21世纪大学数学精品教材
丛书主编 蔡光兴 戴明强

海军院校重点教材

数学模型及其应用

戴明强 李卫军 杨鹏飞 主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪大学数学精品教材·

·海军院校重点教材·

数学模型及其应用

戴明强 李卫军 杨鹏飞 主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科（本科 1 普通类和本科 2 一类）数学系列教材，体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征，具有鲜明的特点，按照统一的指导思想组编而成.

本书主要内容有：绪论、一般模型、微分方程模型、差分方程模型、层次分析模型、线性规划模型、动态规划模型、图论模型、排队论模型、数据的插值与拟合模型、回归分析模型、聚类分析与判别分析模型、优秀参赛论文选编、历年中美大学生数学模型竞赛真题等，每章后附习题和本章常用词汇中英文对照，完成教学约需 40 ~ 60 学时.

本书可作为理、工、农、医、经、管等专业的数学模型及相关课程教材，也可作为教研工作者的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学模型及其应用/戴明强，李卫军，杨鹏飞主编.—北京：科学出版社，2007

（21 世纪大学数学精品教材）

ISBN 978-7-03-018447-4

I.数… II.①戴…②李…③杨… III.数学模型－高等学校－教材 IV.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 005630 号

责任编辑：王雨舸／责任校对：董艳辉

责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

湖北新华印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 2 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2007 年 2 月第一次印刷 印张：20 1/2

印数：1—5 000 字数：410 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《21世纪大学数学精品教材》丛书序

《21世纪大学数学精品教材》为大学本科(本科1普通类和本科2一类)数学系列教材,体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会,编委由12所高校数学院系的负责人构成(按姓氏笔画):

王公宝　方承胜　江志宏　李逢高　何　穗　张志军　时　宝　杨鹏飞

周　勇　欧贵兵　罗从文　高明成　殷志祥　黄朝炎　蔡光兴　戴明强

丛书主编:

蔡光兴　戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在,每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求.部分教材配有教学光盘,便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿,反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要,数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任,一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合,是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为,达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科(本科1普通类和本科2一类)学生,应用性是数学学科和数学教学发展的新特点,或展现在教材内容结构上,或体现于某些章节,或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性,教师好教,学生好学,同时保持知识完整.二者发生矛盾时,前者优先,不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类：基础知识类；方法与应用类.

1. 基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将Mathematica、Matlab、SAS、SPS等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

2. 方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法(如数学建模思想)，体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 通过实例、训练、实验等各种方式，提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练，通过完整的程序与实例介绍，教会学生分析问题、动手编程、分析结果，提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

《21世纪大学数学精品教材》组编委员会

2006年9月

序

近几十年来，随着科学技术的发展，特别是计算机技术的发展，数学正向其他各研究领域迅速渗透与深入. 数学与现代计算机技术的结合，形成了一种威力巨大的高技术，它像一把锋利的宝剑，使得过去许多领域中一些无法定量解决的问题迎刃而解，许多方向的研究工作由此出现了根本的变化，数学技术已成为高新技术的核心成分.

对于现实世界的某些问题，我们可以利用所掌握的有关专业知识与信息，抓住问题的主要因素，分析讨论其中的数量关系，抽象成一个数学结构，也就是建立所研究问题的数学模型，运用数学的理论和方法，经实践或实验检验，使问题得以解决. 这种研究问题的方法现在越来越普遍地被采用，由此数学建模课程在高等学校中应运而生，目前不少高校已将数学模型课程列为一些专业的必修课或选修课. 近 10 多年来，一年一度的全国大学生数学建模竞赛，更进一步调动了学生学习数学建模课程和参与数学建模实践的兴趣. 实践证明，通过开展数学建模教学与实践活动，对全面提高学生各方面的能力和综合素质效果显著.

数学建模涉及的数学理论与方法十分广泛，适当选取与设置课程内容成为教学工作者非常关心的问题，一本内容与难度恰当的教材是课程建设的重要基础. 本书的编者长期从事数学建模课程教学与竞赛培训、指导工作，曾经指导学生在全国大学生数学建模竞赛中获得过 20 多个全国一等奖，他们根据教学与实践中积累的丰富经验与资料，精心选材编成此书，在比较全面介绍建模主要方法的同时注重建模思想的介绍，而一些典型案例的完整引入，更会使得初习者体会到建模的全过程. 秋高气爽，果满枝头，期望本书的面世能给品尝者带来一丝清香.

费浦生

2006 年 9 月于珞珈山

前　言

数学科学在实际中的重要地位和作用已广泛为人们所认识，它的生命力正在不断地增强，这主要是来源于它的应用地位. 各行各业和各科学领域都在运用数学，或建立在数学基础之上，正像人们所说的“数学无处不在”已成为无可争辩的事实. 运用数学方法解决各种实际问题受到越来越多人们的重视.

用数学方法解决实际问题或者数学渗入其他学科领域乃至与其他学科结合形成交叉学科，首要和关键的一步是用数学的语言描述所研究的对象，即建立数学模型. 在高科技特别是计算机技术迅猛发展的今天，计算和建模正成为数学科学技术转化的主要途径. 正因为如此，数学建模全面进入大学课堂并逐渐融入主干数学课程教学成为大势所趋. 自 1992 年开始的中国大学生数学建模竞赛的蓬勃发展，说明数学建模活动受到广泛的重视，并深刻地影响着大学数学教学，惠及越来越多的学子和科技工作者.

本书为《21 世纪大学数学精品教材》之一，是编者在多年从事“数学建模”课程教学和组织指导大学生数学建模竞赛工作的基础上，总结多年教学与竞赛的经验并吸取大量参考资料的长处编写而成，可以作为本科生“数学建模”课程的教材，也可供相关专业研究生和技术人员从事研究工作参考之用.

本书的出版得到了海军工程大学各级领导和机关的关心和支持，被海司院校部批准为海军院校重点教材. 湖北省数学建模竞赛组委会专家组组长、武汉大学费浦生教授在百忙之中审阅了全部书稿，提出许多指导性修改意见，并为本书作序. 在此，对他们的关心、支持和帮助表示衷心的感谢和敬意. 本书参考了许多资料，因此，对于书末所列的参考书目的作者们也要表示真诚的感谢和敬意.

本书的编写大纲由戴明强、李卫军、胡伟文、金裕红和宋业新拟定，戴明强、李卫军、杨鹏飞任主编，胡伟文、金裕红、宋业新、朱永松任副主编，第 1、6 章由戴明强编写，第 2、5 章由杨鹏飞编写，第 3、4 章由李卫军编写，第 7、8 章由宋业新编写，第 9、10 章由金裕红编写，第 11、12 章由胡伟文编写，附录由朱永松编写. 全书由戴明强、李卫军、杨鹏飞统稿.

由于编者水平有限，不足之处在所难免，敬请批评指正.

编　者

2006 年 9 月

目　录

第1章 绪　　论

随着科学技术对研究对象的日益精确化、定量化、数学化以及电子计算技术的迅猛发展和广泛应用，对于广大的科学技术人员和应用数学工作者来说，数学模型是沟通摆在面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁. 例如，电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型，用这个模型对控制装置作出相应的设计和计算，才能实现有效的过程控制；气象工作者为了得到准确的天气预报，也离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型；生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化数学模型，就可以分析药物的疗效，有效地指导临床用药；城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型，为城市发展规划的决策提供科学根据；厂长经理们根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息，筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型，一定可以获得更大的经济效益；就是在日常活动(如访友、采购)中，人们也会讨论(也即建立数学模型)优化出行的路线等. 数学模型业已成为处理科学技术领域中各种实际问题的重要工具，并在自然科学、工程技术科学与社会科学等各个领域中得到广泛应用.

§1.1 数学建模的重要意义

1.1.1 什么是数学建模

对数学建模(mathematical modelling)如果一定要下一个定义的话，可以说它是一种数学的思考方法，是“对现实的现象通过心智活动构造出能抓住其重要且有用的特征的表示，常常是形象化的或符号的表示.”从科学、工程、经济、管理等角度看数学建模就是用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学工具. 顾名思义，modelling 一词在英文中有“塑造艺术”的意思，故可以理解从不同的侧面、角度去考察问题就会有不尽相同的数学模型，从而数学建模的创造又带有一定的艺术的特点. 而数学建模最重要的特点是要接受实践的检验、多次修改模型使之渐趋完善的过程，这可以用图 1-1 所示的框图来表示.

数学建模并不是新事物，只是在过去很长时间这一术语用得很少而已. 可以说有了数学并要用数学去解决实际问题就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画该实际问题，而这种刻画的数学描述就是一个数学模型，其过程就是数学建模的过程. 两千多年以前创立的欧几里得几何，17 世纪发现的牛顿万有引力定律，都是科

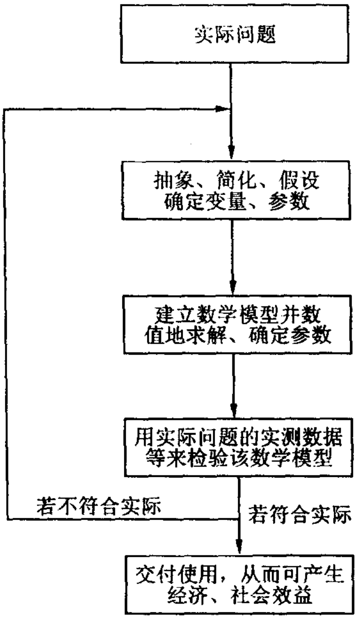

图 1-1　数学建模流程图

学发展史上数学建模的著名范例.

1.1.2　数学建模示例

如何控制并预测人口的发展是当前众多发展中国家面临的重要问题之一，因而对人口的控制和预测方面的研究工作越来越受有关政府和社会的重视. 影响今后人口总数的因素很多，一般来说，要预测今后某时刻人口的总数是一个很复杂的问题. 长期以来人们在这方面作了不少工作，下面介绍两个最基本的人口模型.

1. 指数增长模型

最简单的人口增长模型是人所共知的：记今年人口为 x_0，k 年后人口为 x_k，年增长率为 r，则

$$x_k = x_0(1+r)^k \tag{1-1}$$

显然，这个公式的基本条件是年增长率 r 保持不变.

200 多年前英国人口学家马尔萨斯(Malthus，1766～1834)调查了英国一百多年的人口统计资料，得出了人口增长率不变的假设，并据此建立了著名的人口指数增长模型.

记时刻 t 的人口为 $x(t)$，当考察一个国家或一个较大地区的人口时，$x(t)$ 是一个很大的整数. 为了利用微积分这一数学工具，将 $x(t)$ 视为连续、可微的函数. 记初始时刻($t=0$)的人口为 x_0，假设人口增长率为常数 r，即单位时间内 $x(t)$ 的增量等于 r 乘以 $x(t)$，考虑 t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口的增量，显然有

$$x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

令 $\Delta t \to 0$，得到 $x(t)$ 满足微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx, \quad x(0) = x_0 \tag{1-2}$$

由这个方程很容易解出

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{rt} \tag{1-3}$$

$r>0$ 时，式(1-3)表示人口将按指数规律随时间无限增长，称为指数增长模型. 式中的参数 r 和 x_0 可用历史数据进行估计.

历史上，指数增长模型与 19 世纪以前欧洲一些地区人口统计数据可以很好地吻合，迁往加拿大的欧洲移民后代人口也大致符合这个模型. 另外，用它作短期人口预测可以得到较好的结果. 显然，这是因为在这些情况下，模型的基本假设——人口增长率是常数——大致成立.

但是从长期来看，任何地区的人口都不可能无限增长，即指数模型不能描述、也不能预测较长时期的人口演变过程. 这是因为，人口增长率事实上是在不断地变化着. 排除灾难、战争等特殊时期，一般说来，当人口较少时，增长较快，即增长率较大；人口增加到一定数量以后，增长就会慢下来，即增长率变小.

看来，为了使人口预报特别是长期预报更好地符合实际情况，必须修改指数增长模型关于人口增长率是常数这个基本假设.

2. 阻滞增长模型(Logistic 模型)

分析人口增长到一定数量后增长率下降的主要原因，人们注意到，自然资源、环境条件等因素对人口的增长起着阻滞作用，并且随着人口的增加，阻滞作用越来越大. 所谓阻滞增长模型就是考虑到这个因素，对指数增长模型的基本假设进行修改后得到的.

阻滞作用体现在对人口增长率 r 的影响上，使得 r 随着人口数量 x 的增加而下降，若将 r 表示为 x 的函数 $r(x)$，则它应是减函数，于是方程(1-2)可写作

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r(x)x,\quad x(0)=x_0 \tag{1-4}$$

对 $r(x)$ 的一个最简单的假定是，设 $r(x)$ 为 x 的线性函数，即

$$r(x)=r-sx\quad (r>0,s>0) \tag{1-5}$$

这里 r 称固有增长率，表示人口很少时(理论上是 $x=0$)的增长率. 为了确定系数 s 的意义，引入自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量 x_m，称人口容量. 当 $x=x_m$ 时人口不再增长，即增长率 $r(x_m)=0$，代入式(1-5)得 $s=\frac{r}{x_m}$，于是式(1-5)可改为

$$r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right) \tag{1-6}$$

式(1-6)的另一种解释是，增长率 $r(x)$ 与人口尚未实现部分的比例 $\frac{x_m-x}{x_m}$ 成正比，比例系数为固有增长率 r.

将式(1-6)代入方程(1-4)，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\frac{x}{x_m}\right),\quad x(0)=x_0 \tag{1-7}$$

方程(1-7)右端的因子 rx 体现人口自身的增长趋势，因子 $\left(1-\frac{x}{x_m}\right)$ 则体现了资源和环境对人口增长的阻滞作用. 显然，x 越大，前一因子越大，后一因子越小，人口增长是两个因子共同作用的结果.

如果以 x 为横轴、$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 为纵轴作出方程(1-7)的图形(图 1-2)，可以分析人口增长速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 随着 x 的增加而变化的情况，从而大致地看出 $x(t)$ 的变化规律.

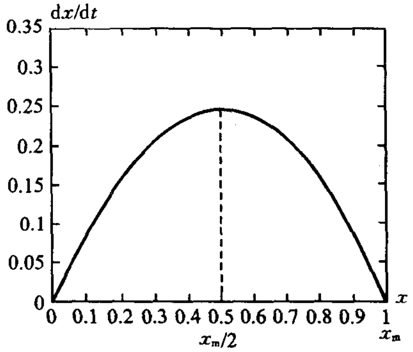

图 1-2　Logistic 模型 $dx/dt \sim x$ 曲线

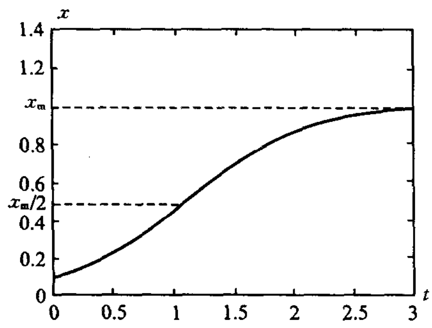

图 1-3　Logistic 模型 $x \sim t$ 曲线

实际上，方程(1-7)可以用分离变量法求解得到

$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\frac{x_m}{x_0}-1\right)e^{-rt}} \tag{1-8}$$

读者可以用计算机画出式(1-8)的图形，它是一条 S 形曲线(图 1-3)，x 的增加先快后慢，$t \to \infty$ 时 $x \to x_m$，拐点在 $x=\frac{x_m}{2}$.

使用这个模型预测美国的人口，从 1820～1930 年，计算结果与实际结果都比较相符. 但后来出现的误差越来越大，主要原因是 1960 年后的美国实际人口就已经超过了过去确定的最大人口数量 x_m. 这个模型的不足之处在于 x_m 不易确定. 通常 x_m 的值应随生产力的发展和其他环境的改善而增加.

由方程(1-7)表示的阻滞增长模型，是荷兰生物数学家 Verhulst 于 19 世纪中叶提出的，它不仅能够大体上描述人口及许多物种数量(如森林中的树木、鱼塘中的鱼群等)的变化规律，而且在社会经济领域也有广泛的应用，如耐用消费品的售量就可以用它来描述. 基于这个模型能够描述一些事物符合逻辑的客观规律，人们常称它为 Logistic 模型，本书以后的章节将多次用到它.

用数学工具描述人口变化规律，关键是对人口增长率作出合理、简化的假定. 阻滞增长模型就是将指数增长模型关于人口增长率是常数的假设进行修正后得到的. 可以想到，影响增长率的出生率和死亡率与年龄有关，所以，更合乎实际的人口模型应该考虑年龄因素.

参数估计和模型检验是建模的步骤，线性最小二乘法是参数估计(如果是基于数据的，又称数据拟合)的基本方法，读者应该知道它的原理，并掌握它的软件实现.

1.1.3　数学建模的重要意义

进入 20 世纪以来，随着数学以空前的广度和深度向一切领域渗透以及电子计

算机的出现和飞速发展，数学建模越来越受到人们的重视. 从以下两个方面可以看出数学建模的重要意义.

1. 数学建模是众多领域发展的重要工具

当前，在国民经济和社会活动的诸多领域，数学建模都有非常深入、具体的应用. 例如，分析药物的疗效；用数值模拟设计新的飞机翼型；生产过程中产品质量预报；经济增长预报；最大经济效益价格策略；费用最少的设备维修方案；生产过程中的最优控制；零件设计中的参数优化；资源配置；运输网络规划；排队策略；物质管理等. 数学建模在众多领域的发展中扮演着重要工具的角色. 即便在一般的工程技术领域，数学建模仍然大有可为. 在以声、光、电机、土木、水利等工程技术领域中，虽然基本模型是已有的，但由于新技术、新工艺的不断涌现，产生了许多需要数学方法解决的新问题，而由于计算机的快速发展，使得过去某些即使有了数学模型也无法求解的问题(如海量数据的问题)也有了求解的可能. 随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等众多所谓和物理领域的渗透，用数学方法研究这些领域中的内在特征成为关键的步骤和这些学科发展与应用的基础. 在这些领域里建立不同类型、不同方法、不同深浅程度的模型的余地相当大，数学建模的重要工具和桥梁作用得到进一步体现.

2. 数学建模促进对数学科学重要性的再认识

从某种意义上讲，说明数学科学的重要性是件容易的事情，可以举出许多例子(从日常生活到尖端技术)说明数学为什么是必不可少的，但常常会发现许多人虽然不反对所列举的例子，可还是认为数学没有多大用处或者说数学与其生活和工作没有多大关系. 这不仅仅是由于数学的语言比较抽象不容易掌握，还有传统数学教育重知识传授轻实际应用以及其他原因. 传统的数学教学越来越形式、抽象，只见定义、定理、推导、证明、计算，越来越少讲与我们周围的世界以至日常生活的密切联系，使得数学的重要性变得越来越空泛. 随着计算机革命引起的深刻变化，数学与实际问题的结合，变得更为密切和广泛，数学建模进入研究生、大学生乃至中学生的学习内容，其思想逐渐融入数学主干课程的教学内容中，数学学科的主要性也显得更实在、更具体. 数学建模在众多学科领域乃至日常生活中的广泛应用促使更多人认识到数学科学的重要性.

§1.2 数学建模的基本方法和步骤

数学建模面临的实际问题是多种多样的，建模的目的不同、分析的方法不同、采用的数学工具不同，所得模型的类型也就不同，不能指望归纳出若干条准则，适用于一切实际问题的数学建模方法. 因而，所谓的基本方法主要是从方法论的意义上讲的.

1.2.1　数学建模的基本方法

一般说来建模方法大体上可分为机理分析和测试分析两种. 机理分析是根据对客观事物特性的认识,找出反映内部机理的数量规律,建立的模型常有明确的物理或现实意义,前面的示例用的即是机理分析. 测试分析将研究对象看作一个"黑箱"系统(即它的内部机理看不清楚),通过对系统输入、输出数据的测量和统计分析,按照一定的准则找出与数据拟合得最好的模型.

一般来说,如果掌握了实际问题的一些内部机理的知识,模型也要求反映其内在特征,那么,建模就应以机理分析为主;而如果研究对象的内部规律不清楚,模型也不需要反映内部特征,则可以用测试分析. 对于许多实际问题常常将两者结合起来建模,即用机理分析建立模型的结构,用测试分析确定模型的参数.

机理分析通常针对具体对象进行,主要通过案例研究来学习;而测试分析有完整的数学方法,本书第 11 章的回归分析就是其中之一. 我们日常所说的数学建模主要指机理分析.

1.2.2　数学建模的一般步骤

数学建模的步骤并没有一定的模式,常因问题性质、建模目的等而异. 下面介绍的是用机理分析建模的一般步骤,如图 1-4 所示.

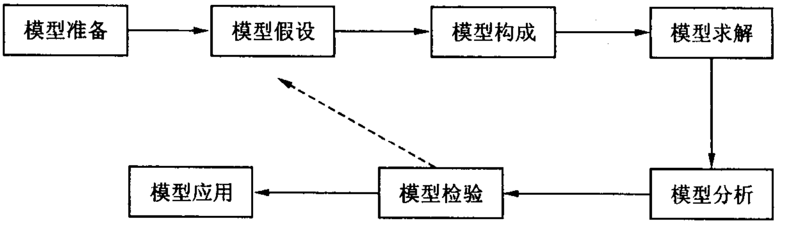

图 1-4　数学建模步骤示意图

模型准备　了解问题的实际背景,明确建模目的,搜集必要的信息(如现象、数据等),尽量弄清对象的主要特征,形成一个比较清晰的"问题",由此初步确定用哪一类模型.

模型假设　根据对象的特征和建模目的,抓住问题的本质,忽略次要因素,作出必要的、合理的简化假设.

模型构成　根据所做的假设,用数学的语言、符号描述对象的内在规律,建立包含常量、变量等的数学模型,如优化模型、微分方程模型、差分方程模型、图的模型等. 建模时应遵循的一个原则是:尽量采用简单的数学工具,因为你的模型总是希望更多的人了解和使用,而不是只供少数专家欣赏.

模型求解　可以采用解方程、画图形、优化方法、数值计算、统计分析等各种数

学方法,特别是数学软件和计算机技术.

模型分析 对求解结果进行数学上的分析,如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的灵敏性分析、对假设的强健性分析等.

模型检验 把求解的分析结果翻译回到实际问题,与实际的现象、数据比较、检验模型的合理性和适用性,如果结果与实际不符,应该修改、补充假设,重新建模,如图 1-4 中的虚线所示.

模型应用 应用的方式与问题性质、建模目的及最终的结果有关,一般不属于本书讨论的范围.

应当指出,并不是所有问题的建模都要经过这些步骤,有时各步骤之间的界限也不那么分明,建模时不要拘泥于形式上的按部就班,本书的实例就采取了灵活的表述形式.

1.2.3 几个需要注意的方面

对于给定的实际问题(原型),为了建立合理的模型,需要注意以下几个方面:

(1) 根据需要对原型作一些合理的假设.一个原型,常有众多的特性,这些特性所具有的数量特征,常与众多的因素有关.在一定条件下,有的因素是主要的和本质的;有的因素是次要的和非本质的;有的因素与我们所考虑的特征的数量特征之间遵循某种理论规律(如物理学中的定律);有些因素却没有理论规律可以遵循(如地面上运动物体的速度与空气阻力之间的关系).为了获得可靠的并且通过计算机可以得到必要解签的数学模型,必须对原型作出适当的假设.例如,为了突出主体,可以略去那些次要的非本质的因素,达到简化的目的;又如,将那些没有理论规律可以遵循的关系,作出明确的假设,达到确定化目的.但所有假设都必须是合理的,即符合或近似地符合自然规律.

(2) 恰当地使用数学方法.很多数学方法可以用来建立实际问题的数学模型.然而,对于一个给定的原型,并非一切数学方法都是适用的.一般说来,对于不确定性问题常适宜于用概率统计等数学方法;对于确定性问题常适宜于用微分方程或代数方程等数学方法.例如,我国 1992 年大学生数模竞赛中的 A 题——施肥效果分析,因为所给实验数据具有随机性,只宜建立不确定性模型,如使用回归分析方法等;其 B 题——实验数据分解,应建立确定性模型.因此,在建立数学模型之前,对原型作确定性与非确定性判断,再确定数学方法是非常重要的.此外,变量取连续值的模型,称为连续性模型;变量取离散值的称为离散性模型.因为计算机的发展,直接以原型建立起离散模型(如差分方程方法)或对已建立的连续性模型寻找合理的离散方法,达到能使用计算机进行计算的目的,已成为当今科学计算方面的一个热门课题.

(3) 对建立起来的模型进行必要的分析和检验.怎样判断在建模过程中所作的假设是合理的,使用的数学方法也是恰当的呢? 一种有效的方法就是对建立起