $\boldsymbol{a}$ 的特点.

5. 设 $A(1,-1,3),B(-1,1,4)$, 求 z 轴上的点 C 坐标，使 $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

6. 设点 M 的向径与 x 轴， y 轴正向分别成 $60°, 45°$ 的角，向量的模为 8, 求点 M 的坐标.

7. 若向量 $\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$ 和 $\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$ 的和与差相等，求 z.

8. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 同时垂直于向量 $\boldsymbol{b}=(3,6,8)$ 和 x 轴，且 $|\boldsymbol{a}|=2$, 求 $\boldsymbol{a}$.

练习 1.1 参考答案与提示

1. $(23,4,0)$.

2. 设 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角分别为 α,β,γ, $\alpha=\beta=\gamma$. 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. 可得 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

3. 13; $\alpha=\arccos\dfrac{3}{13},\beta=\arccos\left(-\dfrac{4}{13}\right),\gamma=\arccos\dfrac{12}{13}$.

4. (1) $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴垂直或 $\boldsymbol{a}$ 与 Oxz 面平行； (2) $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴平行或 $\boldsymbol{a}$ 与 Ozx 面垂直； (3) $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴平行或 $\boldsymbol{a}$ 与 Oyz 面垂直.