中等農業學校

几何

（試用本）

农作物
土壤肥料　专业适用
果树蔬菜

河南省农林厅教材编辑委員会

河南人民出版社

前　　言

在党的建設社会主义总路綫的光輝照耀下，我省早已出現了工农业生产为中心的全面大跃进的新形势和已經掀起群众性的技术革命和文化革命的高潮，各地均先后开办了农业大学、中等农业技术学校、初級农校以及“紅专”学校。为适应这一新的革命形势的需要，我省农业教育工作必須从教学計划、教学大綱、教学内容、教学組織、教学方法等各方面进行根本的改革，才能保証貫彻实現党的“鼓足干劲、力爭上游、多快好省地建設社会主义的总路綫”，实現勤工俭学、勤俭办学、教育与生产相結合的教育方針。培养出又“紅”又“专”的技术队伍。

为此，我們于今年三月中旬組織了农业技术学校、农林干校的126名教职員分为14个专业小組到71个县（市）178个农业生产合作社、1307个生产单位进行了参观和調查研究工作，总結出349个先进生产經驗和高額丰产典型，收集了3193种参考資料。現已編写出十六种专业教学計划、155种教学大綱和教科書陆續出版，供各地教学試用。由于我們水平不高，时間短，和有关方面研究的不够，难免有不妥之处。望各地在試用中多多提出意見，并可随着农业生产发展的需要加以修改。

河南省农林厅教材編輯委員会

1958年8月26日

目　录

第一編　平面几何部分

第一章　相似形……………………………………………（1）

Ⅰ、比例綫段（1）　Ⅱ、三角形的相似（4）　Ⅲ、多边形的相似（16）

第二章　关于三角形的度量关系……………………………（26）

第三章　正多边形和圓周長的計算…………………………（34）

Ⅰ、正多边形（34）　Ⅱ、园周长的計算（42）

第四章　多边形和园的面积…………………………………（53）

Ⅰ、多边形的面积（53）　Ⅱ、圓的面积（63）

第二編　立体几何部分

第五章　多面体与旋轉体的体积……………………………（70）

Ⅰ、棱柱（70）　Ⅱ、棱錐（78）　Ⅲ、圓柱（82）　Ⅳ、圓錐（83）

附　录：

Ⅰ、平板仪实习作业內容。

Ⅱ、多边形面积圓面积实习作业內容。

Ⅲ、体积实习作业內容。

第一編　平面部分

第一章　相 似 形

I　比例綫段

§1. **兩綫段的比**　两条綫段的比就是用同一个长度单位去量这两条綫段所得的数的比．

例如，用长度单位n去量两条綫段AB和CD，如果所得的数分别为a和b，那末：

$$AB:CD=a:b,\ 或\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}.$$

两綫段的比与长度的单位无关．

例如，用厘米为单位去量綫段 AB 和 CD，所得的数分别为 5 和 4，那末：

$$\frac{AB}{CD}=\frac{5}{4},$$

若取毫米为单位，再去量綫段AB和CD，则所得的数分别为$50=5\times10$，和$40=4\times10$，所以

$$\frac{AB}{CD}=\frac{50}{40}=\frac{5}{4}.$$

如果用CD作为长度单位，那末綫段AB和綫段CD的比，就是表示綫段AB长度的数．

如果两条綫段有公度，则它們的比是一个**有理数**；如果两条

綫段沒有公度，則它們的比是一个**无理数**．

§2. **比例綫段的概念** 如果綫段 a 和 b 的比等于綫段 c 和 d 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，我們就說这四条綫段 a、b、c、d **成比例**．

因为我們把綫段的长度理解为綫段的**量数**，所以綫段的比和由綫段組成的比例，分別具有数的比和由数組成的比例的性質．下面一些性質是我們以后常常要应用到的．

比的性質：

(1) 比的两項同用一不等于零的数乘或除，則它的値不变．

即 $$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}=\frac{a\div m}{b\div m}.$$

(2) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$，

則 $$\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$$ (等比定理)．

比例的性質：

(1) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，　則 $ad=bc$．

(2) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，　則 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 和 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$　(更比定理)．

(3) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，　則 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$　(反比定理)．

如果四个量成比例，我們可以根据更比定理和反比定理，写出八个比例式来．

如 $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$，由更比定理得 $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$，$\frac{6}{3}=\frac{2}{1}$，$\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$．再由反比定理得 $\frac{3}{1}=\frac{6}{2}$，$\frac{2}{1}=\frac{6}{3}$，

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

(4)如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$或$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$(合比定理).

(5)如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$或$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$，(分比定理).

(6)如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.(合分比定理).

例1．某农业社修筑水渠两段，已知这两段水渠长度的比为5：3，这两段的和为4800米，求这两段各长多少米.

解：設两段水渠的长各为a，b．則

$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$，又$a+b=4800$，

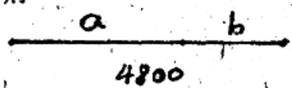

图 1

根据合比定理，得$\frac{a+b}{b}=\frac{5+3}{3}$，

代入得$\frac{4800}{b}=\frac{8}{3}$　$\therefore b=\frac{4800\times 3}{8}=1800$(米).

又因$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$，故$\frac{a+b}{a}=\frac{5+3}{5}$

代入得$\frac{4800}{a}=\frac{8}{5}$　$\therefore a=\frac{4800\times 5}{8}=3000$(米).

答两段水渠长为1800米和3000米.

例2．1958年全国夏收作物总产量为1000亿斤，与1957年夏收作物总产量的比为5：3，問1958年夏收比1957年增加多少亿斤？

解：設以綫段AB表示58年夏收总产量，AC表示57年夏收

总产量，由题意得，

$$\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}$$

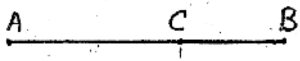

图 2

根据分比定理有

$$\frac{AB-AC}{AB}=\frac{5-3}{5}\text{即}\frac{CB}{AB}=\frac{2}{5}.$$

将 $AB=1000$代入得 $\frac{CB}{1000}=\frac{2}{5}$,

所以 $CB=\frac{2\times1000}{5}=400.$

答58年夏收比57年增产400亿斤.

在比例$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$中，綫段 d 叫做綫段 a、b、c 的**第四比例項**. 如果$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，或 $b^2=ac$，这时綫段 b 叫做綫段 a 和 c 的**比例中項**.

Ⅱ 三角形的相似

§3. **預备概念** 我們在日常生活中，时常見到大小不同而形状相同的图形，例如幻灯片上的图形和銀幕上的图形，原来的照片和放大后的照片，以及用不同的比例尺所繪制的区或乡的平面图等，象这种大小不同而形状相同的图形，通常我們說它們是**相似形**.

§4. **相似三角形的定义**

在两个三角形中，如果各角对应相等，那末一对相等的角的对边就是**对应边**. 例如，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如图 3，如果$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，那末BC和$B'C'$，CA和$C'A'$，AB和$A'B'$就分别是对应边.

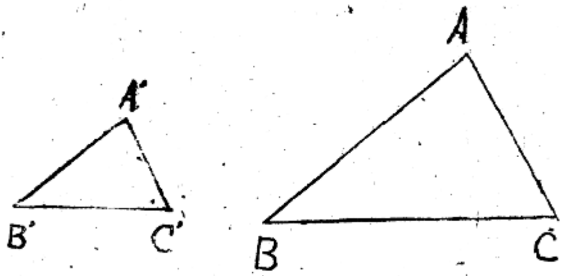

图 3

在两个三角形中，如果(1)对应角相等，并且(2)对应边成比例，那末这两个三角形就叫做**相似三角形**．例如在图3的$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，若(1)$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，并且(2)$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$，那末它們就是相三角形．从相似三角形的定义我們知道，相似三角形的对应边似成比例，且对应角相等．

很明显，如果两个三角形相似，假若和其中的一个全等的三角形則一定也和另一个相似．

相似符号用"∽"来表示，讀做"相似于"．例如$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$，記做$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．

由相似三角形的定义知道要証明两个三角形相似，必須証明两个条件：

(1)它們的各角对应相等；

(2)它們的对应边成比例．

但实际上两个三角形只要滿足某一些条件，我們就能够断定它們相似．

現在来研究两个三角形滿足了那一些条件，就可以断定它們相似．我們先証明下面的定理．

§5. **定理** 平行于三角形的一边而和其他两边相交的直綫，截得的三角形和原三角形相似.

已知：在$\triangle ABC$中，$DE \parallel BC$.

求証：$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

証明：(1)証$\triangle ADE$和$\triangle ABC$的各角对应相等.

在$\triangle ADE$和$\triangle ABC$中，$\angle A=\angle A$，

由平行綫的同位角相等得：

$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，

$\therefore$ $\triangle ADE$和$\triangle ABC$的各角对应相等.

(2)証$\triangle ADE$和$\triangle ABC$的对应边成比例.

分下列两种情形：

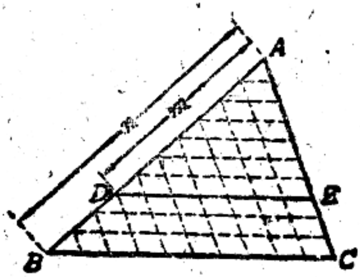

图 4

(i)边 AB 与边 AD 有公度(图4)，首先用它們的一个公度把 AB 分成整数个等分，这时 AD 也被分成整数个等分. 設 AB 含有 n 个这样的等分，AD 含有 m 个这样的等分；那末$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{m}{n}$.

再过 AB 上的各分点分别作平行于 BC 的直綫，这时 AC 被这些平行綫分成 n 个等分，而 AE 被分成 m 个等分；所以$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{m}{n}$.

其次过 AB 上各分点分别作平行于 AC 的直綫，这时 BC 就被这些平行綫分成 n 个等分，而 DE 被分成 m 个等分，所以$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{m}{n}$.

因此 $$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}.$$

(ii) 边 AB 与边 AD 沒有公度如(图 5)。

求 $\frac{AD}{AB}$ 和 $\frac{AE}{AC}$ 的每一个比的近似值精确到 $\frac{1}{10}$、$\frac{1}{100}$、$\frac{1}{1000}$…。

为此，先把 AB 分成 10 等分，并且过各分点分别作平行于 BC 的直綫，这时 AC 也被分成 10 个等分。設 AD 含有 $\frac{1}{10}AB$ 的 m 倍和一段小于 $\frac{1}{10}AB$ 的剩余，这时 AE 也含有 $\frac{1}{10}AC$ 的 m 倍和一段小于 $\frac{1}{10}AC$ 的剩余（如图 5 所示），所以精确到 $\frac{1}{10}$ 时得

$$\frac{AD}{AB}=\frac{m}{10},\quad \frac{AE}{AC}=\frac{m}{10}.$$

其次，把 AB 分成 100 个等分，并且設 AD 含有 $\frac{1}{100}AB$ 的 m' 倍和一段小于 $\frac{1}{100}AB$ 的剩余。再过各分点分別作平行于 BC 的直綫，可以确信 AE 也含有 $\frac{1}{100}AC$ 的 m' 倍和一段小于 $\frac{1}{100}AC$ 的剩余，所以精确到 $\frac{1}{100}$ 时，得

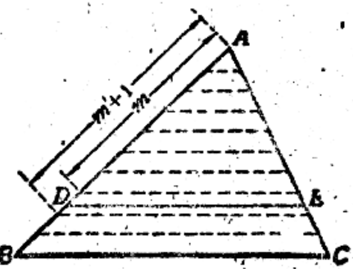

图 5

$$\frac{AD}{AB}=\frac{m'}{100},\quad \frac{AE}{AC}=\frac{m'}{100}.$$

再次把精确度繼續提高到 $\frac{1}{1000}$、$\frac{1}{10000}$、…，可以确信，无論精确到什么程度，只要精确度相同，$\frac{AD}{AB}$ 和 $\frac{AE}{AC}$ 两个比的近似值总是相等的，所以这两个比的正确的比值可以用同一个无限不循环小数来表示。因此：

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$

用相同的方法，过 AB 上各分点分别作平行于 AC 的直綫，可以証明：

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}.$$

所以在 AB 与 AD 无公度的情形下，也得到：

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}.$$

总括起来，不論 AB 与 AD 有沒有公度，都得：

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}.$$

即 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的对应边成比例。

从(1)和(2)可以知道：

$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

推論 平行于三角形一边而和其他两边相交的直綫，分这两边成比例。

§6. 三角形相似的判定定理

定理 1 如果一个三角形的两个角，和另一个三角形的两个角对应相等，那末这两个三角形相似。

已知：在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

求証：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

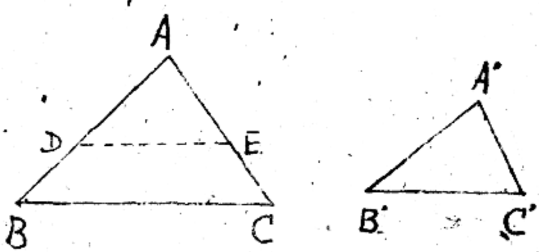

图 6

証明：在 AB 上截取 $AD=A'B'$，过 D 作 $DE /\!/ BC$ 交 AC 于 E.

由上节定理得 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，

已知：$\angle A=\angle A'$，截取 $AD=A'B'$

又因 $\angle ADE$ 与 $\angle B'$ 都等于 $\angle B$，所以 $\angle ADE=\angle B'$，

$\therefore \quad \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

例　某农业社为了开展多种經营，将无用的水坑变作养魚池，今欲测量水坑的长度（水坑两端 AB 的距离），在水坑一边选一点 C，量得 CA 为 60 米，并在 CA 上取一点 D，作 $DE /\!/ AB$，使 C、E、B 三点在一直綫上，并量得 CD 为24米，DE 为32米，求 AB 两点的距离．如图 7．

已知：在 $\triangle ABC$ 中，
$DE /\!/ AB$，$CA=60$米，
$CD=24$米，$DE=32$米。

求解：AB 之长．

解：在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \quad DE /\!/ AB$，

根据§5定理，

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEC$，

因而 $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DC}$，

但　$AC=60$，$DC=24$，$DE=32$，代入上式得

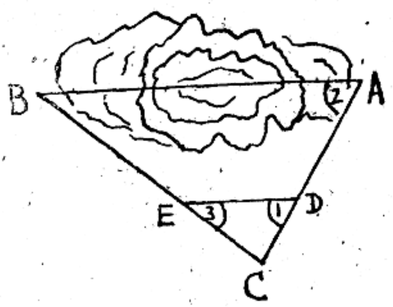

图　7

$$\frac{AB}{32}=\frac{60}{24}, \quad \therefore \quad AB=\frac{60\times 32}{24}=80(\text{米}).$$

答水坑的长度是80米．

定理2· 如果一个三角形的两边和另一个三角形的两边成比例，并且它們所夹的角相等，那末这两个三角形相似。

已知：在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

求証：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

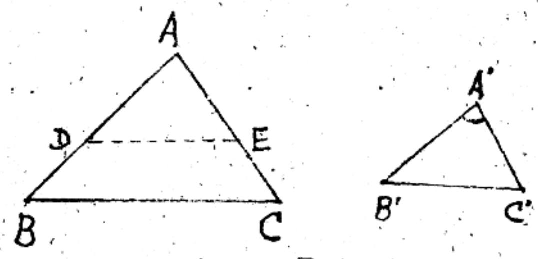

图 8

証明：在 AB 上截取綫段 $AD=A'B'$，且作 $DE /\!/ BC$，交 AC 于 E，則得

$$\triangle ABC \backsim \triangle ADE.$$

由相似三角形对应边成比例知 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

$$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{AE}.$$

$$\because \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'},$$

$$\therefore \frac{AC}{AE}=\frac{AC}{A'C'}.$$

$$AE=A'C'.$$

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，

$AD=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，$AE=A'C'$；

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

例 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，已知$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{4}{3}$，$\angle A=\angle A'$，且$BC=20$公尺，試求$B'C'$的长度。

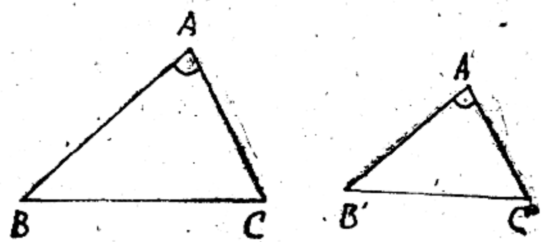

图 9

已知：在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{4}{3}$，$\angle A=A'$，$BC=20$公尺。

求解：$B'C'$的长度。

解：在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，因为

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{4}{3},\ \angle A=\angle A',$$

所以 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

所以 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{4}{3}$.

$BC=20$代入 $\dfrac{20}{B'C'}=\dfrac{4}{3}$.

故得 $B'C'=\dfrac{3\times 20}{4}=15$.

答 $B'C'$ 长15公尺。

定理3 如果一个三角形的三边和另一个三角形的三边对应成比例，那末这两个三角形相似。

已知：在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'},$$

求証：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

証明：在 AB 上截取 $AD=A'B'$，且作 $DE\parallel BC$，交 AC 于 E，那末

$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

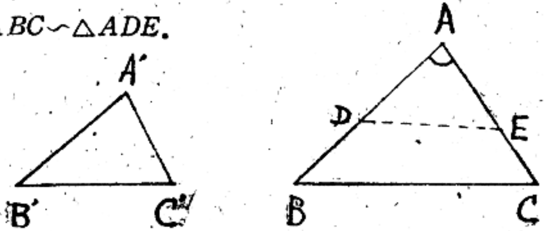

图 10

由相似三角形定义得 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$.

已知 $AD=A'B'$ 所以 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$.

根据題設 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$,

因而 $\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{BC}{B'C'}$, $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AC}{A'C'}$,

所以 $DE=B'C'$, $AE=A'C'$.

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，

$AD=A'B'$, $DE=B'C'$, $AE=A'C'$;

所以 $\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$.

故得 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

§7. 直角三角形相似的判定定理

(1)如果一个直角三角形的一个銳角，等于另一个直角三

角形的一个銳角，那末这两个直角三角形相似．（此定理可由相似三角形的第一个判定定理推出）．

(2)如果一个直角三角形的两直角边和另一个直角三角形的两直角边对应成比例，那末这两个直角三角形相似．（此定理可由相似三角形的第二个判定定理推出）．

(3)如果一个直角三角形的斜边和一直角边与另一个直角三角形的斜边和一直角边对应成比例，那末这两个直角三角形相似．

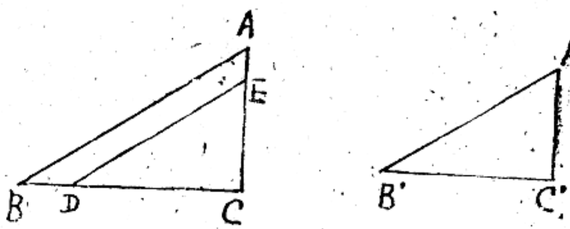

图 11

已知：在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$\angle C$和$\angle C'$是直角，且$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$．

求証：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．

証明：在CB上截取$CD=C'B'$，且作$DE\parallel BA$，交AC于E，那末

$\triangle ABC\backsim\triangle DEC$．

由相似三角形对应边成比例得：

$$\frac{AB}{ED}=\frac{BC}{DC},\text{ 但 } DC=B'C'$$

所以 $\dfrac{AB}{ED}=\dfrac{BC}{B'C'}$，又$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$．

所以 $\frac{AB}{ED}=\frac{AB}{A'B'}$，因而得 $ED=A'B'$.

在直角三角形 EDC 与 $A'B'C'$ 中，

$ED=A'B'$，$DC=B'C'$，

因此 $\triangle EDC\cong\triangle A'B'C'$.

所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

例 为了計算烟囱的高，先在地上立一标杆，測得标杆的长 $a=5.00$ 米，它的影长 $n=8.00$ 米，同时测得烟囱的影长 $m=40.6$ 米，求烟囱的高 h.

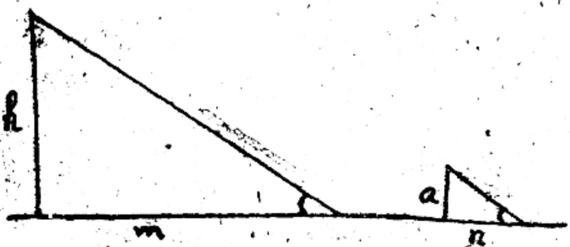

图 12

解：由图 12 知 h 和 m 与 a 和 n 分别为两个直角三角形的二直角边. 因为它們的斜边平行，所以这两条斜边与地面所成的銳角相等. 因而这两个直角三角形相似.

所以 $\frac{h}{a}=\frac{m}{n}$，由 $a=5.00$，$n=8.00$，$m=40.6$ 代入

得 $\frac{h}{5.00}=\frac{40.6}{8.00}$，因而 $h=\frac{40.6\times5.00}{8.00}\approx24.1$

答 烟囱高24.1米.

§8. **定理** 在两个相似三角形中，对应高和对应边成比例.

已知：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$. AD 和 $A'D'$ 是对应边上