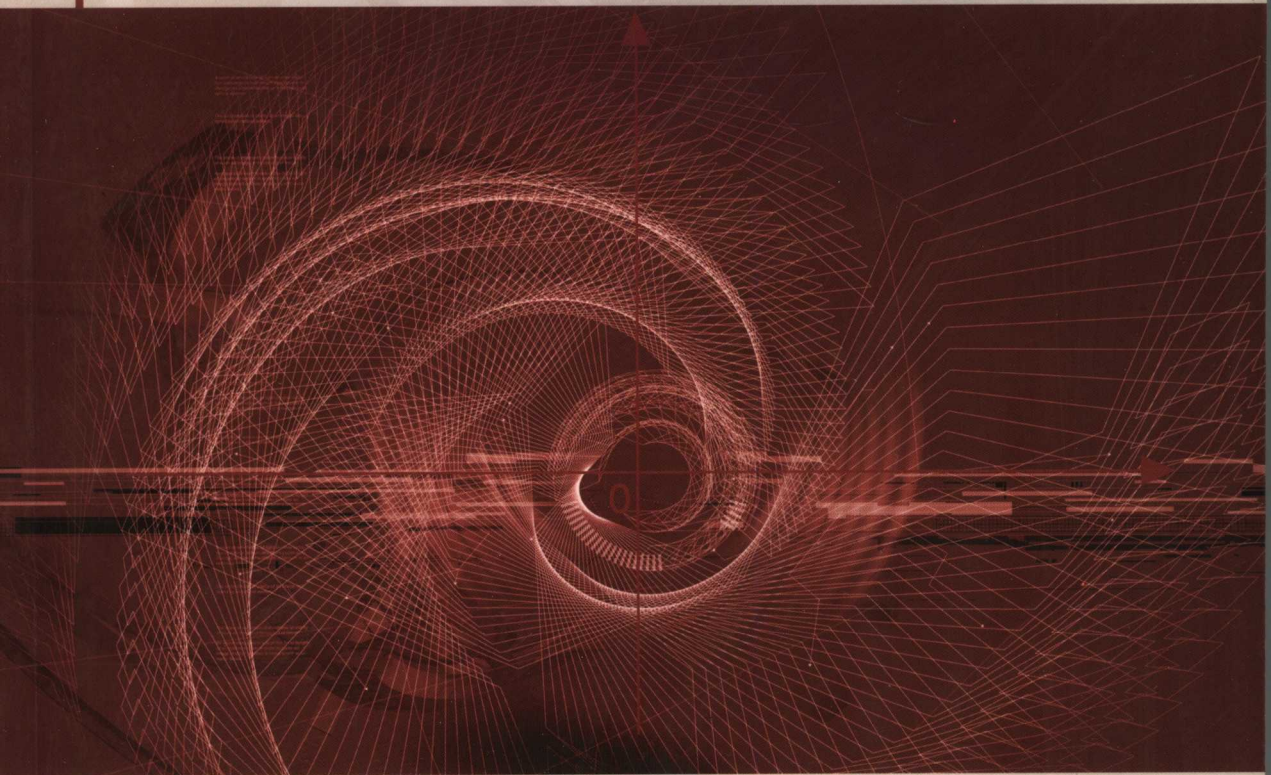


21世纪高职高专基础课教材系列

高等数学

程红萍 钟忠奎 主 编



同济大学出版社

21 世纪高职高专基础课教材系列

高等数学

程红萍 钟忠璠 主 编

同济大学出版社

内容提要

本书根据教育部制订的“高职高专数学教学基本要求”,由从事多年高职高专高等数学教学工作的一线教师执笔编写.全书系统讲解高职高专高等数学的基础知识和基本方法,内容包括函数与极限,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,向量代数与空间解析几何简介,多元函数微分学,二重积分与曲线积分,无穷级数等.本书共分10章,每章又分若干节,每节都有配套练习题,每章后有自测题,书末附有参考答案.

本书理论系统,举例丰富,讲解透彻,难度适宜,适合作为高职高专各专业的高等数学课程的教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/程红萍,钟忠銓主编. —上海:同济大学出版社,2006.8

(21世纪高职高专基础课教材系列)

ISBN 7-5608-3291-1

I. 高… II. ①程… ②钟… III. 高等数学—高等学校:技术学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 057189 号

21 世纪高职高专基础课教材系列

高等数学

程红萍 钟忠銓 主编

责任编辑 曹建 责任校对 谢惠云 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社

(上海市四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经销 全国各地新华书店

印刷 同济大学印刷厂印刷

开本 787mm×960mm 1/16

印张 24.25

字数 485 千

印数 1—4100

版次 2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

书号 ISBN 7-5608-3291-1/O·287

定价 35.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

21 世纪高职高专基础课教材系列

数学教材编委会

主 任	钟忠奎		
副主任	谢廷正	徐和平	
编 委	胡文娟	程红萍	苏淑真
	董明辉	王 艳	程红梅

前 言

本教材是根据教育部制订的“高职高专数学教学的基本要求”,在总结国内几所学校多年来高职高专有关专业的高等数学课程教学经验的基础上,经过编者认真讨论编写而成.全书共分10章,主要内容包括函数与极限,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,向量代数与空间解析几何简介,多元函数微分学,二重积分与曲线积分,无穷级数等.

本书在编写过程中,充分考虑了高职高专教育改革发展的新形势和高职高专培养应用型人才的实际需要,在内容上力求突出其基础性、应用性与工具性,充分体现了它是高职各专业的基础课而不是专业课以及“服务专业,兼顾数学体系”的原则.因而对难度大的基础理论,只给出定理,不追求严格证明,适度注意数学自身的系统性与逻辑性,重点突出基础概念、基本计算和基本知识,致力于培养学生的逻辑思维能力和分析、解决实际问题的能力;对每个概念都给出了产生它的实际背景,每节后面都有配套的习题,每章后都有自测题,书末附有习题和自测题的参考答案.本教材可供高职高专有关专业使用.对于书中带有“*”号的章节,各学校可根据专业教学需要选用.

本书由钟忠銓教授、苏淑真副教授、程红萍老师编写.由于我们的水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正.

编 者

2006年8月

目 录

前 言

第一章 函数与极限 (1)

第一节 预备知识 (1)

一、实数及其几何表示 (1)

二、实数的绝对值 (2)

三、区间与邻域 (4)

第二节 函数的概念与性质 (6)

一、常量与变量 (6)

二、函数的概念 (6)

三、函数的几种特性 (10)

四、反函数与复合函数 (14)

第三节 初等函数 (19)

一、基本初等函数 (19)

二、初等函数 (23)

第四节 非初等函数和建立函数

关系举例 (23)

一、分段函数 (23)

二、建立函数关系举例 (25)

* 三、几种常见的经济函数 (27)

第五节 数列的极限 (31)

一、数列的概念 (31)

二、数列的极限 (32)

第六节 函数的极限 (36)

一、函数极限的定义 (36)

二、函数极限的性质 (42)

第七节 无穷小量与无穷大量

..... (43)

一、无穷小量与无穷大量 (43)

二、无穷小量的性质 (44)

三、无穷小量的比较 (45)

第八节 极限的四则运算法则 (46)

第九节 两个重要极限 (52)

第十节 函数的连续性 (57)

一、函数的增量 (58)

二、函数的连续性 (58)

三、函数的间断点 (61)

四、连续函数的运算 (62)

五、闭区间上连续函数的性质 (63)

第二章 导数与微分 (69)

第一节 导数的概念 (69)

一、问题的提出 (69)

二、导数的定义 (70)

三、导数的几何意义 (74)

四、函数可导与连续的关系 (75)

第二节 导数基本运算法则 (78)

一、导数的四则运算法则 (78)

二、反函数的求导法则 (80)

三、复合函数的求导法则 (82)

四、初等函数的导数 (85)

第三节 高阶导数 (88)

第四节 隐函数的导数 对数求导法 (90)

一、隐函数的导数 (90)

二、对数求导法 (91)

第五节 微分及其应用 (93)

一、微分的定义 (93)

二、微分的几何意义 (96)

三、微分法则	(96)	第一节 定积分的概念	(158)
四、微分在近似计算中的应用	(98)	一、曲边梯形的面积	(158)
第三章 导数的应用	(104)	二、变速直线运动的路程	(159)
第一节 中值定理	(104)	三、定积分的定义	(159)
第二节 洛必达法则	(110)	四、定积分的几何意义	(161)
一、洛必达法则	(110)	第二节 定积分的基本性质	(162)
二、其他未定式极限的计算	(114)	第三节 微积分基本定理	(165)
第三节 函数的单调区间与极值	(116)	一、变速直线运动中位置函数与速度函 数之间的联系	(165)
一、函数的单调区间	(116)	二、积分上限的函数及其导数	(166)
二、函数的极值	(118)	三、牛顿-莱布尼兹公式	(169)
第四节 函数的最值	(122)	第四节 定积分的换元积分法与分 部积分法	(172)
第五节 函数曲线的凹凸性与拐点 函数图形的描绘	(124)	一、换元积分法	(172)
一、函数曲线的凹凸性与拐点	(124)	二、分部积分法	(174)
二、函数图形的描绘	(126)	第五节 定积分的应用	(175)
第六节 几何与经济方面函数的 优化	(128)	一、平面图形的面积	(175)
第四章 不定积分	(134)	* 二、克服重力所作的功	(179)
第一节 不定积分的概念与性质	(134)	三、体积	(180)
一、原函数与不定积分	(134)	* 第六节 广义积分	(183)
二、基本积分表	(136)	一、积分区间为无限区间的广义积分	(183)
三、不定积分的性质	(138)	二、无界函数的广义积分	(185)
四、不定积分的几何意义	(139)	第六章 常微分方程	(190)
第二节 换元积分法	(141)	第一节 微分方程的基本概念	(190)
一、第一类换元积分法(凑微分法)	(141)	一、两个引例	(190)
二、第二类换元法	(145)	二、微分方程的基本概念	(191)
第三节 分部积分法	(150)	第二节 一阶微分方程	(193)
第四节 简单有理函数的积分举例	(153)	一、可分离变量的一阶微分方程	(193)
第五章 定积分及其应用	(158)	二、一阶线性微分方程	(195)

第三节 可降阶的高阶微分方程	一、空间直线的对称式方程	231
..... (198)	二、空间直线的参数方程	232
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 类型的方程	三、空间直线的一般方程	233
..... (199)	四、空间直线与直线的位置关系	234
二、 $y'' = f(x, y')$ 类型的二阶微分方程	 (234)	
..... (199)	五、空间直线与平面的位置关系	235
三、 $y'' = f(y, y')$ 类型的二阶微分方程	 (235)	
..... (201)		
第四节 二阶常系数线性微分方程	第五节 二次曲面与空间曲线	236
的解法	 (236)	
..... (203)	一、曲线方程的概念	236
一、二阶常系数线性微分方程通解的结	二、二次曲面	237
构	 (237)	
..... (203)	* 三、空间曲线	241
二、二阶常系数齐次线性微分方程的解		
法	第八章 多元函数微分学	244
..... (205)	第一节 多元函数的基本概念	244
三、二阶常系数非齐次线性微分方程的	 (244)	
解法	一、区域	244
..... (207)	二、多元函数的概念	245
	三、二元函数的极限	247
第七章 向量代数与空间解析几何	四、二元函数的连续性	248
简介	 (248)	
..... (213)	第二节 偏导数	250
第一节 空间直角坐标系	 (250)	
..... (213)	一、偏导数的概念	251
一、空间直角坐标系	二、高阶偏导数	254
..... (213)	 (254)	
二、空间两点间的距离公式	第三节 全微分及其应用	256
..... (214)	 (256)	
第二节 向量代数	一、全微分的概念	256
..... (215)	二、全微分在近似计算中的应用	259
一、向量的基本概念	 (259)	
..... (215)	第四节 多元复合函数与隐函数的	
二、向量的加、减与数乘运算	求导法则	260
..... (215)	 (260)	
三、向量的坐标表示法	一、多元复合函数的求导法则	260
..... (216)	 (260)	
四、两向量的数量积	二、隐函数的求导法则	265
..... (220)	 (265)	
五、两向量的向量积	* 第五节 方向导数与梯度	267
..... (222)	 (267)	
第三节 平面及其方程	一、方向导数	267
..... (225)	二、梯度	269
一、平面的点法式方程	 (269)	
..... (225)	* 第六节 偏导数的应用	272
二、平面的一般方程	 (272)	
..... (226)		
三、平面的截距式方程		
..... (228)		
四、两平面的相互位置关系		
..... (228)		
五、点到平面的距离公式		
..... (230)		
* 第四节 空间直线方程		
..... (231)		

一、偏导数在几何上的应用 … (272)	二、平面上曲线积分与路径无关的条件 …………… (318)
二、多元函数的极值 …… (276)	
第九章 二重积分与曲线积分 …………… (282)	第十章 无穷级数 …… (323)
第一节 二重积分的概念与性质 …………… (282)	第一节 常数项级数的概念和性质 …………… (323)
一、二重积分的概念 …… (282)	一、常数项级数的概念 …… (323)
二、二重积分的性质 …… (284)	二、级数收敛的必要条件 …… (325)
第二节 二重积分的计算 … (286)	三、级数的基本性质 …… (326)
一、直角坐标系下二重积分的计算 …………… (286)	第二节 正项级数的审敛法 …………… (327)
二、极坐标系下二重积分的计算 …………… (293)	一、基本定理 …… (327)
第三节 二重积分的应用举例 …………… (298)	二、比较审敛法 …… (327)
一、立体体积 …… (299)	三、比值审敛法 …… (329)
二、平面薄片的质量 …… (300)	四、根值审敛法 …… (330)
第四节 对弧长的曲线积分 …………… (301)	第三节 任意项级数的审敛法 …………… (331)
一、对弧长的曲线积分的概念和性质 …………… (301)	一、交错级数的审敛法 …… (331)
二、对弧长的曲线积分的计算方法 …………… (303)	二、级数的绝对收敛与条件收敛 …………… (332)
第五节 对坐标的曲线积分 …………… (306)	第四节 函数项级数与幂级数 …………… (334)
一、对坐标的曲线积分的概念与性质 …………… (306)	一、函数项级数 …… (334)
二、对坐标的曲线积分的计算方法 …………… (309)	二、幂级数及其收敛性 …… (335)
* 三、两类曲线积分之间的关系 …………… (313)	三、幂级数的运算及性质 …… (338)
第六节 格林公式 …… (315)	四、函数展开成幂级数 …… (340)
一、格林公式 …… (315)	* 第五节 傅里叶级数 …… (346)
	一、三角级数、三角函数系的正交性 …………… (346)
	二、以 2π 为周期的函数展开成傅里叶 级数 …… (347)
	三、以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里叶 级数 …… (352)
	参考答案 …… (356)

第一章 函数与极限

函数是对事物及变量之间相互制约、相互依赖关系进行的数量描述. 函数的概念即是对事物数量特征的抽象和概括. 函数是高等数学的主要研究对象, 也是高等数学的基本概念. 极限是研究变量的一种基本方法, 也是高等数学的重要理论工具.

本章将介绍函数、极限和函数的连续性等概念, 介绍它们的一些性质以及极限的运算法则等.

第一节 预备知识

一、实数及其几何表示

微积分主要是在实数范围内讨论问题, 所以应该熟悉和了解实数的有关概念.

1. 实数

有理数和无理数统称为实数.

形如 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数且 $q \neq 0$) 的数称为有理数. 由于 $\frac{p}{q}$ 可以是整数或分数, 所以也可以说整数与分数统称为有理数. 有理数一定是有限小数或无限循环小数.

无限不循环小数称为无理数. 例如 $\pi \approx 3.1415926$, $\sqrt{2} \approx 1.4142136$ 等. 无理数不能表示为 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数且 $q \neq 0$).

2. 数轴

规定了原点、正方向及单位长度的直线称为数轴(图 1-1).

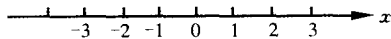


图 1-1

图 1-1 中的数轴也称为 Ox 轴.

3. 实数与数轴

有了数轴之后, 任何一个实数几何上均可用数轴上的一个点来表示. 反之,

数轴上任何一个点都表示一个实数. 即数轴上的点和实数之间是一一对应的关系.

应当指出的是, 实数是稠密的, 它充满整个数轴.

以后为方便起见, 将实数和它在数轴上对应的点不加区分. 例如, 实数 a 也称为点 a .

二、实数的绝对值

1. 实数的绝对值

实数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示. 规定正数和零的绝对值是它本身, 负数的绝对值是它的相反数, 即

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

例如: $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$.

显然, 实数的绝对值是一个非负数. 几何上, $|a|$ 表示数轴上点 a 与原点的距离(图 1-2).

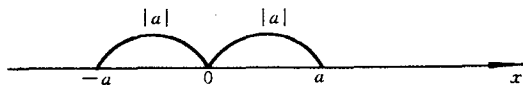


图 1-2

2. 实数绝对值的性质

设 a, b 为任意两个实数, 则绝对值有以下性质:

(1) $|a| \geq 0$; 仅当 $a = 0$ 时, 有 $|a| = 0$.

(2) $|a| = \sqrt{a^2}$.

(3) $|-a| = |a|$.

(4) $-|a| \leq a \leq |a|$.

以上几条性质由绝对值的定义不难理解. 上述性质(2)说明 $\sqrt{a^2}$ 是一个非负数, 即为算术平方根. 如 $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.

除上述性质外, 实数绝对值还有以下运算性质:

$$|a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|;$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

这些运算性质可以根据绝对值的性质加以证明,也可以根据绝对值的定义加以理解.

例 1 化去下列各式中的绝对值符号.

(1) $|x-1|$; (2) $2-|x-2|$.

解 根据绝对值的定义,可以去掉各式中绝对值的符号.

$$(1) |x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0, \\ -(x-1), & x-1 < 0. \end{cases}$$

即 $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1. \end{cases}$

$$(2) 2-|x-2| = \begin{cases} 2-(x-2), & x-2 \geq 0, \\ 2-[-(x-2)], & x-2 < 0. \end{cases}$$

即 $2-|x-2| = \begin{cases} 4-x, & x \geq 2, \\ x, & x < 2. \end{cases}$

3. 绝对值不等式

带有绝对值符号的不等式称为绝对值不等式. 求解绝对值不等式时,除用到绝对值的定义外,还常用到两个绝对值不等式的等价不等式,它们分别是:

$$k > 0 \text{ 时, } |a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k.$$

$$k > 0 \text{ 时, } |a| > k \Leftrightarrow a < -k \text{ 或 } a > k.$$

这两个绝对值不等式的等价不等式由绝对值的定义不难得到,其中“ $\Leftrightarrow$ ”表示“等价于”. 这里所谓等价即相同的意思.

例如, $|a| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$; $|a| > 3 \Leftrightarrow a < -3 \text{ 或 } a > 3$.

例 2 去掉 $|x^2-4|$ 中的绝对值符号.

解 $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & x^2-4 \geq 0, \\ -(x^2-4), & x^2-4 < 0. \end{cases}$

即 $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & |x| \geq 2, \\ 4-x^2, & |x| < 2. \end{cases}$

即 $|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2, \\ 4-x^2, & -2 < x < 2. \end{cases}$

例 3 解下列绝对值不等式.

(1) $|2x-1| \leq 3$; (2) $|3x-2| > 4$; (3) $1 < |x-3| < 5$.

解 (1) $|2x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x-1 \leq 3$, 得 $-1 \leq x \leq 2$.

所以,不等式的解为 $-1 \leq x \leq 2$.

(2) $|3x-2| > 4 \Leftrightarrow 3x-2 < -4 \text{ 或 } 3x-2 > 4$,

得 $x < -\frac{2}{3}$ 或 $x > 2$.

所以, 不等式的解为 $x < -\frac{2}{3}$ 或 $x > 2$.

$$(3) 1 < |x-3| < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| > 1 \\ |x-3| < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < -1 \text{ 或 } x-3 > 1, \\ -5 < x-3 < 5. \end{cases}$$

这是一个不等式组, 解得 $-2 < x < 2$ 或 $4 < x < 8$. 所以不等式的解为 $-2 < x < 2$ 或 $4 < x < 8$.

三、区间与邻域

具有某种属性的元素 x 的全体称为一个集合, 记为 A , x 称为集合的元素, 记 $A = \{x | x \text{ 所具有的特征}\}$.

例如, 由不等式 $1 \leq x \leq 5$ 表示的实数集合记为 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$.

集合也可以用其他大写的英文字母表示. 如果 x 是集合 A 中的元素, 记为 $x \in A$. 否则, 记为 $x \notin A$ 或 $x \bar{\in} A$.

由全体实数构成的集合记为 $\mathbf{R}$, 由自然数构成的集合记为 $\mathbf{N}$, 整数集合记为 $\mathbf{Z}$, 有理数集合记为 $\mathbf{Q}$, 无理数集合记为 $\mathbf{W}$. 显然 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ 及 $\mathbf{W}$ 都包含于 $\mathbf{R}$ 内, 故它们分别为 $\mathbf{R}$ 的子集.

1. 区 间

设 a, b 均为实数, 且 $a < b$, 则称 $\{x | a < x < b\}$ 表示的实数 x 的集合为开区间, 记为 (a, b) . 即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

类似地, 称 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ 为闭区间; $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 以及 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ 为半开半闭区间.

以上区间分别如图 1-3(a) ~ (d) 所示.

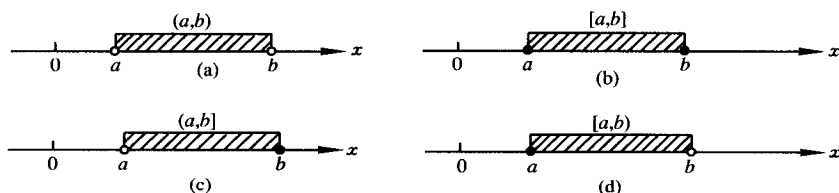


图 1-3

以上区间为有限区间, a 与 b 分别称为区间的端点, 右端点与左端点的差 $b - a$ 称为区间的长度. 在讨论问题时, 为方便起见也常用 I 表示上述各区间.

引入无穷大的记号 ∞ , 则以下各区间为无限区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\} = \{x \mid x > a\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\} = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\} = \{x \mid x < b\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\} = \{x \mid x \leq b\},$$

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$, 即表示全体实数的集合.

应当注意的是, ∞ 是一个记号, 并不表示一个很大的数.

有了区间的概念之后, 不等式或不等式组的解常用区间来表示.

2. 邻域

设 $\delta > 0$, x_0 是一个实数, 称集合

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$. 即 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$.

其中, x_0 为邻域的中心, δ 为邻域的半径.

在数轴上, 点 x_0 的 δ 邻域表示以点 x_0 为中心, 长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 如图 1-4(a) 所示.

如果 x 在 x_0 的 δ 邻域内变化但不能取 x_0 , 即 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$, 则称此邻域为点 x_0 的去心邻域, 记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 即 $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$, 如图 1-4(b) 所示. 相应地, 称 $U(x_0, \delta)$ 为点 x_0 的有心邻域.

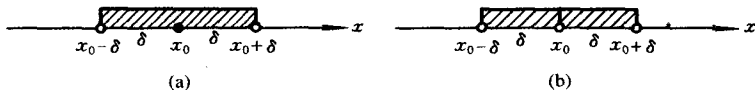


图 1-4

例如, 3 的 0.01 邻域, 就是满足不等式 $|x - 3| < 0.01$ 的实数 x 的集合, 即 $2.99 < x < 3.01$. 也就是开区间 $(2.99, 3.01)$.

又如, 满足不等式 $0 < |x + 2| < 0.01$ 的实数 x 的集合, 就表示点 -2 的去心邻域, 半径也是 0.01. 该邻域即开区间 $(-2.01, -2) \cup (-2, -1.99)$.

其中符号 $\cup$ 是集合运算的一种符号, 表示两个集合的并集, 即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

习题 1-1

1. 化去下列各式绝对值的符号.

(1) $|x - 3|$;

(2) $|3x - 7|$;

$$(3) 1 - |x - 3|;$$

$$(4) |16 - x^2|.$$

2. 用区间表示满足下列不等式的变量 x 的变化范围.

$$(1) 1 \leq x < 3;$$

$$(2) x^2 < 9;$$

$$(3) |x - 1| > 1;$$

$$(4) (x - 1)(x + 2) < 0;$$

$$(5) |2x + 3| \leq 1;$$

$$(6) 0 < |x - a| < \delta \ (\delta > 0).$$

3. 用不等式表示下列各区间.

$$(1) [-1, 0]; \quad (2) (-3, 3]; \quad (3) [2, +\infty); \quad (4) \text{点 } -2 \text{ 的 } 0.001 \text{ 邻域}.$$

第二节 函数的概念与性质

一、常量与变量

任何事物都具有某些能够表现其多少、大小、长短、高低、轻重、快慢等可以进行比较和测定的属性. 比如长度、体积、温度、速度、距离、产量、成本、价格等. 这些都称为量, 量的具体表现是数. 人们在对事物和现象的数量特征进行研究和定量分析时看到, 有些量在考察和研究的过程中保持不变, 只取某个固定的数值, 这种量称为常量; 有些量在研究过程中不断变化, 可以取不同的数值, 这种量称为变量.

例如, 考察从甲地飞往乙地的客机. 旅客人数、行李重量、票价与航空公司的收入等都是常量, 而消耗的汽油、飞行中客机与甲、乙两地的距离等则是变量.

一个量是常量还是变量, 要根据具体情况而定. 例如, 三角形的内角和、圆周率 π 总是常量, 而我国总人口数、一天中的温度则总是变量. 银行储蓄存款的利率, 总的来说是有调整变化的, 是个变量, 但在每一个稳定时期则是固定不变的常量.

常量通常用字母 $a, b, c, \dots$ 表示. 变量通常用字母 $x, y, z, \dots$ 表示.

我们在微积分中讨论的量, 只在实数范围内取值. 由于实数与数轴上的点有一一对应的关系, 因此, 常用数轴上的定点表示常量, 而用数轴上的动点表示变量. 变量的取值和变化总有一定的范围, 常用区间来表示这个范围.

初等数学研究的主要对象是常量, 而高等数学研究的主要对象则是变量.

二、函数的概念

1. 函数关系

在研究任何事物或现象的同一过程中, 出现的变量都不止一个. 这些变量之间有些具有确定的相互依赖的某种数量关系, 而有些则没有确定的依赖关系, 考察下面几个例子.

例 1 用混凝土修建一个长方体水池, 显然容积 V 与水池的长 x 、宽 y 、高 z

之间有确定的依赖关系 $V = xyz$, 其中 $x > 0, y > 0, z > 0$. 对任一组 x, y, z 的值, 都能确定对应的水池容积 V 的值.

例 2 一个人进行投掷硬币实验, 掷币次数 n 与国徽面出现的次数 m 两个量之间不能说没有关系. 实验表明, n 越大 m 也越大, 但 n 与 m 之间没有确定的依赖关系. 比如, $n = 100$ 时, 人们无法确定 m 到底等于多少.

如果在某一过程中, 变量之间存在着某种确定的依赖关系, 即一些变量的变化和取值决定着另一变量的变化和取值, 就说存在这种依赖关系的变量之间有某种函数关系. 如例 1 中的 V, x, y, z 之间有函数关系 $V = xyz$, 而例 2 中的 n 和 m 之间则没有函数关系.

2. 函数的定义

对于两个有函数关系的变量进行进一步讨论, 不难发现, 一定存在着某种对应规则, 根据这一规则, 当其中一个变量在允许的范围内任意取定一个值时, 另外一个变量总有确定的值与之对应. 这正是两个变量间的函数关系的实质.

定义 1 设 x, y 为两个变量, 如果当 x 在其允许的取值范围 D (D 为实数集合) 内任意取定一个实数值时, 按照一定的规则 f , y 总有唯一确定的实数值与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的函数. 记作 $y = f(x), x \in D$. 其中, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域.

由于只有一个自变量, 也称 $y = f(x)$ 为一元函数.

如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义, 则将 f 施行于 x_0 所确定的因变量 y 的值为 y_0 , 称 y_0 是自变量 x_0 所对应的函数值, 记作

$$y_0 = f(x_0) \text{ 或 } y|_{x=x_0} = y_0.$$

当 x 在定义域 D 内遍取所有数值时, 对应的函数值构成的集合称为函数的值域, 记为 R_f .

函数 $y = f(x)$ 中, 表示对应规律的记号 f , 也可以改用其他字母, 例如 φ, ψ 等. 这时函数就记作 $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ 等.

$f(x)$ 既可以表示抽象、未知的函数, 也可以表示具体、已知的函数. 但是, 如果同时考察几个不同的函数, 就要用不同的函数符号. 如 $y = \varphi(x), y = g(x)$ 等. 有时也用 $y = y(x), u = u(x)$ 等表示某个函数. 这时等号右端的 y, u 不是因变量, 而只表示函数的对应规则.

例 3 设 $f(x) = 2^x, g(x) = x^2 + 1$, 求 $f(-1), f(2), g(-1), g(2)$ 和 $f(1-x), f[g(x)]$ 及 $g(1-x), g[f(x)]$.

解 $f(-1) = \frac{1}{2}, f(2) = 4, f(1-x) = 2^{1-x}, f[g(x)] = 2^{x^2+1}, g(-1) = 2, g(2) = 5, g(1-x) = (1-x)^2 + 1, g[f(x)] = 4^x + 1.$

例 4 设 $f(x+1) = x^2 - 1$, 求 $f(x), f(1), f(0), f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 令 $x+1 = t$, 则 $x = t-1$, 代入原函数中, 得

$$f(t) = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t.$$

于是得

$$f(x) = x^2 - 2x, \quad f(1) = -1, \quad f(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}.$$

由函数的定义可以看出, 对应规则 f 和定义域 D 是函数的两个要素. 对应规则和定义域完全相同的函数实质上是同一个函数. 例如, 函数 $y = x^2 - 2x + 1$ 与 $y = (x-1)^2$ 是同一个函数; $y = \sqrt{x-1}$ 与 $s = \sqrt{t-1}$ 是同一个函数, 因为它们的对应规则及定义域完全相同. 而函数 $y = x+1$ 与 $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 不是同一个函数, 因为它们的定义域不同.

例 5 讨论 $y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ 是否为同一函数.

解 由于 $\sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$, 所以, 当 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时, 有

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x.$$

当 $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时, 有

$$\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\cos x.$$

因此, 虽然两个函数的定义域相同, 均为 $(-\infty, +\infty)$, 但由于它们的对应规则不同, 故不是同一个函数.

3. 函数的表示方法与图形

函数的表示方法一般有三种: 公式法, 表格法和图示法.

(1) 公式法(解析法). 就是用数学式子来表示因变量与自变量之间的对应关系. 例如 $y = 2x^2 + \cos x, S = \pi r^2$ 等. 这种方法显示了由自变量确定因变量的规则, 简明准确, 便于理论研究, 是应用最多的一种方法, 但缺乏直观性.

(2) 表格法(列表法). 就是将自变量及其对应的函数值列成表格来表示变量之间的函数关系. 例如, 日常用到的平方表、常用对数表、三角函数表以及经济分析中的各种统计报表等, 都是用表格法表示的函数. 表格法的优点是可以迅速确定部分函数值, 但不便于理论研究.