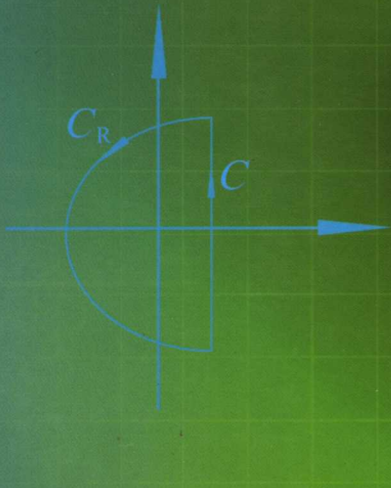
国家工科数学课程教学基地系列教材

复变函数同步学习指导

Fubian Hanshu Tongbu Xuexi Zhidao

电子科技大学应用数学学院 编



电子科技大学出版社

67
2005

国家工科数学课程教学

复变函数同步学习指导

电子科技大学应用数学学院

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数同步学习指导 /电子科技大学应用数学学院编.
—成都:电子科技大学出版社,2005.9

ISBN 7-81094-827-X

Ⅰ.复… Ⅱ.①电 … Ⅲ.复变函数-高等学校-教
学参考资料 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 107004 号

复变函数同步学习指导

电子科技大学应用数学学院 编

出　　版	电子科技大学出版社(成都建设北路二段四号,邮编:610054)
责任编辑	徐守铭
发　　行	新华书店经销
印　　刷	电子科技大学出版社印刷厂
开　　本	850×1168　1/32　印张　8.25　　字数　210 千字
版　　次	2005 年 8 月第一版
印　　次	2005 年 8 月第一次印刷
书　　号	ISBN 7-81094-827-X/O·43
印　　数	1—3000 册
定　　价	14.00 元

内容简介

本书根据国家教委颁发的《高等工科学校复变函数课程教学基本要求》并结合编者多年从事《复变函数》课程的经验编写而成. 本书的特色是:紧扣大纲,突出重点;重视基础,难易结合;注重思路分析,提高能力.

全书共分六个单元,每个单元分为四个部分:基本要求;内容提要;典型例题;单元检测题. 典型例题是本书的核心部分,附录中有四套电子科技大学复变函数期末考试试题及解答.

本书可供工科院校的本科学生、专科学生,报考研究生者、自学考试参加者以及成人教育工科各类学生参考.

前　言

本书根据国家教委颁布的《高等工科学校复变函数课程教学基本要求》编写而成，旨在帮助读者在学习复变函数课程时，进一步深入理解基本概念，掌握基本理论和基本方法，提高分析问题和解决问题的能力，为学习后续课程打下坚实的基础. 本书编写的指导思想是：紧扣大纲，突出重点，加强基础，难易结合，注重分析，启迪思路，提高能力.

本书根据教学内容分为六个单元，每个单元分为四个部分：(1)基本要求；(2)内容提要；(3)典型例题；(4)单元检测题. 典型例题是本书的核心部分. 有的例题还给出多种解法，以拓广思路，提高能力.

为了帮助读者检查自己的知识掌握情况，除每个单元附有检测题及答案外，在附录里还附有四套电子科技大学复变函数期末考试试题及解答，以供参考.

本书内容全面，例题典型，注重思路分析，解答详尽，深入浅出，语言流畅，便于自学，是读者学习复变函数的有力助手，本书可供普通高校、成人教育、高教自考等各类本、专科学生及报考研究生的读者参考.

本书的第一单元、第二单元、第三单元由董培建执笔，第四单元、第五单元、第六单元由陈绍刚执笔.

限于编者水平有限，难免有不妥之处，敬请批评指正.

编　者

2004 年 5 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一单元　复数与复变函数

一、基本要求

1. 熟练掌握复数的运算(加、减、乘、除、乘幂与方根),并能灵活应用.

2. 掌握复数的三种表示法及相互转换,能正确地求出复数的模与幅角.

3. 了解复数的几何表示法,理解单连域与多连域、区域与闭区域、有界区域与无界区域以及简单闭曲线的概念;了解一些常见的平面曲线及平面区域的复数表示形式.

4. 了解共轭复数的性质;了解复数模的性质.

5. 正确理解复变函数的定义及其几何概念——映射. 给定一个复变函数 $w=f(z)$,能熟练地求出其实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$.

6. 了解复变函数极限的定义,极限存在的充分必要条件;掌握复变函数极限的四则运算.

7. 了解复变函数连续的概念及连续的充分必要条件.

二、内容提要

1. 复数及其代数运算

(1)复数的定义

对于任意两个实数 x,y,我们称 $z=x+iy$ 为复数(i 为虚单位

且满足 $\mathrm{i}^2=1$). 其中 x,y 分别称为复数 z 的实部和虚部,分别记为

$$x = \mathrm{Re}(z),\quad y = \mathrm{Im}(z)$$

(2)复数相等

两个复数相等的充分必要条件是两个复数的实部和虚部分别相等.

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,那么

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

另外
$$z = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$$

附注:与实数不同,一般来讲,任意两个复数之间不能相互比较大小. 如 $4\mathrm{i}>\mathrm{i}$,$f(z)<0$ 的表达式都是不对的. 这一点请读者切记.

(3)复数的四则运算

1)加法和减法

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$$

2)乘法

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

显然,当 z_1 与 z_2 为实数(即当 $y_1=y_2=0$)时,以上两式与实数的运算法则一致.

3)商

我们称满足 $z_2z=z_1(z_2\neq0)$ 的复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 为 z_1 除以 z_2 的商,记作 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$. 由此定义可知

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} \\ &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

(4)复数的运算律

与实数一样,复数的运算满足交换律、结合律和分配律.

1)交换律

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$z_1 - z_2 = -z_2 + z_1$$

$$z_1z_2 = z_2z_1$$

2)结合律

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$$

3)分配律

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

2. 共轭复数及其性质

(1)共轭复数的定义

实部相同而虚部的正负号相反的两个复数称为共轭复数. z 的共轭复数记为 $\bar{z}$,如果 $z = x + iy$,则 $\bar{z} = x - iy$,反之亦然.

(2)共轭复数的性质

1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

$\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} (z_2 \neq 0)$

2) $\overline{(\bar{z})} = z$

3) $z\bar{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

4) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2x$

$$z-\bar{z}=\mathrm{i}2\mathrm{Im}(z)=\mathrm{i}2y$$

附注:对于共轭复数的上述性质读者必须熟悉,在计算中和证明中常常要使用它们.

3. 复数的几何表示

在平面上取直角坐标系,用横坐标轴上的点 x 表示复数 z 的实部,称为实轴;用纵坐标轴上的点 y 来表示复数 z 的虚部,称为虚轴. 实轴和虚轴所在的平面称为复平面或 z 平面,如图 1-1 所示. 于是,复平面上的点 (x,y) 与复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 之间建立了一一对应的关系,即点 $(x,y)\longleftrightarrow$ 复数 $z=x+\mathrm{i}y$. 所以复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用复平面上的点 (x,y) 来表示.

附注:为了方便,今后我们不再区分"数"和"点". 说到"数"可以指它代表的"点";说到"点"也可以指这个"点"表示的"数",将两者相提并论.

(1)复数的向量表示法

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还能用从原点指向 (x,y) 点的向量来表示,如图 1-1 所示.

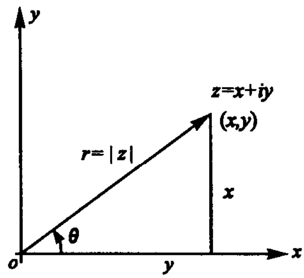


图 1-1

1)复数的模

表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的向量的长度称为复数 z 的模或绝对值,用 z 表示,如图 1-1 所示,有

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

显然下列各式成立

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|$$
$$|z|\leqslant|x|+|y|$$
$$z\bar{z}=|z|^2,\quad |\bar{z}|=|z|$$

2)复数的幅角

定义:设复数 $z\neq0$,我们把表示复数 z 的向量与实轴正方向

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

之间的夹角 θ 称为复数 z 的幅角，记为 $\mathrm{Arg}z$，如图 1-1 所示．$\mathrm{Arg}z$ 是无穷多值的，设 θ_2 是 z 的幅角中的一个，则

$$\mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi \qquad (k\text{ 为任意整数})$$

定义：我们把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的幅角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的幅角主值（或主幅角），记为 $\arg z$，那么

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \qquad (k\text{ 为任意整数})$$

附注：①主幅角 $\arg z$ 与幅角 $\mathrm{Arg}z$ 是不相同的，$\arg z$ 是单值的，且 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$，而 z 的幅角 $\mathrm{Arg}z$ 是无穷多值的．请读者注意它们的不同，切莫混为一谈．

②当 $z=0$ 时，$|z|=0$，而幅角不确定．

幅角主值 $\arg z$ 的求法：

$$\begin{array}{c}\arg z = \\ z = x+\mathrm{i}y\neq 0\end{array}\begin{cases}\mathrm{argtan}\,\dfrac{y}{x} & \text{当 } x>0,\ y\ \substack{<\\=\\>}\ 0\text{ 时；}\\ \pm\dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x=0,\ y\gtrless 0\text{ 时；}\\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi & \text{当 } x<0,\ y\gtrless 0\text{ 时；}\\ \pi & \text{当 } x<0,\ y=0\text{ 时．}\end{cases}$$

其中，$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 两个常用的不等式

三角不等式对复数也成立，即

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$$

附注：$|z_1-z_2|$ 在几何上表示复平面上两点 z_1 与 z_2 间的距离．

4. 复数的三种表示式

(1) 代数式： $z=x+\mathrm{i}y$， $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$

(2)三角式： $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

(3)指数式： $z=re^{\mathrm{i}\theta}$

在三角式和指数式下，两个复数的乘积与商分别表示为

$$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$$

$$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$z_1z_2 = (r_1e^{\mathrm{i}\theta_1})(r_2e^{\mathrm{i}\theta_2}) = r_1r_2e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2e^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \qquad (z_2\neq 0)$$

5. 复数的乘幂与方根

(1)两个复数的积与商的模与幅角

定理一：两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数乘积的幅角等于它们的幅角之和．即

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$$

定理二：两个复数的商的模等于它们的模的商；两个复数商的幅角等于被除数的幅角与除数的幅角之差．即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2$$

附注：定理一、定理二中关于 $\mathrm{Arg}z$ 的两个等式都是集合等式，应该这样来理解：任意给定一个等式右端的两个多值函数的一对可能取的值，左端的多值函数也必有一个值使这个等式成立．

反过来说也一样.

(2)复数的乘幂

1)定义: n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂,记为 z^n.

2)计算公式:

三角式:$z^n = r^n(\cos n\theta \ \mathrm{i}\sin n\theta)$.

指数式:$z^n = (re^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta}$.

特别是对单位复数,因 $|z| = r = 1$,所以

$$z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \qquad \text{(棣莫佛公式)}$$

(3)复数的 n 次方根

1)定义: 使方程 $z = w^n$ ($z \neq 0$, n 为正整数)成立的每一个 w 值称为复数 z 的 n 次方根,记为 $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$.

2)计算公式:

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).$$

当 $k = 0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得到 n 个不同的根.

6. 常用的平面曲线的复数表示式

(1) $|z - (a + \mathrm{i}b)| = r$ 表示以 $a + \mathrm{i}b$ 为圆心,r 为半径的圆周.

(2) $\mathrm{Re}(z) = a$ 表示平行于虚轴的直线.

(3) $\mathrm{Im}(z) = 0$ 表示实轴.

(4) $\arg z = \alpha$ 表示以原点 $z = 0$ 为起点,与 x 轴正方向间夹角为 α 的一条射线.

(5) $z = (a + \mathrm{i}b)t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 表示从原点到 $a + \mathrm{i}b$ 的直线段.

(6) $|z - z_1| = |z - z_2|$ 表示垂直平分连接 z_1 与 z_2 两点的线段的直线.

附注: 平面曲线的复数表示式 $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ 等价于平面曲线的参数方程.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

7. 区域

(1)点 z_0 的邻域

平面上以 z_0 点为圆心,δ(任意正数)为半径的圆的内部的点的集合 $|z - z_0| < \delta$,称为 z_0 的邻域. 而由不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 所确定的平面点集称为 z_0 的去心邻域.

(2)区域

如果平面点集 D 满足下面两个条件,则称此平面点集为 D 的一个区域.

1)D 是开集,即是说对于 D 中的任意一点至少存在一个邻域,该邻域内的点全部属于 D.

2)D 内任意两点都可以用 D 内的一条折线连接起来. 简言之连通的开集称为区域.

(3)闭区域

区域 D 与它的边界一起构成闭区域,记为 $\overline{D}$.

(4)有界区域

如果一个 D 可以被包含在一个以原点为中心的圆里面,那么称 D 是有界的;否则称 D 是无界的.

(5)连续曲线

设函数 $x = x(t)$,$y = y(t)$ 是定义于 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的两个连续的实变函数,把由方程 $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ 所确定的平面点集称为 z 平面上的一条连续曲线.

(6)简单闭曲线

一条连续曲线 C:$z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$,如果除 $z(a) = z(b)$ 外,对于(a,b)内的 $t_1 \neq t_2$,有 $z(t_1) \neq z(t_2)$,那么称此连续曲线是一条简单闭曲线.

(7)单连域和多连域

一个区域 B,如果在 B 内任意作一条简单闭曲线 C,而 C 的内部全部属于 B,则称 B 是一个单连域. 一个区域不是单连域就是多连域.

单连域的特征:属于单连域 B 内的任何一条简单闭曲线,在 B 内可以经过连续变形而缩成 B 内的一个点. 所谓曲线在 B 内连续变形的含义是:曲线在 B 内可以任意伸长、缩短、伸展、弯曲,但不允许扯断也不允许粘接.

从直观上来讲,一个单连域 B 的内部既没有洞(包括点洞)也没有裂痕.

附注: 约当定理

任何一条简单闭曲线 C 将复平面唯一地分成 C,$I(C)$ 和 $E(C)$ 三个点集,如图 1-2 所示. 它们具有如下性质:

1)彼此不相交;

2)$I(C)$ 是一个有界区域(称为 C 的内部);

3)$E(C)$ 是一个无界区域(称为 C 的外部);

4)C 是 $I(C)$ 和 $E(C)$ 的共同边界;

5)若简单折线 p 的一个端点属于 $I(C)$,另一个端点属于 $E(C)$,则 p 必与 C 有交点.

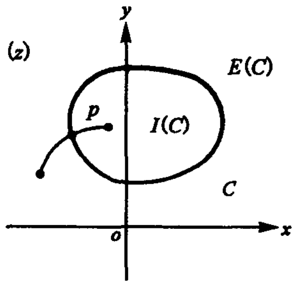


图 1-2

8. 复变函数

(1)定义

对于复变数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的集合 G 中的每一个 z,如果存在一个确定的法则,按照这个法则,复变数 $w=u+\mathrm{i}v$ 总有一个或多个确定值与之对应,则称复变数 w 是复变数 z 的函数,简称复变函数,记为 $w=f(z)$.

如果 z 的一个值对应着一个 w 值，那么称函数 $w=f(z)$ 是一个单值函数；如果一个 z 的值对应两个或两个以上的 w 值，则称 $w=f(z)$ 是一个多值函数．集合 G 称为 $f(z)$ 的定义集合，对应于 G 中所有 z 的一切 w 值所成的集合 G^*，称为函数值集合．

在以后的讨论中，如无特殊说明，所讨论的函数均为单值函数，遇到多值函数，我们都将其分成单值函数后再加以研究．

附注： 复变函数 $w=f(z)$ 的定义在形式上与实变函数 $y=f(x)$ 是类似的，但两者却有许多不同之处．给定一个复变函数 $w=f(z)$，由于 $z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，所以涉及到四个实变量 (u,v) 和 (x,y)；同时给出一个复变函数 $w=f(z)$，相当于给出了两个二元实函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$．在以后的学习中，许多复变函数的问题都要转化成实函数的问题来研究，这是学习"复变函数"课程的重要方法之一，所以给出一个复变函数 $w=f(z)$，正确地求出两个二元函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 是我们必须熟练掌握的．

(2)复变函数的几何概念——映射

对于复变函数 $w=f(z)$，由于它反映了两对实变量 u,v 和 x,y 之间的对应关系，涉及到四个实变量，因而无法用同一平面内的几何图形表示出来，必须采用两张复平面的方法来研究它们的对应关系．

一个复变函数 $w=f(z)$ 在几何上可以看成把 z 平面上的一个点集 G（定义集合）变到 w 平面上的一个点集 G^*（函数值集合）的一个映射（或变换），通常简称为由复变函数 $w=f(z)$ 所构成的映射. 所以在几何上研究一个复变函数 $w=f(z)$ 就是要研究两张复平面上的两个对应点集 G 和 G^* 间的对应关系．

9. 复变函数的极限

(1)定义

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com