新三导丛书
XIN SAN DAO CONG SHU

- 本章小结
- 释疑解难
- 典型例题分析
- 课后习题精解
- 模拟检测题
- 模拟检测题答案与提示

高等数学（下）

（同济·第五版）

导教·导学·导考

主编　孙法国

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书按照高等学校工科数学课程教学指导委员会颁布的教学大纲“高等数学教学基本要求”编写，参照同济大学数学教研室所编的《高等数学》(第五版)的章节顺序，共十二章，每章分为本章小结、释疑解难、典型例题分析、课后习题精解、模拟检测题、模拟检测题答案与提示六个部分．本书可与同济大学数学教研室所编的《高等数学》(第五版)配套使用，也可独立使用．

本书可作为“高等数学”课程的教学、学习、考试的辅导书，也可作为研究生入学考试的参考资料．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学导教·导学·导考/孙法国主编．—西安：西北工业大学出版社，2006.10
(新三导丛书)
ISBN 7-5612-2144-4

Ⅰ．高… Ⅱ．孙… Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 119832 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072
电 话：(029)88493844 88491757
网 址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开 本：787 mm×960 mm 1/16
印 张：44
字 数：1 208 千字
版 次：2006 年 10 月第 1 版 2006 年 10 月第 1 次印刷
印 数：1～6 000 册
定 价：全书定价：56.00 元(本册定价：28.00 元)

前　言

高等数学是理工科院校的一门重要基础课．为了帮助读者在数学概念、计算技能和数学思维等方面得到充分的训练，培养学生的空间想象能力、逻辑思维能力和科学表达能力，我们根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了此书，希望能为读者学习高等数学起到排忧解难的作用．

本书按照同济大学数学教研室所编的《高等数学》(第五版)的章节顺序，共十二章，每章分为六个部分：

(1)**本章小结**　对每章的内容做了小结，理顺了各知识点之间的关系，并指出了重点和难点.

(2)**释疑解难**　从释疑解难入手，分析概念，克服难点．

(3)**典型例题分析**　通过典型例题(所选例题大多为历年考研真题)介绍解题方法，注重分析和一题多解，使读者在巩固基本概念的基础上掌握高等数学解题方法和技巧．

(4)**课后习题精解**　对同济大学数学教研室所编的《高等数学》(第五版)的课后习题做了详细解答，以方便初学者参考．

(5)**模拟检测题**　精心设计基础知识模拟检测题和考研模拟训练题，力求通过练与考使读者掌握考点．

(6)**模拟检测题答案与提示**　对模拟题进行了简答．

本书分为上、下两册，第 1,9 章由韦奉岐编写，第 2,12 章由胡新利编写，第 3,11 章由孙法国编写，第 4 章由王彩霞编写，第 5 章由成涛编写，第 6,8 章由王拉省编写，第 7 章由杨阿莉编写，第 10 章由李萍编写．全书由孙法国统稿．

本书是理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导书，也可作为研究生入学考试的参考资料．

限于编者水平及撰稿时间仓促，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正，以便修改．

编　者

2006 年 7 月

目 录

第 8 章　多元函数微分法及其应用

一、本章小结

(一) 本章小结

1. 多元函数的极限

(1) 二元函数的概念:设 D 是平面点集,如果对每个点 $P(x,y) \in D$,变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应,则称 z 是变量 x,y(或点 P) 的二元数值函数,记为 $z = f(x,y)$ 或 $z = f(P)$,D 为该函数的定义域.

(2) 多元函数的概念:设 D 是 n 维空间的点集,如果对每个点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in D$,变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应,则称 z 是变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$(或点 P) 的 n 元数值函数,记为 $z = f(x_1,\cdots,x_n)$ 或 $z = f(P)$,D 为该函数的定义域.

(3) 二元函数的极限:设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点,若对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ 时,总有 $|f(x,y)-A| < \varepsilon$ 成立,则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 以 A 为极限,记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 或 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y) = A$. 二元函数的极限也称二重极限.

注　二元函数极限的存在,等价于点 $P(x,y)$ 在 $f(x,y)$ 的定义域中以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限都是 A. 由此可知,如果 $P(x,y)$ 沿某两种特殊方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 的极限不相同,则 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在.

(4) 二元函数极限的性质:若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$,$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = B$,则

① $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = A \pm B$

② $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kA$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = AB$

④ 若 $B \neq 0$ 时,$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{A}{B}$

2. 二元函数的连续性

(1) 二元函数连续的定义:设函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义,若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$,则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

(2) 初等函数的连续性:二元初等函数在其定义区域内是连续的.

(3) 闭区域上连续函数的性质:

① 有界性:若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上有界,即存在 $M>0$,使得对任意 $(x,y)\in D$,有 $|f(x,y)|\leqslant M$.

② 最值定理:若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上达到最大值和最小值,即存在 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$,使得 $f(x_1,y_1)=\max\limits_{(x,y)\in D}f(x,y),f(x_2,y_2)=\min\limits_{(x,y)\in D}f(x,y)$.

③ 介值定理:若函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D$,并且 $f(x_1,y_1)<\mu<f(x_2,y_2)$,则存在 $P_0(x_0,y_0)\in D$,使得 $f(x_0,y_0)=\mu$.

④ 一致连续性:若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续.

3. 偏导数

(1) 偏导数定义:设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一领域内有定义,如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数,记为 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$,$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_x'(x_0,y_0)$,如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数仍然是 x,y 的函数,称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导数,记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $f_x'(x,y)$. 类似地,可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导数,记为 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 或 $f_y'(x,y)$.

(2) 偏导数几何意义:二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 表示空间曲线

$$\Gamma:\begin{cases}z=f(x,y)\\y=y_0\end{cases}$$

在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率. 同理,$f_y'(x_0,y_0)$ 表示空间曲线在点 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线对 y 轴的斜率.

(3) 高阶偏导数:设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$$

那么在 D 内 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 都是 (x,y) 的函数. 如果这两个函数的偏导数也存在,则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同有下列二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}f_{xx}''(x,y)=f_{11}'',\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}f_{xy}''(x,y)=f_{12}''$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}f_{yy}''(x,y)=f_{22}'',\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}f_{yx}''(x,y)=f_{21}''$$

其中,右边两个偏导数称为混合偏导数.

(4) 二阶混合偏导数相等的充分条件:如果函数的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续,那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等,即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial x}$$

(5) 全微分:如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 且仅与 x,y 有关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 的全微分，记为 $\mathrm{d}z$，即 $\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$.

4. 方向导数与梯度

(1) **方向导数**：设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义，自点 $P(x_0,y_0)$ 引射线 l. 设 x 轴正向到射线 l 的转角为 α，y 轴正向到射线 l 的转角为 β，并设 $P'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为 l 上的另一点，且 $P'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in U(P_0,\delta)$. 考虑函数的增量 $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 与两点 P_0, P' 的距离 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 的比值，当 P' 沿着 l 趋于 P_0 时，若这个比值的极限存在，则称这极限为函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿方向 $\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数，记作 $\frac{\partial z}{\partial l}$，即

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta) - f(x_0,y_0)}{\rho}$$

(2) **梯度**：设函数 $z = f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x,y) \in D$，都可定出一个向量 $\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}$，此向量称为函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度，记作 $\mathbf{grad}f$，即

$$\mathbf{grad}f = \nabla f = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right\} = \frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

5. 二元函数可微、偏导数、方向导数、连续、极限之间的关系

(1) 可微 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 极限存在.

(2) 可微 $\Rightarrow$ 偏导数存在，且 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

(3) 可微 $\Rightarrow$ 方向导数存在，且 $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \mathbf{grad}f \cdot \boldsymbol{l}$（其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦）.

(4) 偏导数连续 $\Rightarrow$ 全微分存在.

6. 多元复合函数的求导法则

(1) 如果函数 $u = \varphi(t)$ 及 $v = \psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z = f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导函数，则复合函数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ 在点 t 可导，且其导函数可用下列公式计算：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{8.1}$$

式(8.1)称为全导数公式.

(2) 如果 $u = u(x,y)$ 及 $v = v(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，且函数 $z = f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z = f(u(x,y), v(x,y))$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在，可用下列公式计算：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{8.3}$$

(3) 全微分形式不变性：设函数 $z = f(u,v)$ 具有连续偏导数，则全微分

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v \tag{8.4}$$

如果 $u = u(x,y)$，$v = v(x,y)$，且 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 也具有连续偏导数，则复合函数 $z = f(u(x,y), v(x,y))$ 的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{8.5}$$

将式(8.2)和式(8.3)代入式(8.5)可整理得出式(8.4).由此可以看出,不管是自变量还是中间变量,它的全微分形式是不变的.这个性质称为全微分形式不变性.

7. 隐函数的求导法

(1) 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数,且

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F_y'(x_0,y_0)\neq 0$$

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$,它满足条件 $y_0=f(x_0)$,并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}$$

(2) 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续的一阶偏导数,且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$,$F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$,它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$,并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}$$

(3) 设 $F(x,y,u,v)$,$G(x,y,u,v)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数,又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,且偏导数所组成的函数行列式(或称 Jacobi 行列式)

$$D=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零,则方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$,它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$,$v_0=v(x_0,y_0)$,并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}$$

8. 多元函数微分学的应用

(1) 曲线的切线与法平面:

① 参数方程形式:设空间曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$,其中 $x(t)$,$y(t)$,$z(t)$ 都是 t 的可微函数,且 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$,则 Γ 在 M_0 处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$.切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

② 一般方程：设空间曲线方程为

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

若 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$，且 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\big|_{M_0}\neq 0$，并且满足隐含数存在定理的条件，则 Γ 在 M_0 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}=\{A,B,C\}=\left\{\begin{vmatrix}F_y' & F_z'\\G_y' & G_z'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z' & F_x'\\G_z' & G_x'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x' & F_y'\\G_x' & G_y'\end{vmatrix}\right\}\Bigg|_{M_0}$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

法平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

(2) 空间曲面的切平面与法线：

① 曲面方程的一般形式：设 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，则在 M_0 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{F_x',F_y',F_z'\}\big|_{M_0}$，切平面的方程为

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

② 曲面方程的显函数形式：设曲面 Σ 的方程为 $z=f(x,y)$，其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，则在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0),-1\}$$

切平面方程为　$$z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程为　$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

9. 多元函数的极值

(1) 二元函数极值的定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，对于该邻域内异于 $P_0(x_0,y_0)$ 的点 $P(x,y)$，总有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ 成立，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有极大(或极小)值，称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 的极大或极小值点.

(2) 二元函数极值的必要条件：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有极值，且在点 $P_0(x_0,y_0)$ 具有偏导数，则它在该点的偏导数必然为零，即

$$f_x'(x_0,y_0)=0,\quad f_y'(x_0,y_0)=0$$

(3) 二元函数极值的充分条件：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内连续，且有一阶及二阶连续的偏导数，又 $f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$. 令 $A=f_{xx}''(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}''(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}''(x_0,y_0)$，则

① 当 $AC-B^2>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极值. 当 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极小值；当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值.

② 当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 不是极值.

③ 当 $AC-B^2=0$ 时，是否为极值须进一步讨论.

(4) 二元函数在有界闭区域上的最值：二元函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内连续可微，且有有限个驻点，则

① 将 $z=f(x,y)$ 在 D 内所有驻点的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值进行比较，从而判断出 $z=f(x,y)$ 在 D 上的最值.

② 如果根据问题的性质能断定函数 $f(x,y)$ 的最值一定在 D 的内部取得，而 $f(x,y)$ 在 D 内有唯一驻点 (x_0,y_0)，则在该点处的函数值 $f(x,y)$ 必为 D 上的最值.

(5) 多元函数的条件极值：自变量受到某些条件限制函数的极值，称为条件极值.

① 化为无条件极值. 求 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，若可由 $\varphi(x,y)=0$ 解出 $y=\psi(x)$，代入 $z=f(x,y)$ 便化为无条件极值.

② 拉格朗日乘数法. 求 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，设 $f(x,y),\varphi(x,y)$ 都有连续的偏导数，且 φ_x',φ_y' 不同时为零，作辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，令 $F_x'=0,F_y'=0,F_\lambda'=0$，即

$$\begin{cases} f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

解此方程组可得出 $F(x,y,\lambda)$ 的驻点 (x_0,y_0,λ_0)，即 (x_0,y_0) 为该条件极值问题的可能的极值点.

(二) 基本要求

(1) 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义.

(2) 了解二元函数的极限与连续的概念，有界闭区域上连续函数的性质.

(3) 理解多元函数偏导数概念.

(4) 理解全微分的概念，了解全微分形式的不变性，了解全微分存在的必要条件和充分条件.

(5) 掌握多元复合函数的求导方法.

(6) 理解方向导数与梯度的概念，并掌握其计算方法.

(7) 掌握多元函数一阶及二阶偏导数的求法.

(8) 理解隐含数的求导法则.

(9) 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.

(10) 了解二元函数的泰勒公式.

(11) 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，理解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值；会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单函数的极大值和极小值，并能解决一些实际问题.

(三) 重点与难点

重点：多元函数一阶、二阶偏导数；复合函数的求导法则；方向导数与梯度；隐含数的求导法则；几何应用；多元函数极值和最值.

难点：复合函数的一阶、二阶偏导数；隐含数的一阶、二阶偏导数.

二、释疑解难

问题 8.1　当动点 $P(x,y)$ 沿任一直线无限趋于点 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 的极限存在，且都等于 A，能否说明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

答　不能确定. 参考例 8.6.

问题 8.2　如果引入坐标 $\begin{cases} x=x_0+r\cos\theta \\ y=y_0+r\sin\theta \end{cases}$，且对任意的 θ，都有 $\lim\limits_{r\to 0}f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)=A$，其中 A 是一个与 θ 无关的常数，是否有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$?

答　不一定. 例如：

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & x^2+y^2=0 \\ \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$$

当 (x,y) 沿曲线 $y^3=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y^3=kx \\ x\to 0}} \frac{xy^3}{x^2+y^6}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

但若用 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{x^2+y^3}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^6\sin^6\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin^3\theta}{\cos^2\theta+r^4\sin^6\theta}=0$$

问题 8.3　判定二重极限不存在，有哪些常用的方法?

答　依二重极限的定义，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在的充分必要条件是 $P(x,y)$ 以任何方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 有相同的极限，因此，判定二重极限一定不存在，常用的方法有如下两种：

(1) 选取一种 $P\to P_0$ 的方式，记为 $P\in C$，其中 C 为函数定义域内以 P_0 为聚点的一个点集，按此特殊方式，$\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在.

(2) 找出两种 $P\in C_1$ 与 $P\in C_2$ 的方式，使

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=A_1 \quad (P\in C_1), \qquad \lim_{P\to P_0} f(x,y)=A_2 \quad (P\in C_2)$$

且 $A_1\neq A_2$ 则二重极限不存在.

问题 8.4　二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 是否一样?

答　不一样.

(1) 二重极限存在，但是累次极限不存在. 例如 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\ (xy\neq 0)$，由于

$$\left| x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|+|y| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，但是 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{y}=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0}y\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{y}\right)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在. 同理 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在.

(2) 二重极限不存在，但是累次极限存在. 例如 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\neq 0)$ 的二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$.

(3) 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

问题 8.5 求一些比较简单函数的二重极限有哪些方法？

答 由于在平面上移动点 $P(x,y)$ 趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式多样性，导致了二重极限的复杂性，相对一元函数要复杂，一般求二重极限常用的方法如下：

(1) 利用函数的连续性. 如果 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的连续点，则 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

(2) 利用极限的性质(如四则运算性质，夹逼准则).

(3) 若观察出 $f(x,y)$ 的极限是 A，利用极限的 ε-δ 定义去证明 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$.

(4) 消去零因子的方法.

(5) 将二元问题转化为一元问题，如典型例题例 8.3.

问题 8.6 若一元函数 $f(x_0,y)$ 在点 y_0 处连续，能否断定二元函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续？

答 不一定. 例如：

(1) $f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $P_0(0,0)$ 上，由 $f(0,y)=|y|$ 知，$f(x,y)$ 在 $P_0(0,0)$ 连续.

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $P(0,0)$ 上有 $f(0,y)$，$f(x,0)$，且都连续，但 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

问题 8.7 计算偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ 时，是否可以将 $y=y_0$ 先代入，再对 x 求导数？

答 直接由偏导数的定义可得出，实际上对 x 求偏导数时，就是将变量 y 看成常数，再对 x 求导数.

问题 8.8 二阶混合偏导数 $f_{xy}''(x,y)$ 与 $f_{yx}''(x,y)$ 是否一定相等？

答 不一定. 只有两个二阶混合偏导数连续时，才有 $f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y)$. 例如：

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

(1) 在点 $(0,0)$ 处有 $f_x'(0,0)=0=f_y'(0,0)$.

(2) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$f_x'(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\qquad f_y'(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}''(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3},\qquad f_{yx}''(x,y)=\frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+x^4)}{(x^2+y^2)^3}$$

可见，当 $x^2+y^2\neq 0$ 时 $f_{xy}''=f_{yx}''$. 但当 $x^2+y^2=0$ 时，有

$$f_{xy}''(0,0)=\lim_{y\to 0,}\frac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y}=-1,\qquad f_{yx}''(0,0)=\lim_{x\to 0,}\frac{f_y'(x,0)-f_y'(0,0)}{x}=1$$

所以 $f_{xy}''(0,0)\neq f_{yx}''(0,0)$.

问题 8.9 在一元函数中，若 $f(x)$ 满足条件：

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,则 $f'(x)\equiv 0$ 的充要条件是在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv k$. 多元函数是否也有类似的结果?

答 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 内偏导数存在,则

(1) 在 D 内 $\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0$(或 $\frac{\partial z}{\partial y}\equiv 0$) 的充要条件是 $f(x,y)=\varphi(y)(f(x,y)=\varphi(x))$.

(2) 在 D 内 $\frac{\partial z}{\partial x}\equiv 0,\frac{\partial z}{\partial y}\equiv 0$ 的充要条件是 $f(x,y)=$ 常数($(x,y)\in D$).

问题 8.10 若 $f(x,y)$ 在区域 D 内任一点处可微,且在沿两个不共线的方向导数皆为零,则 $f(x,y)=$ 常数. 对吗?

答 对. 设两个不共线的方向余弦分别为 $(\cos\alpha_1,\cos\beta_1)$ 和 $(\cos\alpha_2,\cos\beta_2)$,由不共线知

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}\neq 0$$

故方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_1+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta_1=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_2+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta_2=0\end{cases}$$

只有零解,由此知 $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0\equiv\frac{\partial f}{\partial y}$,故 $f(x,y)=$ 常数.

问题 8.11 若 $f(x,y)$ 在区域 D 内任一点处有 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$,则 $f(x,y)=$ 常数($(x,y)\in D$). 对吗?

答 不一定. 例如 $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ 满足题设条件,但 $f(x,y)\neq$ 常数.

问题 8.12 在一元函数中,若 $f(x)$ 在 x_0 可导,必有 $f(x)$ 在 x_0 连续,那么多元函数是否也有相同的结果,即偏导数存在,是否一定连续?

答 不一定.

(1) $z=f(x,y)=x^2+y^2$ 在 $(0,0)$ 的偏导数存在,且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数为

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在,事实上,$\lim\limits_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}$,当 k 取不同值时其极限不同,所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

(3) 连续不一定偏导数存在. 例如 $z=f(x,y)=|x|+|y|$ 在点 $(0,0)$ 连续,但 $f'_x(0,0)$ 及 $f'_y(0,0)$ 都不存在.

问题 8.13 对于多元函数而言,全微分存在,函数必连续. 反之是否成立?

答 不一定. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

由于

$$0<\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|xy|}$$

因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续，且 $f_x'(0,0)=0, f_y'(0,0)=0$，但是

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\,\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

不存在.由微分的定义知，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

问题 8.14 多元函数的可微性与偏导数之间的关系如何？

答 对于一元函数而言，可微性与可导性是等价的；但对多元函数而言：

(1) 可微 $\Rightarrow$ 偏导数必存在.

(2) 偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微.

(3) 偏导数存在，不一定可微(见问题 8.12).

问题 8.15 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，当 $x=t$，$y=t$ 时，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 有两种解法：

(1) 显然有 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，由复合函数的求导公式得

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=f_x'(0,0)\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}+f_y'(0,0)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0\times 1+0\times 1=0$$

(2) 把 $x=t$，$y=t$ 代入原函数 $z=f(x,y)=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$，从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

上述两种解法结果不一样，为什么？

答 原因在于用了复合函数求导公式，而用此公式的前提是要求全微分存在. 事实上 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的全微分不存在.

问题 8.16 一阶微分形式不变性在多元函数微分学中起什么作用？

答 多元函数的一阶微分形式不变性，给我们提供了一个求偏导数的简便方法，即不需要区分函数由多少个中间变量复合而成，变量之间的关系是如何错综复杂，都不必去辩认区分，仅分清楚自变量是什么，直到出现自变量的微分，那么自变量微分的系数连同符号在内，就是要求的对这个变量的偏导数.

问题 8.17 有人认为偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$ 就是函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿 Ox 轴方向及 Oy 轴方向的方向导数，这种说法对吗？

答 错误. 依方向导数的定义

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\rho}=\lim_{|\Delta x|\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{|\Delta x|}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

由此可见，前者是单侧极限，后者是双侧极限，并非完全一样. 若偏导数存在，则沿 Ox 轴方向及 Oy 轴方向的方向导数必存在. 但反之不一定，例如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数不存在，但在 Ox 方向的方向导数为

$\dfrac{\partial z}{\partial l} = 1.$

问题 8.18　如果函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在，但不可微分，$\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$，那么方向导数的计算公式

$$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}\cos\beta$$

是否成立？

答　不一定.

(1) 当 $\cos\alpha \cdot \cos\beta = 0$ 时，不妨设 $\cos\beta = 0$，由于 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$，故 $\cos\alpha = \pm 1$，此时，若 $\cos\alpha = 1$，则

$$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = f_x'(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$$

若 $\cos\alpha = -1$，则

$$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0-t,y_0) - f(x_0,y_0)}{-t} = -f_x'(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0,y_0)\cos\beta$$

此时计算公式仍然成立.

(2) 当 $\cos\alpha \cdot \cos\beta \neq 0$ 时，此时计算公式不一定成立. 例如 $f(x,y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$，则 $f_x'(0,0) = 0$，$f_y'(0,0) = 0$，但

$$\frac{\partial z}{\partial l}\bigg|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha, t\cos\beta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{(t\cos\alpha \cdot t\cos\beta)^{\frac{1}{3}}}{t} = \infty$$

问题 8.19　如果函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿各方向的方向导数都存在，那么能否断定 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续？

答　不能. 例如

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^4}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处沿任意方向 $\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l}\bigg|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\cos\alpha, t\cos\beta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t\cos\alpha \cdot \cos^2\beta}{\cos^2\alpha + t^2\cos^4\beta} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

故 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

问题 8.20　对于多元函数而言，若 $f(P)$ 在有界闭区域内有唯一极小值点，那么该点是否为 $f(P)$ 最小值点？

答　不一定. 例如 $z = f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - x^3$ 在有界闭域 $D: x^2 + y^2 \leqslant 16$ 上，令 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$，得两驻点 $M_1(0,0)$ 及 $M_2(2,0)$，并利用极值判定的充分条件知，$M(0,0)$ 是唯一的极小值点，但 $f(x,y)$ 在边界上取得最小值 $f_{最小} = f(4,0) = -16$. 所以 $f(0,0) = 0$ 并非最小值点.

若能判定 $f(x,y)$ 在 D 内取得最值，而且在 D 内只有唯一的极值点，那么此点必是最值点. 例如 $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ 在有界闭域 $D: x^2 + y^2 \leqslant 16$ 上，恒有 $f(x,y) \geqslant 0$. 而且在 D 内只有唯一的极值点 $(0,0)$，

且 $f_{极小}=f(0,0)=0$. 所以 $f(0,0)=0$ 为最小值点.

问题 8.21 若 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 取得极值,那么一元函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 及 $\psi(y)=f(x_0,y)$ 是否在该点取得极值,反之是否成立?

答 是. 反之未必成立. 例如 $f(x,y)=x^2-3xy+y^2$ 在点 $M_0(0,0)$ 上,$\varphi(x)=f(x,0)=x^2$,$\psi(y)=y^2$,在 $x=0$,$y=0$ 取得极小值,但点 $(0,0)$ 不是极小值点.

问题 8.22 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续,且有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$,则点 $(0,0)$ 一定是极值点吗?

答 错. 由题设条件 $f(x,y)-xy=(x^2+y^2)^2+o((x^2+y^2)^2)$ 知,$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$,所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-xy]+\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x,y)=0+0=0$$

再由 $f(x,y)$ 的连续性知 $f(0,0)=0$. 令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,则

$$f(x,y)=xy+\rho^4+o(\rho^4)\quad(\rho\to 0)$$

(1) 取 $y=x$,则得 $f(x,x)=x^2+4x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$. 这说明可取值 $f(x,x)>0=f(0,0)$.

(2) 取 $y=-x$,则得 $f(x,-x)=-x^2+4x^4+o(x^4)\quad(x\to 0)$. 这说明可取值 $f(x,-x)<0=f(0,0)$.

因此在点 $(0,0)$ 附近有比 $f(0,0)=0$ 大或小的值,从而 $f(0,0)$ 不可能是 $f(x,y)$ 极值.

三、典型例题分析

例 8.1 设 $u(x,y)=y^2\varphi(3x+2y)$,若 $u\left(x,\dfrac{1}{2}\right)=x^2$,求 $u(x,y)$ 的表达式.

解 由 $u\left(x,\dfrac{1}{2}\right)=x^2$ 得 $\varphi(3x+1)=4x^2$,令 $3x+1=t$,得 $x=\dfrac{t-1}{3}$,所以 $\varphi(t)=\dfrac{4}{9}(t-1)^2$,$\varphi(3x+2y)=\dfrac{4}{9}(3x+2y-1)^2$,则

$$u(x,y)=\frac{4}{9}y^2(3x+2y-1)^2$$

例 8.2 设 $f(x)$, $g(x)$ 是一元可微函数,且

$$\begin{cases}u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)\\u(x,0)=\sin 2x\\u_y'(x,0)=0\end{cases}$$

试求 $u(x,y)$ 的表达式.

分析 此题的关键是求 f 与 g 的函数表达式,由题设条件 $u(x,0)=\sin 2x$ 及 $u_y'(x,0)=0$ 知

$$\begin{cases}f(2x)+g(2x)=u(x,0)=\sin 2x\\5f'(2x+5y)-5g'(x-5y)=u_y'(x,y)\end{cases}$$

从而导出条件

$$\begin{cases}f(2x)+g(2x)=\sin 2x & ①\\5f'(2x)-5g'(2x)=0 & ②\end{cases}$$