

XIANGXING GANGLIANG
BOFUBAN WENDING

箱形钢梁 薄腹板校定

兰州铁道学院工程系结构研究室
铁道部第三勘测设计院标准处

人 民 铁 道 出 版 社

内 容 提 要

本书介绍箱形钢梁薄腹板的设计计算理论研究和试验成果。内容包括腹板的抗力分析与薄腹板的设计思路, 板块临界应力与翘曲安全度, 加劲肋计算与设计, 模型试验。本书可供薄腹板的设计, 研究工作者参考。

箱形钢梁薄腹板稳定

兰州铁道学院工程系结构研究室

铁道部第三勘测设计院标准处

人民铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092 1/16 印张: 6.125 字数: 142 千

1978年8月第1版 1978年8月第1次印刷

统一书号: 15043·6129 定价: 0.61 元

序 言

腹板是箱形钢梁的重要组成部分，用钢量在全梁总钢量中的比重甚大。

腹板横截面上应力分布不均，材料抗力得不到充分发挥，造成钢材浪费。经验证明：在箱形钢梁设计中，腹板数量愈多或厚度愈大，愈费料。因此，研究、改进腹板设计，比较充分地发挥材料抗力，或尽量减少未发挥抗力的材料的比重，甚至是推动箱形钢梁桥朝着大跨、体轻、省料方向发展的途径之一。

腹板高度是由梁高决定的，而梁高是权衡多种因素经过方案比较选取的。设计普通板梁时，由于梁的高度较低，我们习惯在《规范》指导下设计高厚比小于或等于 250 的腹板。随着大跨度箱形钢梁桥的出现与发展，箱形钢梁的高度比普通板梁增大。梁高 3 米以上的铁路箱形钢梁桥尤为多见，个别公路桥（里约热内卢）局部区段已高达 14 米。若仍用 250 的高厚比进行设计，腹板就会较厚，很不经济。我们考虑采用尽可能薄的腹板。这样一来，高厚比必然较大，超过、甚至远远超过 250，这就是我们研究的薄腹板。

薄腹板的一个重要优点是能够降低未发挥抗力的材料在全梁总钢料中的比重，因而节省钢材。以某线 3×64 米连续箱形钢梁桥为例，腹板每减薄 2 毫米可省钢 20 吨，经济效果是十分明显的。

一九七三年， 3×64 米连续箱形钢梁桥设计组提出把高 4.4 米的腹板作成 10 毫米厚，即设计高厚比为 440 的薄腹板的初步意见。随后，国内不少兄弟单位对这种腹板进行了不同侧面的研究，取得了一定成果。其中，兰州铁道学院工程系、铁道部第三设计院标准处等单位研究了薄腹板的设计计算理论，进行了设计实践，完成了高厚比 440 的薄腹板技术设计；铁道部科学研究院桥梁室、兰州铁道学院工程系、铁道部大桥工程局勘测设计处、铁道部第一工程局等单位共同对 9 个高厚比为 440 的薄腹板模型开展了纯弯应力状态下的试验研究；一九七七年兰州铁道学院工程系结构研究室又进行了 6 个弯剪组合应力状态下的薄腹板模型试验。本书将介绍上述方面的工作。主要包括：薄腹板抗力分析与薄腹板设计思路；薄腹板板块临界应力与翘曲安全度；加劲肋计算与设计；模型试验。这些成果适用于高厚比为 250~440、或从中性轴到受压区边缘具有三条水平加劲肋的薄腹板。对于更大高厚比，或需设置三条以上水平加劲肋时，本成果的基本研究思路也是可供参考的。

本书由兰州铁道学院工程系唐家祥、刘岐山、姜舜华、铁道部第三设计院标准处刘晨星编写，分工如下：唐家祥（第一、二、三章），刘岐山、姜舜华（第四、五章），刘晨星同志参加了第三章第五节编写工作。编写过程中，得到了铁道部科技委、兰州铁道学院工程系、铁道部第三设计院标准处领导的大力支持与鼓励。

先后参加过本书有关研究工作的还有：铁道部科学研究院周家模、铁道部第三设计院李上雷、铁道部大桥工程局勘测设计处张继良。铁道部科学研究院结构试验室、兰州铁道学院结构试验室对本研究的有关试验工作给予了积极支持与帮助，在此，我们致以谢意。

编 者

一九七八年元月

目 录

序 言

第一章 腹板抗力分析与薄腹板设计思路	1
第一节 腹板抗力分析	1
第二节 箱形梁腹板设计建议	5
第三节 薄腹板设计思路	6
第二章 板块临界应力与翘曲安全度	7
第一节 矩形薄板弯曲理论基本知识	7
第二节 单向均匀压力作用下矩形板块的临界应力	18
第三节 板块翘曲的能量原理	21
第四节 剪应力作用下四边简支矩形板块的临界应力	24
第五节 线性分布压应力作用下四边简支矩形板块的临界应力	28
第六节 临界换算应力	34
第七节 弹塑性翘曲	36
第八节 翘曲安全度	40
第三章 加劲肋计算与设计	42
第一节 竖向加劲肋位置	42
第二节 竖向加劲肋刚度计算与设计	43
第三节 水平加劲肋位置	46
第四节 水平加劲肋刚度与肋肢稳定性	49
第五节 算例	55
第四章 纯弯应力状态下薄腹板的稳定试验	66
第一节 模型梁的设计与制造	66
第二节 试验荷载及加载方法	71
第三节 试验用仪表和测点布置	71
第四节 加载程序及测试	74
第五节 试验结果分析	74
第六节 几点结论	88
第五章 弯剪组合应力状态下薄腹板的稳定试验	89
第一节 模型梁的设计、制造与测试	89
第二节 试验结果分析	89

第一章 腹板抗力分析与 薄腹板设计思路

第一节 腹板抗力分析

工作状态下的结构或构件，破坏与抗破坏这对矛盾常常是主要矛盾。一般说来，属于破坏一方者为荷载、温度变化等；结构或构件的抗破坏能力为另一方，它的大小与材料性质、结构形式等因素有关，反映了结构的内因，是矛盾的主要方面。

结构或构件的抗破坏能力，与材料本身具有的最大抗破坏能力，是两个不同的概念。后者指的是做成结构的那块材料本身具有的最大抗破坏能力（简称材料具有的抗力），仅取决于材料性质、几何尺寸，与结构形式无关。对于钢材，我们用均匀分布拉应力作用下到达破坏时的应变能来衡量；前者指的是用那块材料做成某种结构或构件后，能够发挥出的材料抗力（简称发挥出的抗力），我们用荷载作用下该结构或构件的应变能来衡量。同是那么一块材料，做成不同的结构或构件（例如，梁、拱、桁架与各种构件等等），由于应力性质与分布规律不同，破坏形式（强度、稳定、疲劳……）不同，以及与破坏形式相关的容许应力不同，因而，能够发挥出的抗力就不一样。

一种合理的结构形式，应当在满足使用的条件下，尽可能使材料具有的抗力得到充分发挥。即是说，应当使结构在荷载作用下发挥出的抗力尽可能接近于材料具有的抗力，做到物尽其用，方能以尽可能少的材料去承受尽可能大的荷载，收到省料、体轻的效果。这是我们研究、设计结构时所应当努力争取的。否则，如果结构发挥出的抗力远低于材料具有的抗力，必然是物未尽其用，一部分材料将被浪费。对于这样的结构形式，需要努力研究，不断改进。

一、腹板材料具有的抗力

按照上面所说的材料本身具有的抗力的概念与衡量方法，就目前常用的容许应力理论来说，腹板材料具有的抗力等于沿腹板高度均匀分布拉应力作用下，应力 σ 达到容许应力 $[\sigma]$ 时（图1-1）的应变能，用符号 U 表示。

设腹板截面上高 dy 、厚 δ （腹板厚度）的微面积内的应变能为 dU ，则

$$dU = \frac{1}{2} \sigma \epsilon \delta dy$$

其中 ϵ ——应变。

引入应力应变关系

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

其中 E ——弹性模量。

因此，得

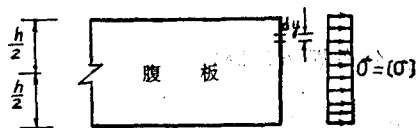


图 1-1

$$dU = \frac{\sigma^2 \delta}{2E} dy \quad (a)$$

积分 (a) 式, 得整个腹板截面的应变能 U

$$U = \int_F dU = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\sigma^2 \delta}{2E} dy = \frac{\sigma^2 \delta h}{2E} \quad (b)$$

当应力 σ 达到轴向容许应力 $[\sigma]$, 即

$$\sigma = [\sigma]$$

时, 应变能为

$$U = \frac{[\sigma]^2 \delta h}{2E} \quad (1-1)$$

这就是计算腹板截面材料具有的抗力的公式。只要给出腹板的几何尺寸、材料性质、容许应力, 腹板材料具有的抗力就确定了。

二、腹板发挥出的抗力

腹板发挥出的抗力是荷载作用下腹板截面的应变能。考查荷载作用下腹板截面的应力及其分布情况, 并将应力分布情况理想化 (图

1-2 实线)。设距腹板中央 y 处, 高为 dy , 厚 δ 的微面积上的应变能为 dU_1 , 则

$$dU_1 = \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y \delta dy + \frac{1}{2} \tau_y \gamma_y \delta dy$$

其中 ε_y, γ_y —— y 处的正应变与剪应变。

引入应力应变关系

$$\sigma_y = E \varepsilon_y$$

$$\tau_y = G \gamma_y$$

$$\text{则} \quad dU_1 = \frac{1}{2E} \sigma_y^2 \delta dy + \frac{1}{2G} \tau_y^2 \delta dy \quad (a)$$

其中 G —— 剪切模量。

由图 1-2 知, 正应力分布的几何关系为:

$$\sigma_y = \frac{2y\sigma_{\max}}{h} \quad (b)$$

剪应力分布规律是抛物线, 设为

$$\tau_y = ay^2 + b \quad (c)$$

其中 a, b —— 两个待定系数。

若将边缘剪应力视为中央剪应力 $\tau_{\max}$ 的 α 倍 ($0 < \alpha \leq 1$), α 代表了剪应力非均匀分布系数。依条件:

$$y = 0, \quad \tau_y = \tau_{\max}$$

$$y = \pm \frac{h}{2}, \quad \tau_y = \alpha \tau_{\max}$$

由 (c) 式可得任意点的剪应力:

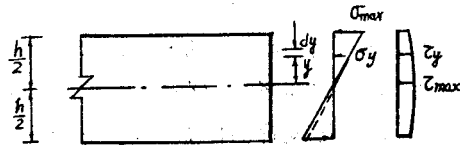


图 1-2

$$\tau_y = \left[1 - \frac{4(1-\alpha)y^2}{h^2} \right] \tau_{\max} \quad (d)$$

将式 (b)、(d) 代入 (a)，并引入杨氏模量与剪切模量之间的关系

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

其中 μ ——泊松系数，对于钢材取 $\mu=0.3$ ，

得

$$dU_1 = \frac{2\delta\sigma_{\max}^2}{Eh^2} y^2 dy + \frac{(1+\mu)\delta\tau_{\max}^2}{E} \left[1 - \frac{4(1-\alpha)y^2}{h^2} \right]^2 dy \quad (e)$$

积分 (e) 式，得整个腹板截面的应变能 U_1

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_F dU_1 = \frac{2\delta\sigma_{\max}^2}{Eh^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy \\ &\quad + \frac{(1+\mu)\delta\tau_{\max}^2}{E} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[1 - \frac{4(1-\alpha)y^2}{h^2} \right]^2 dy \\ &= \frac{h\delta\sigma_{\max}^2}{6E} + \frac{(1+\mu)[8+(4+3\alpha)\alpha]h\delta\tau_{\max}^2}{15E} \\ &= \frac{h\delta}{6E} \left\{ \sigma_{\max}^2 + \frac{6(1+0.3)[8+(4+3\alpha)\alpha]}{15} \tau_{\max}^2 \right\} \\ &= \frac{h\delta}{6E} \{ \sigma_{\max}^2 + 0.52[8+(4+3\alpha)\alpha] \tau_{\max}^2 \} \quad (f) \end{aligned}$$

对于式 (f)，分三种情况加以讨论：

第一种情况，属于连续梁跨中的那些断面。剪应力比正应力小得多，略去剪应力的影响后，(f) 式变为

$$U_1 = \frac{h\delta}{6E} \sigma_{\max}^2$$

因为正应力至多可达挠曲容许应力 $[\sigma_w]$ ，即

$$\sigma_{\max} = [\sigma_w] = 1.05 [\sigma]$$

所以，应变能 U_1 至多可为

$$U_1 = \frac{h\delta}{6E} [\sigma_w]^2 = \frac{h\delta}{6E} (1.05[\sigma])^2 = \frac{0.368[\sigma]^2 h\delta}{2E} \quad (1-2)$$

第二种情况，属于连续梁端支座附近的那些断面。正应力比剪应力小得多，略去正应力的影响，则 (f) 式为

$$U_1 = \frac{h\delta}{6E} \{ 0.52[8+(4+3\alpha)\alpha] \tau_{\max}^2 \} \quad (1-3')$$

剪应力 $\tau_{\max}$ 至多可达容许剪应力 $[\tau]$ ，即

$$\tau_{\max} = [\tau] = 0.6[\sigma]$$

所以，应变能 U_1 只能达到

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{h\delta}{6E} \{ 0.52[8+(4+3\alpha)\alpha] (0.6[\sigma])^2 \} \\ &= \frac{0.0624[8+(4+3\alpha)\alpha] h\delta [\sigma]^2}{2E} \quad (1-3) \end{aligned}$$

第三种情况，属于连续梁中间支座附近的那些断面。正应力与剪应力都不能略去，(f)式可化为

$$U_1 = \frac{h\delta}{6E} [\sigma_{\max}^2 + 3(\alpha\tau_{\max})^2 + (4.16 + 2.08\alpha - 1.44\alpha^2)\tau_{\max}^2]$$

注意到方括弧内

$$\sigma_{\max}^2 + 3(\alpha\tau_{\max})^2 = \sigma_v^2$$

其中 σ_v ——腹板边缘的换算应力。

则

$$U_1 = \frac{h\delta}{6E} [\sigma_v^2 + (4.16 + 2.08\alpha - 1.44\alpha^2)\tau_{\max}^2]$$

一般说来剪应力较小，以 $\tau_{\max} = \frac{1}{3}[\sigma]$ 进行分析对很多场合是合适的。并且，换算应力 σ_v 至多达到轴向容许应力的1.1倍，即

$$\sigma_v = 1.1[\sigma]$$

所以，应变能至多可为

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{h\delta}{6E} \left[(1.1[\sigma])^2 + (4.16 + 2.08\alpha - 1.44\alpha^2) \left(\frac{[\sigma]}{3} \right)^2 \right] \\ &= \frac{(0.557 + 0.077\alpha - 0.053\alpha^2)h\delta[\sigma]^2}{2E} \end{aligned} \quad (1-4)$$

三、两类抗力比较

比较 (1-1)、(1-2) 两式

$$\frac{U_1}{U} = \frac{\frac{0.368h\delta[\sigma]^2}{2E}}{\frac{h\delta[\sigma]^2}{2E}} = 0.368 \approx 0.37$$

或

$$U_1 \approx 37\% U \quad (1-5)$$

式 (1-5) 表明，由于弯曲正应力分布很不均匀，当边缘应力达到容许应力时，靠近中部的大部分区域还处于低应力水平，致使腹板发挥出的抗力最多只能为材料具有的抗力的37%。事实上，这个数字有时也是达不到的。由于盖板翘曲以及沿上盖板宽度应力分布不均，造成腹板边缘的设计应力比容许应力低，腹板实际发挥出的抗力比式 (1-5) 给出的还小。目前，有的设计结果，腹板边缘的应力约为容许应力的0.8倍，腹板实际上发挥出的抗力只有材料具有的抗力的24%，即

$$U_1 = 0.8^2 \times 0.368 U \approx 24\% U \quad (1-5')$$

比较 (1-1)、(1-3) 两式

$$\frac{U_1}{U} = \frac{\frac{0.0624[8 + (4 + 3\alpha)\alpha]h\delta[\sigma]^2}{2E}}{\frac{h\delta[\sigma]^2}{2E}} = 0.0624[8 + (4 + 3\alpha)\alpha]$$

或

$$U_1 = 0.0624[8 + (4 + 3\alpha)\alpha]U \quad (a)$$

当剪应力均匀分布时 ($\alpha = 1$)，(a) 式为

$$U_1 = 0.936U = 93.6\%U \quad (1-6)$$

从式(1-3')看出,当仅有剪应力作用时,腹板断面发挥出的抗力随 α 增加而增加,随 τ_{max} 提高而提高。式(1-6)只是剪应力沿腹板高度均匀分布($\alpha=1$),并且达到了容许剪应力值时的非常理想化的结果,可以把它看成是腹板抗力发挥情况的上限。实际上,常常比式(1-6)给出的结果要低得多。从有的设计(3×64米连续箱形钢梁腹板高4.4米,厚10毫米)看, α 约为0.5,最大剪应力 τ_{max} 不到容许剪应力的 $\frac{1}{2}$,因此,实际上发挥出的抗力也不到材料具有的抗力的16.8%,即由式(1-3)有

$$U_1 = \frac{h\delta}{6E} \left\{ 0.52[8 + (4 + 3 \times 0.5)0.5] \left(\frac{0.6[\sigma]}{2} \right)^2 \right\} = \frac{0.168h\delta[\sigma]^2}{2E}$$

与式(1-1)比较,便得 $U_1 = 16.8\%U$ (1-6')
要是把腹板设计得厚一些,发挥出的抗力就更少了。因为,腹板愈厚, α 与 τ_{max} 都会随之减小。

比较(1-1)、(1-4)两式

$$\frac{U_1}{U} = \frac{\frac{(0.557 + 0.077\alpha - 0.053\alpha^2)h\delta[\sigma]^2}{2E}}{\frac{h\delta[\sigma]^2}{2E}} = 0.557 + 0.077\alpha - 0.053\alpha^2$$

或

$$U_1 = (0.557 + 0.077\alpha - 0.053\alpha^2)U$$

当

$$\alpha = 0.726$$

时, U_1 有最大值,其值为

$$U_1 \approx 0.59U$$

或

$$U_1 \approx 59\%U \quad (1-7)$$

式(1-7)说明,对于弯曲正应力与剪应力均不能略去,最大剪应力约为轴向容许应力的三分之一时,腹板发挥出的抗力最多可达材料具有的抗力的59%。由于盖、腹板翘曲的影响,换算应力 σ_r 常比容许应力 $[\sigma]$ 低,因此,实际发挥出的抗力比式(1-7)给出的要少。从我们作过的设计看,发挥出的抗力约占它具有的抗力的50%,即

$$U_1 = 50\%U \quad (1-7')$$

第二节 箱形梁腹板设计建议

概括地估价(1-5)、(1-6)、(1-7)三式,腹板能够发挥出的抗力约为材料具有的抗力的63%,这是腹板这种结构形式所决定的。从设计上看,主要由于沿上盖板度应力分布不均以及剪应力过低等缘故,腹板实际发挥出的抗力大约只为它具有的抗力的30%,即有70%的抗力得不到发挥,如果注意到腹板用钢量占全梁总钢料中的比重很大(例如,有的薄腹板箱形梁设计,腹板钢料为全梁总钢料的三分之一),这就是一个十分可观的数字。

为了使腹板抗力能够得到较好发挥,除了应对上盖板的传力构造形式进行研究外,就腹板本身来说,我们建议:

1. 尽量把腹板设计得薄一些;

2. 将腹板改成杆件体系, 形成板(上、下盖板)桁(代替腹板的杆件体系)组合结构, 改善结构应力分布状况, 进一步发挥材料具有的抗力。

对于薄腹板, 一方面可以使那些剪应力占优势的断面材料具有的抗力比较充分地发挥出来; 另一方面, 对于弯曲正应力为主的断面, 也可以使未发挥抗力的材料减少。否则, 板愈厚, 未发挥抗力的材料愈多, 梁体必然愈重。

腹板薄了, 一些问题会变得突出起来。例如, 因临界应力降低可能使材料发挥出的抗力比(1—5')、(1—6')、(1—7')式的结果还要小, 以及疲劳问题、焊接变形问题等等。但是, 解决这些问题时, 亦应努力寻求那些有利于使板尽可能薄一些的办法。从这个意义上讲, 带有数条水平加劲肋的薄腹板是合适的。

有数条水平加劲肋的薄腹板, 肋的数量与刚度起着十分重要的作用。用加肋的办法提高翘曲强度比用增加板厚的办法, 不仅省料而且效果好。

第三节 薄腹板设计思路

薄腹板设计, 主要还是解决安全与经济这对矛盾。高厚比大, 省钢明显, 但设计中会遇到各种问题, 例如, 稳定问题、疲劳问题、焊接变形与残余应力问题等等。但一般说来, 主要矛盾是稳定问题。在稳定问题中, 当加劲肋数目较多间距又大时, 必须同时顾及腹板整体与肋间局部板块的翘曲强度。因此, 我们采取的设计思路是: 用足够强大的、位置合理的竖向与水平加劲肋, 把腹板分割成一块一块的较小板块(图1—3), 并使整个腹板的翘曲与局部板块的翘曲同时发生或在其后。而局部板块的翘曲安全度达到设计要求。

设计思路决定了计算内容, 薄腹板的设计必须作以下两个方面的计算:

1. 竖向与水平加劲肋的刚度及其稳定性满足设计要求;
2. 每个板块的翘曲安全度达到规定指标。

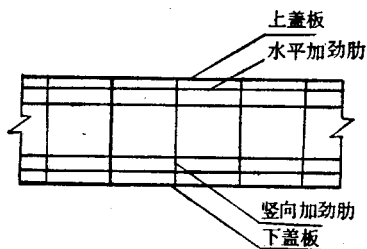


图 1—3

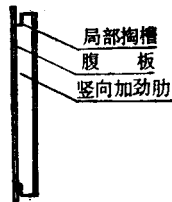


图 1—4

前者保证了设计思路能够实现, 后者保证了每个局部板块的安全, 二者缺一不可。一旦都通过了, 腹板的翘曲安全度无论是整体的还是局部的也都够了。

在抓住稳定问题这个主要矛盾的时候, 对于其它一些问题也不应忽视。例如, 当竖肋端部焊缝疲劳强度不够时, 我们采取了局部掏槽(图1—4)措施加以解决。等等。

第二章 板块临界应力 与翘曲安全度

被竖向与水平加劲肋分割后的腹板板块是矩形板块。计算临界应力时，腹板与加劲肋及上、下盖板联结处按简支看待。

第一节 矩形薄板弯曲理论基本知识

一、板

凡厚度 δ 比横向尺寸 a 、 b 小得多的块体称为板。平分板厚的面称中面（图2-1 a）。除非特殊需要，均用中面代表板。坐标轴 ox 、 oy 放在中面上，并与中面两邻边重合（图2-1 b）。

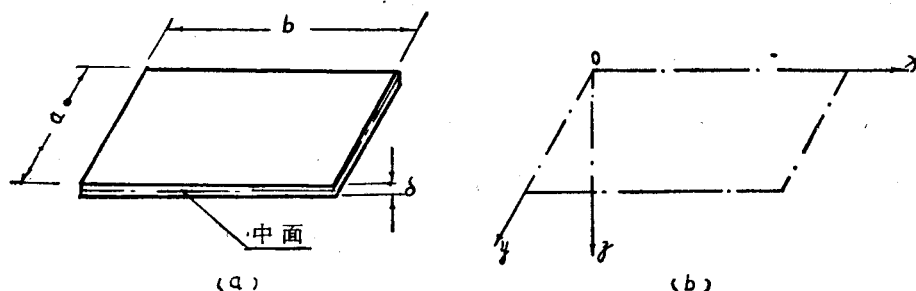


图 2-1

由于焊接制造等原因，箱形钢梁中的腹板、盖板，总有或大或小的初始变形。当初变形对板块临界应力不发生显著影响时，可将板块按理想平板看待；即使是需要计入初变形的影响，也可先按理想平板施行计算，而后按初变形的大小予以适当修正。

按板的厚度 δ 与最小边长度 a 的比值大小，平板分为薄板与厚板两种。 $\frac{\delta}{a} \leq \frac{1}{5}$ 时属薄板，否则是厚板。箱形钢梁中的腹板板块以及其它板块均属薄板范畴。

二、应力与内力素

即便是用精确的理论分析，矩形薄板内任意一点至多有9个应力分量： σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yz} 、 τ_{yx} 、 τ_{zx} 、 τ_{zy} （图2-2）。它们的正负号规定为：在外法线为正的面上，指向坐标轴正向的应力为正，反之为负。可见，图2-2示出的应力均为正值应力。

矩形薄板小变形弯曲工程理论是一种近似理论，建立在以下假设基础之上：

(1) 变形前垂直于中面的直线，变形后仍然是直线，并且还垂直于中面，长度也不改变 (图 2-3 a)；

(2) 中面内没有伸缩和剪切变形；

(3) 平行于中面的面上，法向应力可以略去，即

$$\sigma_z = 0$$

经过以上假设，不仅可使板内任意一点的应力状态得到简化，而且明确了板的截面上的应力分布规律。

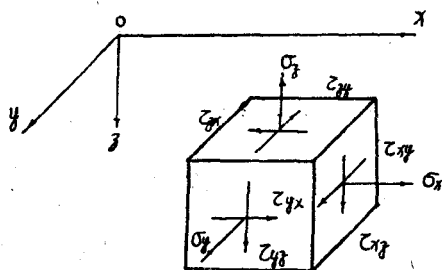


图 2-2

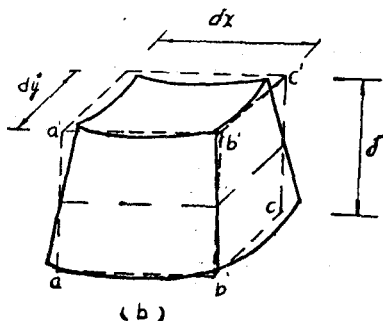
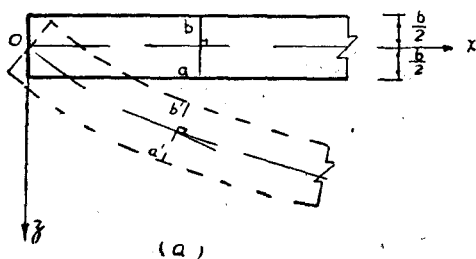


图 2-3

分析长 dx 、宽 dy 、厚为 δ 的微分板块 (图 2-3 b 虚线)。根据假设 (2)，中面周边上的法向应力与剪应力为零，这就是说，中面即为中性面 (相当于梁的中性层)。由假设 (1)，与中面垂直的直线 $a-a'$ 、 $b-b'$ 、 $c-c'$ 变形后只是发生了一个转动，如图 2-3 b 所示。由此推论，微分板块四个截面上的正应力 σ_x 、 σ_y 与剪应力 τ_{xz} 、 τ_{yz} 沿板厚呈直线分布 (图 2-4)。为了说明剪应力 τ_{xz} 及 τ_{yz} 的分布规律，从图 2-4 所示微分板块上，用 z 等于常数的水平截面将它分成两部分。取截面以下为研究对象，各面上 ox 方向的应力示于图 2-5。

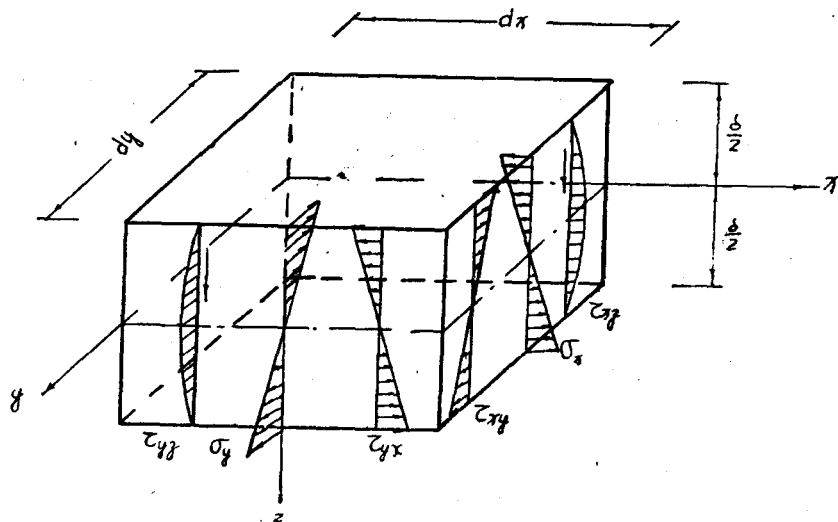


图 2-4

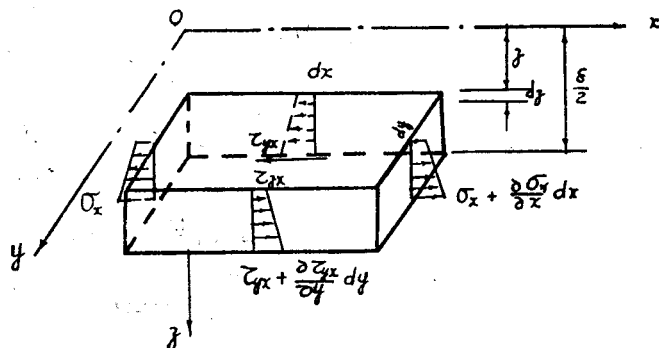


图 2-5

由平衡条件 $\Sigma F_x = 0$, 得

$$-\tau_{xz} dx dy + \int_z^{\frac{\delta}{2}} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \int_z^{\frac{\delta}{2}} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz = 0 \quad (a)$$

注意到图 2-4 中 σ_x 、 τ_{yx} 的分布规律, 它们可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= z f_1(x, y) \\ \tau_{yx} &= z f_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

其中, $f_1(x, y)$ 、 $f_2(x, y)$ 是坐标 (x, y) 的某一函数。将式 (b) 代入 (a) 式, 积分结果得

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right) \quad (c)$$

同理, 只要在研究对象上画出 oy 方向的应力, 写出 oy 方向的平衡条件, 并把 σ_y 、 τ_{xy} 写成:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= z f_3(x, y) \\ \tau_{xy} &= z f_4(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

可得结果

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial f_3(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f_4(x, y)}{\partial x} \right) \quad (e)$$

根据剪应力互等定理, 有

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial f_3(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f_4(x, y)}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

式 (f) 说明: 剪应力 τ_{xz} 、 τ_{yz} 沿板块厚度呈抛物线分布 (图 2-4)。

微分板块截面上的内力素由相应的应力组成。 σ_x 、 σ_y 组成弯矩 M_x 、 M_y , τ_{xy} 、 τ_{yx} 组成扭矩 M_{xy} 、 M_{yx} , τ_{xz} 、 τ_{yz} 组成剪力 Q_x 、 Q_y 。它们的正负号规定为: 正号内力素对应于在正的 z 坐标处有正号应力。可见, 图 2-6 a 中的内力素均为正值, 它们的矢量表示示于图 2-6 b。因

有 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ $M_{xy} = M_{yx}$ (2-1)

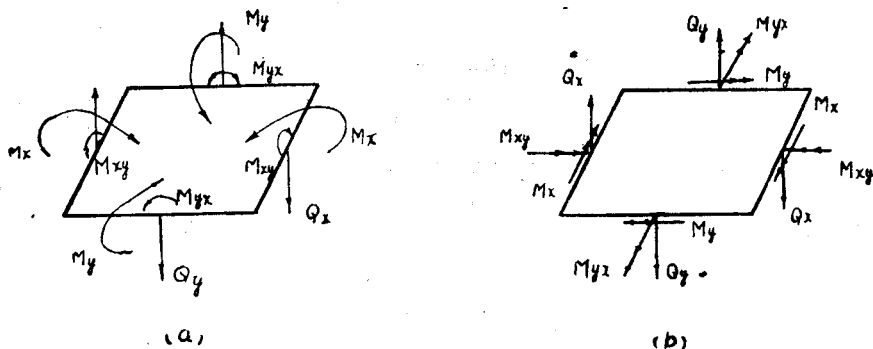


图 2-6

今后，凡内力素均指单位宽度上的值，因此，弯矩与扭矩的单位是 kg，剪力的单位是 kg/m。

图 2-6 b 示出的内力素及它们与应力的关系，乃由上述三条基本假设推出，与板的弯曲变形相对应。这些内力素被称为弯曲力。

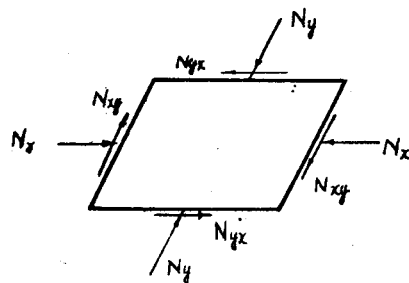


图 2-7

薄板中有时还存在着另一类内力素（图 2-7），称为薄膜力。它们与板的中面变形相对应，沿板厚均匀分布，这类内力在稳定问题中尤其重要。薄膜力的正负号规定为：法向力 N_x 、 N_y 以受压为正；剪力 N_{xy} 、 N_{yx} 在外法线为正的面上时，指向坐标轴正向者为正，反之为负。

三、基本公式

(1) 弯曲应变与挠度关系

板弯曲变形后，中面以外的任意一点可有三个位移分量： u 、 v 、 w 。

其中 u ——在坐标轴 ox 方向的位移；

v ——在坐标轴 oy 方向的位移；

w ——在坐标轴 oz 方向的位移。

由弹性力学知，应变与位移之间的关系如下式 (a)：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

假设 (1) 已经指出，垂直于中面的直线变形后长度不变，即

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (b)$$

(b) 式表明, 板内任意一点的挠度 w 与该点的 z 坐标无关, 只是坐标 x 、 y 的函数, 即

$$w = w(x, y) \quad (c)$$

由此可知, 板内平行于中面的任何薄层的挠曲情况都与中面的挠曲相同。

根据变形前垂直于中面的直线变形后仍然与中面相垂直的假设, 并注意到公式 (c), 板横截面内任意小的矩形单元 $abcd$, 变形前的直角变形后还是直角 (图 2—8)。

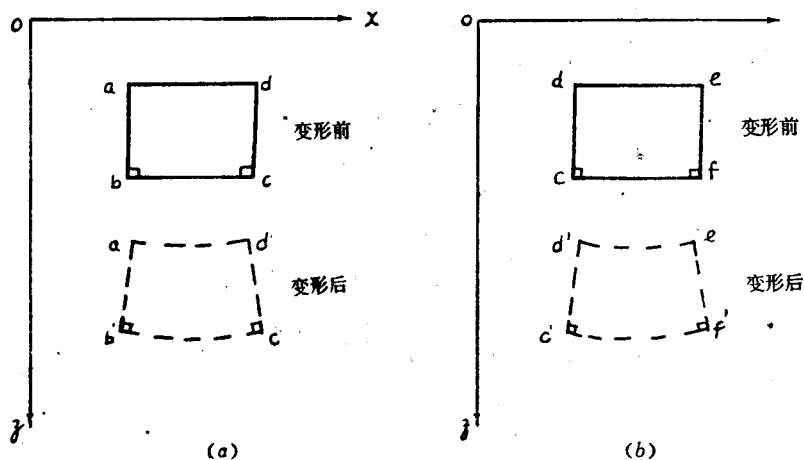


图 2—8

由此得出

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

$$u = - \int \frac{\partial w}{\partial x} dz$$

$$v = - \int \frac{\partial w}{\partial y} dz$$

将公式 (c) 代入后

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0$$

u_0 、 v_0 分别是中面在 x 、 y 方向的位移, 根据假设 (2), 这些位移为零。所以

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (e)$$

将式 (e) 代入 (a) 式中的 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 各式, 得弯曲应变与挠度之间的关系

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

(2) 弯曲应力与挠度关系

正交异性材料的虎克定律是:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_x}{1 - \mu_x \mu_y} (\varepsilon_x + \mu_y \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1 - \mu_x \mu_y} (\varepsilon_y + \mu_x \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G_{xy} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

其中 E_x 、 E_y —— x 、 y 方向的弹性模量;

μ_x 、 μ_y —— x 、 y 方向的泊松系数;

G_{xy} ——剪切模量。

弹性常数 E_x 、 E_y 、 μ_x 、 μ_y 并不是各自独立的。由互换功定理, 它们必须满足恒等式:

$$E_x \mu_y = E_y \mu_x \quad (2-4)$$

将式 (2-2) 代入式 (2-3), 得应力与挠度之间的关系

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E_x z}{1 - \mu_x \mu_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E_y z}{1 - \mu_x \mu_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -2G_{xy} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

对于各向同性材料, 有

$$E_x = E_y = E, \quad \mu_x = \mu_y = \mu, \quad G_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (2-6)$$

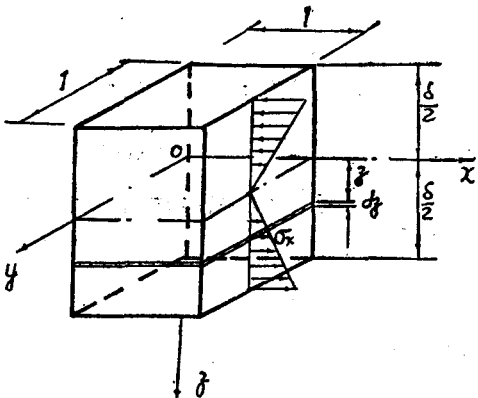
则

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{-Ez}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{-Ez}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

(3) 弯矩、扭矩与挠度关系

由图 2-9

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \cdot 1 \cdot dz \cdot z \\ M_y &= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_y \cdot 1 \cdot dz \cdot z \\ M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{xy} \cdot 1 \cdot dz \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$



将式 (2-5) 代入式 (2-8), 积分后得
正交异性板的弯矩、扭矩计算公式:

图 2-9

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = -2H \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

其中 D_x ——板在 x 方向的抗弯刚度;

D_y ——板在 y 方向的抗弯刚度;

H ——板的抗扭刚度。

并且

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{E_x \delta^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)} \\ D_y &= \frac{E_y \delta^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)} \\ H &= \frac{G_{xy} \delta^3}{12} \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

对于各向同性板, 引入式 (2-6) 后, 式 (2-10)、(2-9) 分别化为:

$$\left. \begin{aligned} D_x &= D_y = D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \mu^2)} \\ H &= \frac{(1 - \mu)}{2} D \end{aligned} \right\} \quad (2-10')$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2-9')$$

(4) 剪力与挠度关系

分析体积为 $dx dy \delta$ 的微分板块, 作用在上面的内力素如图 2-10 所示。它的六个平衡方程中, 有三个是恒等式, 即

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma m_z = 0 \quad (2-11)$$

其余三个如下:

由 $\Sigma F_x = 0$

$$\begin{aligned} &-Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx \\ &+ \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0 \end{aligned}$$

由 $\Sigma m_z = 0$

$$M_{xy} dy - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + M_y dx$$

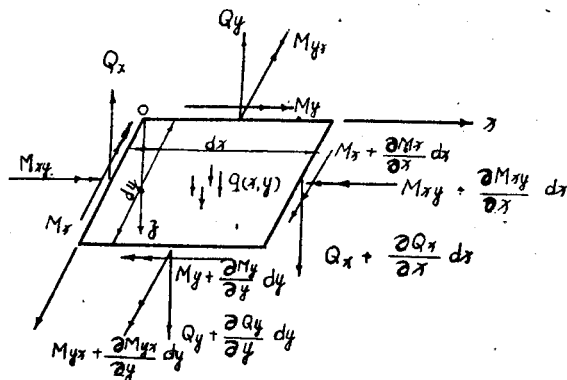


图 2-10