

土木工程研究生系列教材

有限元法 及其应用

江见鲸 何放龙 何益斌 陆新征 编著
袁明武 主审



附赠光盘

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



0241.82
J-421

研究生系列教材

有限元法及其应用

江见鲸 何放龙 何益斌 陆新征 编著

袁明武 主审



机械工业出版社

本书是土木工程研究生系列教材之一。本书系统介绍了有限元法的基础核心理论及其在土木工程领域的应用。本书将重点放在了工程实际问题的计算模型的建立和计算方法的选择上,淡化过程的推导,注重结果的判断。本书既为学生提供了有限元法的基本理论、非线性有限元法及通用有限元软件应用等基本内容,又提供了板壳有限元和其他数值方法等扩展内容。为便于学生学习和掌握有限元软件及其应用,本书配备了 ANSYS 和 MARC 软件的详细操作步骤和命令流光盘,供学生使用。

本书既可作为土木工程研究生教材,也可供相关领域的科技人员学习参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

有限元法及其应用/江见鲸等编著. —北京:机械工业出版社, 2006 8

(土木工程研究生系列教材)

ISBN 7 - 111 - 19419 - 5

I. 有… II. 江… III. 有限元法 - 研究生 - 教材
IV .0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 067562 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:季顺利 版式设计:霍永明 责任校对:魏俊云

封面设计:张静 责任印制:洪汉军

北京京丰印刷厂印刷

2006 年 8 月第 1 版·第 1 次印刷

170mm × 230mm · 8.25 印张 · 299 千字

定价:25.00 元 (含 1CD)

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68326294

编辑热线电话 (010) 88379729

封面无防伪标均为盗版

土木工程研究生系列教材编审委员会

顾问: (以姓氏笔画为序)

王正宏	任爱珠	朱博鸿	刘怀恒
刘宝琛	刘祖德	沈世钊	沈祖炎
陈英俊	林 皋	欧进萍	周 氏
周锡元	赵国藩	钟善桐	殷宗泽
顾晓鲁	蔡美峰		

主任委员: 江见鲸

副主任委员: (以姓氏笔画为序)

朱合华	李 奇	李宏男	李爱群
杜修力	陈云敏	张永兴	张素梅
尚守平	姜忻良	夏 禾	徐志胜
廖红建			

委员: (以姓氏笔画为序)

卫 军	王 钊	王清湘	卢廷浩
朱召泉	刘晶波	李正良	李英民
李洪泉	李鸿晶	杨果林	吴知丰
陈国兴	张家生	张毅刚	张耀春
郑 刚	单 建	易伟建	周朝阳
赵树德	徐礼华	袁迎曙	康清梁
盛宏玉			

秘书长: 季顺利

土木工程研究生系列教材序

随着我国高等教育的发展,普通本科教育已由精英式教育发展成为大众式教育。我国科学技术的高速发展,对具有高级专业知识、高级专业技能的专门人才的需求日益迫切,这为硕士研究生教育的发展提供了广阔空间。一些高等院校硕士研究生的招生规模,近年来正以15%~30%的速度发展。对一些研究型的重点高校,在“十五”期间,本科生与研究生的招生比例要大致相当。许多高校已获得工程硕士的培养授权,这为研究生的培养又开辟了新途径。

硕士研究生招生规模的扩大,对传统的研究生教育模式提出了挑战。过去硕士生的培养基本套用博士生的培养模式,主要靠传帮带式的教育模式,而对数量增大的研究生教育,必须建立整建制的培养模式,即要求硕士研究生的教育培养模式向公共化、规范化方向发展。因此,硕士研究生的教材,特别是研究生教育的平台课、学位课的教材建设就显得特别重要了。

机械工业出版社根据当前土木工程研究生教育发展现状,本着“大土木工程”的教育思想,组织国内部分高校土木工程专业的教授,对土木工程研究生用教材建设进行了研讨,并组织编写了土木工程研究生系列教材。为保证教材的编写质量,组织成立了教材编审委员会,聘请了一批学术造诣深、德高望重的专家作顾问和教材主审。本套系列教材编写、出版的思路是:先基础课、平台课教材,后专业课教材。教材由长期给研究生授课的老师合作编写,达到“学校优势互补,质量上乘”的目标。教材体系设计,本着“重基本理论、重学科发展,结合学生现状和人才培养要求”的原则。教材编写质量,本着“出精品、主编负责、主审把关”的原则,符合国务院学位委员会设定的专业要求。

本套系列教材已于2005年陆续出版。我们相信,本套系列教材的出版,将对我国土木工程研究生教育的发展和教学质量的提高及人才培养产生积极作用,为我国经济建设和社会发展做出贡献。

王见敦

前 言

有限单元法是 20 世纪 50 年代开始发展起来的数值方法，它使许多复杂的工程分析问题迎刃而解。有限单元法的广泛应用，对工程的设计、施工过程分析和工程监测反演都产生了重大影响。土木工程是采用有限元法最早的领域之一，目前也是采用有限元法最为普及的行业之一。许多土木工程的专业软件，其设计分析的基础都采用有限元法。本书就是专为土木工程专业人材的培养而写的一本教材。

目前，有限元的教材非常多，对比起来，本书的编写注意突出以下几点：

1. 对有限元方法的原理说明力求简明，易于为学生及工程技术人员所掌握。对一些比较深奥的问题（例如收敛性、稳定性等）只说明一些主要结论，不作详细推导，但注明可以参阅的有关文献。

2. 取材力求实用。书中算例大多结合土建、水利、岩土工程的应用。

3. 专门列出一章，详细阐述通用有限元软件的应用。由于通用有限元软件的功能已经非常强大，且前、后处理技术又较完善，从事工程应用的学生和技术人员完全没有必要自己再去做这些重复而效率又不高的工作，应把精力集中在结合具体工程实践去建立正确的计算模型，选择合适的计算方法上。

4. 专门编写了一章，介绍工程中常用的其他数值方法，这对研究生后期撰写论文、阅读文献会有所帮助。

本书共分 8 章，第 1 章为绪论，第 2、3 章为有限元法的基础核心理论，第 5、6 章为非线性有限元法，第 8 章为通用有限元软件应用。这些是基本内容。第 4 章板壳有限元和第 7 章的其他数值方法可作为扩展内容，供学生选学。

本书的编写分工为：第 1、2、5 章由清华大学江见鲸教授编写，第 3、4、6 章由湖南大学何放龙、何益斌教授编写，第 7、8 章由清华大学陆新征博士编写。

第 8 章中有关软件应用的详细步骤和命令流已刻成光盘并附于书后，读者可自行解读。

本书承北京大学袁明武教授审阅，他的指点为本书改进和完善起了很大作用，在此深表感谢。

由于作者水平所限，书中肯定存在许多不足之处，敬请读者批评指正。

编 者

目 录

土木工程研究生系列教材序 前言

第1章 绪论	1
1.1 有限元法发展简况	1
1.2 有限元法在土木工程中的应用	3
1.3 有限元软件的发展	5
第2章 平面问题的三角形单元	8
2.1 概述	8
2.2 位移插值函数	11
2.3 由节点位移求应变——几何方程	14
2.4 由应变求应力——弹性方程	15
2.5 由应力求节点力——虚功方程	17
2.6 单元刚度矩阵	19
2.7 节点平衡方程组——整体刚度矩阵	20
2.8 等效节点力计算	23
2.9 引入边界条件	25
2.10 解题步骤与算例	26
第3章 高次单元与等参单元	32
3.1 概述	32
3.2 四节点平面矩形单元	32
3.3 六节点三角形单元	36
3.4 平面四节点四边形等参元	40

3.5	等参单元的一般概念	46
3.6	八节点曲线四边形等参元	48
3.7	八节点六面体等参元	51
3.8	20节点立体等参元	53
3.9	几种单元的应用实例及对比	54
第4章	板壳问题有限元法	58
4.1	弹性薄板弯曲基本理论	58
4.2	矩形薄板单元	62
4.3	一般壳体问题有限元法简介	75
第5章	非线性有限元——材料非线性	83
5.1	非线性有限元问题的分类	83
5.2	材料本构关系简述	85
5.3	非线性弹性本构关系	90
5.4	弹塑性本构关系(增量型)	99
5.5	求解非线性方程的增量法	120
5.6	求解非线性方程组的迭代法	122
5.7	收敛标准	125
第6章	几何非线性有限元法	131
6.1	引言	131
6.2	大变形的应变和应力	131
6.3	几何非线性有限元方程的建立	139
6.4	有限元基本方程	142
6.5	几何非线性杆单元	145
6.6	几何非线性梁单元	147
6.7	几何非线性板单元	155
6.8	弧长法求解非线性方程组	157
第7章	其他数值方法	164
7.1	概述	164
7.2	加权残值法和里兹法	165

7.3	半解析数值法	172
7.4	离散单元法	177
7.5	刚体弹簧元法	179
7.6	无网格法	182
第8章	常用有限元软件及其在土木工程中的应用	187
8.1	概述	187
8.2	地震分析算例	188
8.3	张弦柱稳定算例	197
8.4	空间弹塑性曲梁分析算例	210
8.5	单元生死应用算例	215
8.6	悬臂梁优化算例	219
8.7	热—结构耦合分析算例	226
8.8	钢筋混凝土构件应用算例	230
8.9	边坡变形分析算例	236
8.10	接触分析算例	241
8.11	钢筋混凝土梁分析算例	244
8.12	土木工程有限元应用最新进展介绍	248
	参考文献	251

第 1 章 绪 论

1.1 有限元法发展简况

1960 年, 克拉夫 (Clough) 在他的一篇论文“平面分析的有限元法 (The Finite Element Method in Plane Stress Analysis)”^[29]中最先引入了有限元 (Finite Element) 这一术语。这一方法是结构分析专家把杆件结构力学中的位移法推广到求解连续体介质力学问题 (当时是解决飞机结构应力分析) 而提出来的。这一方法的提出, 引起了广泛的关注, 吸引了众多力学、数学方面的专家和学者对此进行研究。数学家的研究表明, 有限元法可应用于求解偏微分方程, 可用于具有变分泛函的任何数学问题。而且, 数学家对有限元的思路早就有了, 不过没有用“有限单元”这个术语。

1909 年, 里兹 (Ritz) 提出求解连续介质力学中场问题的近似解的一个强有力的方法。这个方法需要利用未知量的试探函数将势能泛函近似化, 然后由求泛函的极小值的条件, 就能导出求解未知量的一组方程式。Ritz 法的一个最初限制, 是试探函数应满足问题的边界条件。1943 年, 柯朗 (Courant) 对 Ritz 法做了极为重要的推广, 在划分为许多三角形的区域上引入了分片线性函数, 并用这种方法求解了扭转问题。这种方法将三角形区域相互连接处的函数值取为问题的未知量。由于在沿边界的有限个点上能满足边界条件, 因此可以取消要求整体 Ritz 函数满足边界条件的传统限制。当时, Courant 使用这样的分片插值法实质上是许多年后 Clough 提出有限元法的数学基础。有限元法之所以能在 1960 年立刻获得成功, 一是 Clough 从结构力学方法推导的刚度矩阵易于为广大工程师所接受, 二是在于这个方法所包含的大量数值运算可以由新发展起来的数字计算机来完成, 而 1943 年 Courant 是不可能利用这种工具的。

在 20 世纪 60 年代中期, 连续介质力学和结构分析这两个领域的研究者都认为发展了的 Ritz 法与有限元法是一致的。在后来的几十年内, 这个方法的发展和以令人鼓舞的速度前进。有限元法已应用到三维问题, 材料非线性和几何非线性问题, 与时间有关的问题, 以及在结构分析以外许多领域内的问题, 例如流体流动、热传导和电磁场分析等。概括起来, 有限元法可以解决平衡问题、特征值问题和传播问题。

在20世纪70、80年代,许多学者研究和推导出了许多更精确、更高效的单元,在单元形状、单元节点数和插值函数的类型等方面都得到了长足的发展。20世纪70年代,等参元的提出为研发新的单元开辟了新的途径,推动了新的单元的发展^[31]。

最初提出的有限单元,要求其插值函数在单元边界上保持连续,这是保证有限元分析有正确解的必要条件。在板、壳分析中,不仅要求位移连续,还要求曲率也连续,即要求插值函数的一阶导数也连续。这引起了两方面的困难,一是构造满足一阶导数也连续插值函数不易,二是推出的单元刚度过“刚”(这一问题在二维、三维问题中也存在),于是有的学者提出了“非协调元”的概念和推导方法,并有若干成功应用的例子。但是,“非协调元”的表现有时很好,有时不能得到合理的解。针对这一问题,清华大学龙驭球教授提出了“广义协调元”的概念,并带领其学术团队推导出了一系列性能优良的单元。^[14]

有限元的发展应用离不开计算机,但对于大型、巨型和复杂的结构,要剖分的单元很多,这对计算时间、存储数量还是很经济的。其剖分工作量也很大。于是有些学者提出了“半解析、半数值”的方法,即有一个方向,或有一些区域利用已经成熟的解析解,另一部分则剖分为“单元”,其中比较有代表性的是“有限条法”^[32]与“边界元法”^[34]。有限条法只是在一个方向离散化,另一方向利用解析解,边界元法只在连续体边界上剖分边界元,域内利用解析解。这两种方法均可以大大减少单元数量,从而缩短运算时间,由于解析解的运用,在某种程度上还可以提高精度。

在有限元法中,最早的研究是基于位移场的有限元法,相当于结构力学中的“位移法”。有些学者基于结构力学中的“力法”而发展了基于应力场的有限单元法。此外,部分区域基于位移场,部分基于应力场的杂交有限元法或混合有限元法也取得了较大进展。但基于位移场的有限元法仍是应用最广泛的。

有限单元方法现在的发展趋势是集成化、通用化、输入智能化和结果输出可视化。所谓集成化是一个有限元程序包往往包括了各种各样的单元(即单元库),并包括了多种材料的本构关系(即材料库);使用者可以根据需要选择和组合。通用化是一个通用程序同时有解决静力分析、动力分析、热传导、电场等各种问题的模块。输入智能化、图形化是计算机辅助输入,只要输入轮廓边界的关键点及计算所需节点数和单元类型,即可自动进行单元网格剖分,并且其结果以图形方法表达出来。这样可以快捷、直观且易于发现错误而及时改正。输出结果可视化是计算所得的应力场、位移场、流态场等均可用多方位、多层次的图形或图像表示出来,非常直观,便于分析判断。有些学者称之为仿真分析或数值仿真。

1.2 有限元法在土木工程中的应用

土木工程应用有限元分析的方法是比较早,也是比较广泛的。有一些有限元分析的教材或专著均出自大学土木工程系的学者、教授,如 ADINA、SAP 的研制者 K.J. 巴特 (K.J. Bathe) 和 E.L. 威尔逊 (E.L. Wilson) 就在加州伯克利大学土木系就读或任教。给“有限元”命名的克拉夫 (Clough) 也是美国加州伯克利 (UC Berkeley) 大学土木系的教授。出版第一版有限元教材并且广为应用的“有限元法”作者 O.C. 辛克维奇 (O.C. Zienkiewicz) 是英国斯文西 (Swansea) 大学土木系的教授^[31]。有限条法的首创者张佑启为香港大学土木系教授^[32]。广义协调元的提倡及推广者龙驭球为清华大学土木系教授。可见,有限元法与土木系有很深的密切的关系,有限元法在土木工程的应用当然也很广泛了。

表 1-1 列出了有限元法在三种主要类型问题中的具体应用,即①平衡问题或稳态问题等与时间无关的问题;②特征值问题;③传播或瞬态问题。

表 1-1 有限元法在土木工程的应用

研究范围	平衡问题	特征值问题	瞬态问题
结构工程	桁架、框架、折板、壳体 屋顶、剪力墙、桥梁和预 应力混凝土结构的静力 分析	结构的固有频率和振 型,结构的稳定性	应力波的传播,非周期性荷载作 用下结构的响应
岩土力学	坑道、挡墙、地下通道、 岩石节理,土与结构相互 作用问题的分析,土、坝、 分层堆积和机器基座中 的应力分析	坝—水库系统和土与 结构相互作用问题的固 有频率和振型	和时间有关的土与结构相互作 用问题,土和岩石中的瞬态渗流, 土和岩石中的应力传播
水力学 和水资源 工程流体 动力学	势流、自由表面流、边 界层流、粘性流、跨声速 空气动力学问题的分析, 水工结构和坝的分析	浅水池、湖泊、港湾的 固有频率和振型,在刚性和 柔性容器中液体的晃 动	非稳定流体流动和波的传播问 题分析,在蓄水池和多孔介质中的 瞬态渗流,稀薄空气动力学,磁流 体动力学
特种结 构	压力容器和外壳结构 的分析,反应堆构件的稳 态温度分布	地下管线的固有频率 和振型	输电塔、地下管线地震反应分析
传热	固体和流体中的稳态 温度分布		固体和流体中的瞬态温度热流, 反应堆外壳结构对动荷载作用的 响应,反应堆构件的非稳态温度分 布,反应堆结构的热和粘弹性分析

1. 在结构分析中的应用

有限元用于土木工程已经涉及到土木工程的各个子领域。当然，用得最早的是结构分析。结构应用了有限元分析后，给结构工程带来了深刻的变化。具体说来有以下几个方面：①以前传统方法计算时，对大型、复杂的结构只能作一些简化假定，抓住主要特点进行分析，现在可以根据工程实际情况进行仔细分析；②以前传统的分析主要采用线弹性本构关系，只对简单的板、框架可进行刚塑性极限分析，采用有限元法则可以按实际材料的本构关系进行全过程非线性分析；③以前的结构分析常常用于结构完成后的受力分析，采用有限元法则可以按施工过程进行全过程安全分析，从而安全有效地指导施工。

在平衡问题中，如果是固体力学问题，就要求出稳态的位移分布或应力分布；如果是热传导问题，则需求出温度分布或热流量分布；如果是流体力学问题，则需求出压力分布或速度分布。

在特征值问题中，时间变量将不以显式出现。这类问题可以认为是平衡问题的推广。在这类问题中，除了相应的稳态位形以外，还必须确定某些参数的临界值。在考虑特征值问题时，如果属于固体力学或结构问题，就必须求出固有频率或特征值、振型、屈曲荷载；如果是流体力学问题，则要确定层流的稳定性；如果是电路问题，则要求出谐振特征。

传播或瞬态问题都是和时间有关的问题。例如，当我们研究固体力学领域内物体对随时间而变化的力的作用效应或者热传导场中物体对突然受热或受冷作用效应时，就会出现这类问题。

2. 在岩土工程中的应用

岩土工程处于地下，土的构成复杂，且难于直接观察，而有限元分析则可以把数值结果形象化，把内部结构相互作用过程展示出来，有很大的实用价值。例如，地下工程开挖经常会遇到塌方冒顶，根据地质勘察，我们可以知道断层、裂隙和节理的走向与密度。通过小型试验，可以确定岩石本身的力学性能及岩体夹层和界面的力学特性、强度条件。在此基础上，通过有限元分析可以确定开挖过程中洞室的应力分布，判断洞室是否稳定。在数值模型中，除了有限元方法外，还可以采用离散元法、刚体弹簧元法等。这些数值方法在平衡状态下的性能与有限元相似，而当单元失去平衡时，在外力作用下产生运动直到获得新的平衡为止。在分析地下空间的围岩、边坡稳定等问题时，这些数值方法能够更有效地描述不连续体的大位移和接触问题。

又如地下水的渗流、河道泥沙的沉积、地基沉降等也都开始应用考虑地下水和土体有效应力的流固耦合有限元分析。有限元分析甚至可以模拟由于液体流动

引起的泥沙运动和沉积问题，对港口设计和河道疏通均有指导作用。

3. 在防灾减灾工程中的应用

结构在风灾、爆炸、地震等灾害下的安全问题越来越受到重视。由于灾害原型重复试验几乎是不可能的，因而有限元分析在这一领域的应用也就更有意义。目前已有不少抗灾防灾的模拟仿真软件。对于结构受地震作用、爆炸作用下的破坏过程均可用有限元方法进行全过程分析。

有限元在土木工程中的应用如此广泛和普及，作为土木工程的科技工作者，学一些有限元方法的基本知识是完全必要的。

1.3 有限元软件的发展

有限元的应用离不开计算机软件。开始时，大家都针对具体问题，进行程序编写，后来就有一些通用程序发表。第一个正式命名的线性有限元程序是 SAP (Structural Analysis Program)，是由美国加州 Berkley 大学 Ed Wilson 教授领导编写的。它由我国北京大学袁明武教授引进、改善，并命名为 SAP84。这是我国早期从事有限元的科技人员所熟悉的，对我国的软件开发与应用起了很大的推动作用。

此后，Berkley 大学又对 SAP 进行了深入和完善，并涉及非线性分析和瞬态问题求解，命名为 Non-SAP。

早期引入我国的非线性有限元分析程序是 ADINA，这一程序由 MIT 教授 Jürgen Bathe 研制。

以后，各个国家许多学者纷纷研制并推出了各种有限元计算软件，其功能各有侧重，见表 1-2。

表 1-2 主要有限元程序包的功能

应用范围 程序名称	框架分析	离岸结构	地震分析	面向图形的有限元程序	结构元件与机械零件	结构稳定性	转子轴承系统	气动弹性力学	复合材料	桥梁与桁架系统	薄壳	瞬态分析	结构最优化	粘弹性分析	焊接问题	冲击波传播	船舶结构	管道系统	厚壳	热应力与蠕变	断裂力学	塑性分析	非线性连续介质
	ADINA	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
ANSYS	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
ARGUS									*														
ASAS													*							*	*	*	*
ASEF						*													*				

(续)

应用范围 程序名称	非线性连续介质 塑性分析 断裂力学 热应力与蠕变 厚壳 管道系统 船舶结构 冲击波传播 焊接问题 粘弹性分析 结构最优化 瞬态分析 薄壳 桥梁与桁架系统 复合材料 气动弹性力学 转子、轴承系统 结构稳定性 结构元件与机械零件 面向图形的有限元程序 地震分析 离岸结构 框架分析
ASKA	* * * * *
ASOP	*
BERSAFE	* * * * *
BOSOR	* * *
CADENSE	* *
CHILES	*
DYNAL	* *
ELAS	* *
GIFTS	*
FLUSH	*
MAGIC	* *
MARC	* *
NASTRAN	* * * * * * * * * * * * * * * * *
NEPSAP	* * * * * * * * * * * * *
NONLIN	* * *
NONSAP	* * * * *
PAFEC	* * * * *
PICES	* * * * *
PIPESD	* * *
PIPESTRESS	* * *
SAAS	* * *
SABOR/DRASTIC	* * *
SADSYS	* * *
SAMIS	* * *
SAP	* * * * * * * * * * * * *

(续)

应用范围 程序名称	非线性连续介质 塑性分析 断裂力学 热应力与蠕变 厚壳 管道系统 船舶结构 冲击波传播 焊接问题 粘弹性分析 结构最优化 瞬态分析 薄壳 桥梁与桁架系统 复合材料 气动弹性力学 转子/轴承系统 结构稳定性 结构元件与机械零件 面向图形的有限元程序
SNASOR/DYNAPLAS	* *
STARDYNE	* * *
STRESS	
STRUDL	* * * *
VISCEL	*

作为使用有限元解决各种工程问题的工程技术人员来说，已经有大量的有限元软件可供使用。目前，应用最为广泛的通用的有限元商用软件有 ABAQUS, ADINA, ANSYS, MARC, NASTRAN, SAP 等。

对比国际上的软件水平，我国的软件开发与研制仍有很大的差距。

第 2 章 平面问题的三角形单元

2.1 概述

仿照结构力学中关于位移法的解题过程，使用有限元法分析问题一般包括如下几个步骤。

1) 将结构离散化。所谓离散化，是将所分析的结构分割成有限元单元体，使相邻单元仅在节点处相连接，分析对象由这个单元结合体代替原有结构。如果分析对象是桁架、刚架等杆件结构，一般可取一个杆件作为一个单元，而这类结构的联接点即为节点。如果分析的是二维、三维连续体，那么可根据实际结构的形状、材料组成和计算精度的要求去剖分单元，单元可以是三角形、四边形或四面体、六面体。

2) 单元分析是求得单元节点位移与节点力的关系，计算单元刚度矩阵。在杆件结构中，杆件的节点力与节点位移之间的关系可用结构力学的方法，通过平衡（应力与外力）、协调（位移与变形）和物理（应力与应变）关系求得，例如梁的转角位移方程。将单元节点力与节点位移用矩阵形式表达，即可得到单元刚度矩阵。

在连续体（非杆件）结构中，单元节点力与结构位移之间的关系式（单元刚度矩阵）一般很难直接用结构力学的方法推导出来，而是假设位移插值函数，再用虚功原理来推导。

3) 以节点为隔离体，建立平衡方程。在有限元计算中一般不逐个节点建立平衡方程，而是通过编码法由单元刚度矩阵集合为整体刚度矩阵来完成。

4) 施加荷载（如是非节点荷载可由静力平衡条件转化为节点荷载）。

5) 引入边界条件。未经引入边界条件时，刚度矩阵是奇异的。从力学角度来看，这是由于没有边界约束的结构可以产生刚体位移，因而在一定的荷载作用下无法确定其位移的大小。

6) 求解方程，求得节点位移。

7) 对每一单元循环，由单元节点位移通过单元刚度矩阵求得单元应力或杆件内力。

下面对这几个问题逐一进行说明。