小波分析中的框架理论

FRAME THEORY IN WAVELET ANALYSIS

姚喜妍 著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

小波分析中的框架理论

姚喜妍 著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·北　京·
BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

小波分析中的框架理论/姚喜妍著．—北京：中国科学技术出版社，2006．6
ISBN 7－5046－4337－8

Ⅰ．小…　Ⅱ．姚…　Ⅲ．小波分析－理论　Ⅳ．O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 037685 号

责任编辑　程安琦　孙卫华
封面设计　鲁　筱　杨　军
责任校对　林　华
责任印制　安利平

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码：100081
电话：010－62103210　传真：010－62183872
http：//www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京长宁印刷有限公司印刷
*
开本：787 毫米×960 毫米　1/16　印张：11.875　字数：200 千字
2006 年 6 月第 1 版　2006 年 6 月第 1 次印刷　定价：28.00 元

前言

小波分析 (Wavelet Analysis) 是 1986 年以来在 Y. Meyer, S. Mallat 和 I. Daubechies 等众多数学家的奠基工作上而迅速发展起来的一门应用数学学科，也是当前国内外数学家关注和研究的一个热点. 它对当前的理论科学、应用科学，尤其是信息科学产生了重要影响，对非线性科学、智能计算、网络与信息安全研究有很好的推动作用，被誉为学科发展的 Windows 平台，具有牵一发而动全局的影响力，其发展方兴未艾.

Hilbert 空间中的框架理论是研究小波分析的一个重要工具. 它是由 R. J. Duffin 和 A. C. Schaeffer 于 1952 年在非调和 Fourier 级数的研究中提出的. 小波分析中的框架通常是指由 Hilbert 空间中的满足某种特性的一列向量组成的集合. 框架具有正规正交基的一些性质，框架是正规正交基的一般推广. 因此它拥有许多正规正交基所不能拥有的重要性质.

本书共九章. 第一章为预备知识，介绍阅读本书及相关文献所必须具有的最基本知识. 第二章介绍 Hilbert 空间中的框架理论. 第三章讨论 Hilbert 空间中的广义框架理论. 第四章研究 Hilbert 空间中的广义框架的等价性质. 第五章对 Hilbert 空间中的广义框架的扰动性质进行了较好的研究. 第六章介绍 Hilbert 空间中的子空间框架方面的一些结果. 第七章研究特殊类型的广义框架 —— 正规窗口 Fourier 变换和正规积分小波变换. 第八章讨论 Banach 空间中的广义框架和广义 Riesz 基. 第九章研究 Hilbert C^*- 模框架的一些新特征.

本书的初稿得到了陕西师范大学杜鸿科教授和曹怀信教授的认真审查，并提出了宝贵的修改意见，在此一并感谢他们对我的鼓励和支持.

本书作者从事算子理论与小波分析的研究工作，本书中不少内容是作者近几年来的研究成果，还有许多研究工作有待深入. 由于作者水平有限，加之小波分析的新成果不断出现，书中纰漏在所难免，敬请读者不吝指正.

姚喜妍

2005 年 6 月

目　　录

第一章　预备知识

本章介绍了 Banach 空间与 Hilbert 空间理论中某些有关事实， Hilbert 空间中的正交射影，以及小波分析中的框架理论发展史.

§ 1.1　Banach 空间与 Hilbert 空间

首先介绍一下泛函分析的有关概念.

从一个数集 X 到一个数集 Y 的映射 $f: X \to Y$, 我们称 f 是一个函数. 如果 X 不是一个数集，而是一个抽象集合，从数集 X 到数集 Y 的映射 $\phi: X \to Y$, 这样的 ϕ 我们称为一个泛函. 例如 X 表示区间 $[a,b]$ 上可积函数的全体，$f(x) \in X$, 定义 $\phi(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ，这样， ϕ 就是一个函数 $f(x)$ 到一个数 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的映射，即 ϕ 是一个泛函.

若 X, Y 都是抽象集合， A 是从 X 到 Y 的一个映射，称 A 是一个算子.

若 X 是 n 维列向量全体， Y 是 m 维列向量全体， $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in Y$, A 是一个 $m \times n$ 矩阵，线性变换 $y = Ax$, 这时 A 是 $X \to Y$ 的一个算子.

定义 1.1.1　设 X 是一个非空集合， $\mathbf{K}$ 是一个数域，以 x 表示 X 中的元素，在 X 中定义加法和数乘运算如下:

$x + y = y + x$;

$(x + y) + z = x + (y + z)$;

存在零元素 $\theta, x + \theta = x$;

存在 x 的负元素 $-x, x + (-x) = \theta$; $1 \cdot x = x$;

$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{K}$.

这样的集合 X 称数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，又称向量空间，其中的元素也可以称为向量或点.

如 X 是 $m\times n$ 实矩阵全体，按通常的矩阵加法和数乘运算， X 是一个线性空间.

X 是 $[a,b]$ 上连续函数全体，按通常的函数加法和数乘运算， X 也是一个线性空间.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性空间 X 中的元素，由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性组合的全体所成的集合 $\{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i|\lambda_i\in\mathbf{K}\}$，称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的生成空间，记为 $\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 如 X 是三维空间中的向量全体， $X=\{(x,y,z)|x,y,z\in\mathbf{R}\}$,$i=(1,0,0),j=(0,1,0),k=(0,1,0)$, 则 $\mathrm{span}\{i,j,k\}$ 就是 X, 而 $\mathrm{span}\{i,j\}$ 就是 xoy 平面上的向量全体.

设 X,Y 是同一数域上的两个线性空间，则 $X\times Y=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$ 称为 X,Y 的乘积空间. 特别当 $X=Y$ 时， $X\times Y=X^2=\{(x,y)|x,y\in X\}$.

记 $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$ 为实数全体，则 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$ 就是二维实向量空间全体.

n 维实向量空间全体 $\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\ldots\times\mathbf{R}}_{n}$.

定义 1.1.2 设 X 是线性空间， F 是 X 上的一个泛函，记为 $F(x)=\|x\|$, 如果 $\|\cdot\|$ 满足下列三个条件:

(1) $\|x\|\geq 0,\forall x\in X$, 且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=\theta$;

(2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|,\forall x\in X,\lambda$ 为常数;

(3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|,\forall x,y\in X$,

则称这个泛函 $F=\|\cdot\|$ 为 X 上的一个范数. 上述三个条件称范数公理，定义了范数的线性空间称为赋范线性空间.

例 对于 n 维实向量全体 $\mathbf{R}^n,x\in\mathbf{R}^n$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 定义 $\|x\|_2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{R}^n$ 按这个范数 $\|\cdot\|_2$ 构成一个赋范线性空间.

例 $C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上连续函数全体所组成的线性空间， $f(x)\in C[a,b]$, 定义 $\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$, 则 $C[a,b]$ 按范数 $\|\cdot\|_1$ 构成一个赋范线性空间.

若在 $C[a,b]$ 上定义另外一种范数 $\|f\|=\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|$, 则 $C[a,b]$ 按范数 $\|\cdot\|$ 也构成一个赋范线性空间.

例 $[a,b]$ 上 p 次 Lebesgue 可积函数全体

$$\left\{f(x) \mid \int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\right\}$$

记为 $L^p[a,b]$，在 $L^p[a,b]$ 上几乎处处相等的函数视为同一函数，且定义范数为 $\|f\|_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，则 $L^p[a,b]$ 按范数 $\|\cdot\|_{L^p[a,b]}$ 构成一个赋范线性空间.

$L^p(\infty,+\infty)$ 表示 $(\infty,+\infty)$ 上的 p 次 Lebesgue 可积函数全体，在其上定义范数 $\|f\|_{L^p(\infty,+\infty)} = \left(\int_{\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$，则 $L^p(\infty,+\infty)$ 构成一个赋范线性空间，记为 $L^p(\mathbf{R})$ 或简记为 L^p. L^p 空间是一种非常重要的赋范线性空间，特别 $p=2$ 时，L^2 空间是小波分析中使用最多的一种赋范线性空间.

L^p 空间中的两个重要不等式：

1. Hölder 不等式

设 $p>1, q>1$, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, f\in L^p, g\in L^q$, 则 $f\cdot g\in L^1$, 且有 $\|f\cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q}$.

特别当 $p=q=2$ 时, 称为 Cauchy-Schwarz 不等式: $\|f\cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}\cdot\|g\|_{L^2}$.

2. Minkowski 不等式

对于 $p>1$, $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$.

例 设 $x=\{x_n\}$ 是一数列，对于 $p\geq 1$, 记

$$l^p = \left\{x \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\},$$

在 l^p 上定义范数 $\|x\|_{l^p} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, l^p 称为一个赋范线性空间. 上述两个不等式对 l^p 空间同样成立.

定义 1.1.3 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间中的序列, 如果存在一个元素 x, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, 则称序列 x_n 按范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 x.

以后除非特别说明，对于赋范线性空间中的收敛都是指按范数收敛.

定义 1.1.4 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间中的序列，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $m,n>N$ 时，$\|x_m-x_n\|<\varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 是一个基本序列，又称 Cauchy 序列.

如果 X 中的每一个基本序列都收敛于 X 中的元素，则称 X 是完备的，完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

L^p, l^p 都是 Banach 空间.

$C[a,b]$ 关于范数 $\|f\| = \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$ 是 Banach 空间，但关于范数 $\|f\|_1 = \int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 不是 Banach 空间.

由线性代数的基本知识知道，n 维向量空间中任意个线性无关的向量都可以作为基，且基是不唯一的. 现在把基的概念推广到无限维空间.

定义 1.1.5 设 X 是一个 Banach 空间，$\{f_k, k=1,2,\cdots\}$ 是 X 中的一个序列，如果对于任意的 $f\in X$, 存在唯一的数列 $\{c_k\}$, 使得 $f=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_kf_k$, 且级数无条件收敛 (即与项的次序无关), 则称序列 $\{f_k, k=1,2,\cdots\}$ 是 X 的一个无条件基.

与有限维空间不同，无限维的 Banach 空间不一定存在无条件基.

定义 1.1.6 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的一个线性空间，F 是乘积空间 $X\times X$ 上的一个泛函，记为 $F(x,y)=\langle x,y\rangle$, 如果 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足下列条件:

(1) $\langle x,x\rangle\ge 0$, 对任意的 $x\in X$ 成立，且 $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ 这里 $\overline{\langle y,x\rangle}$ 表示 $\langle x,y\rangle$ 的共轭复数;

(3) 对常数 λ_1,λ_2, 有 $\langle\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y\rangle=\lambda_1\langle x_1,y\rangle+\lambda_2\langle x_2,y\rangle$,

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 X 中的内积. 定义了内积的线性空间称为内积空间.

例 在 n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，定义内积 $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$, 则 $\mathbf{R}^n$ 为一个内积空间.

在 n 维复向量空间 $\mathbf{C}^n$ 中，定义内积 $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$, 则 $\mathbf{C}^n$ 为一个内积空间.

例 在 L^2 中，定义内积 $\langle x(t),y(t)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t$, L^2 为一个内积空间.

在 l^2 中，定义内积 $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\overline{y_k}$, l^2 也为一个内积空间. 这里 $x=\{x_k\}, y=\{y_k\}$.

内积满足 Cauchy-Schwarz 不等式: $|\langle x,y\rangle|\le\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$ 对任意内积空间中的元素 x,y 成立.

在内积空间中，定义范数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, 容易验证，$\|\cdot\|$ 满足范数公理. 因此，内积空间按这样的内积导出范数后又成为一个线性赋范空间. 如果内积空间按这样的范数又是完备的，则此内积空间称为 Hilbert 空间.

L^2, l^2 都是 Hilbert 空间.

L^p, l^p 当 $p \neq 2$ 时不能成为 Hilbert 空间.

定义 1.1.7 H 是一个 Hilbert 空间, $\{f_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 H 中的一列元素, 且 $H = \overline{\operatorname{span}\{f_k, k \in \mathbf{Z}\}}$ (这里 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合), 如果对于 H 中的任意元素 f, 存在唯一数列 $c = \{c_k\}$, 使得 $f = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} c_k f_k$, 且存在常数 $B > A > 0$, 使得对任意 l^2 中的数列 $c = \{c_k\}$ 有

$$A\|c\|_{l^2} \leq \|\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k f_k\| \leq B\|c\|_{l^2},$$

则称 $\{f_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 H 的一个 Riesz 基.

这个条件 $A\|c\|_{l^2} \leq \|\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} c_k f_k\| \leq B\|c\|_{l^2}$ 称为 Riesz 条件.

Riesz 基是 Hilbert 空间中的无条件基. 有时 Hilbert 空间中的无条件基也称为 Riesz 基.

定义了内积后, 就可以把 n 维欧氏空间中的一些几何概念推广到内积空间中去.

定义 1.1.8 设 X 是一个内积空间, $x, y \in X$, $\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 称为元素 x 的长度, $\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}}$ 称为元素 x, y 之间的夹角. 如果 $\langle x, x\rangle = 0$, 则称 x 与 y 正交.

设 Y 是内积空间 X 的子集, 如果 Y 中的元素都相互正交, 则称 Y 是一个正交系. 如果 Y 中的所有元素还满足 $\|y\| = 1$, 则称 Y 是一个标准正交系.

设 $\{e_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是内积空间 X 的一个无条件基, 同时 $\{e_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 还是一个标准正交系, 即

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases},$$

则称 $\{e_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 X 的一个标准正交基. 称 δ_{ij} 为克郎内克符号. 对于 X 中的每一个元素都可以唯一地表示为一个级数 $x = \sum\limits_{k\in\mathbf{Z}} c_k e_k$, 对这个级数两边与 e_i 作内积后, 由于 $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, 所以 $c_k = \langle x, e_k\rangle$, 这就是 X 中元素在这组基下的 "坐标".

众所周知, n 维欧氏空间中任何 n 个线性无关的向量都可以成为一组基, $\mathbf{R}^n$ 中的任一向量可以由这组基线性表示, 且表示式唯一. Hilbert 空间中的 Riesz 基就相当于这样的基. 而 $\mathbf{R}^n$ 中特别有用的是标准正交基, $\mathbf{R}^n$ 中的任意

一组基都与标准正交基等价，通过正交规范化方法，可以把任何一组基化为标准正交基. 在 Hilbert 空间中 Riesz 基也与标准正交基等价，一个 Riesz 基也可以通过正交规范化方法成为标准正交基.

定义 1.1.9 设 X 是一个内积空间， M 是 X 的真子集， $x \in X$, 但 $x \notin M$, 如果对于任意的 $y \in M$, 都有 $\langle x, y\rangle = 0$, 则称 x 与 M 正交，记为 $x \perp M$.

又设 M, N 都是 X 的真子集，如果对任意的 $x \in M$, 任意的 $y \in N$, 都有 $\langle x, y\rangle = 0$, 则称 M 与 N 正交，记为 $M \perp N$.

M 是 X 的真子集， X 中所有与 M 正交的元素的集合 $\{x|x \in X, x \perp M\}$ 称为 M 在 X 中的正交补，记为 $M^{\perp}$.

显然， $M \perp M^{\perp}$, 且 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, $M \cup M^{\perp} = X$.

内积空间中的元素 x, y 正交的充分必要条件是 “勾股定理” 成立. 即

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

因为 $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle \Leftrightarrow \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = 0$.

一个内积空间 X, 可以分解为它的一些子空间的并： $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n, X_i \subset X, i = 1, 2, \cdots n$. 有时也记为 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. 如果子空间之间还满足：当 $i \neq j$ 时， $X_i \cap X_j = \{0\}$, 这时 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ 称 X 分解为子空间的直和，记为 $X = X_1 \dot{+} X_2 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$. 如果这些子空间之间还是两两正交的：即当 $i \neq j$ 时， $X_i \perp X_j$, 这样的和称为正交和，记为 $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$.

把一个内积空间分解为若干个子空间的正交和，就相当于在这个空间中建立了一个“直角坐标系”，这样的内积空间中的任何一个元素 x 都可以“投影”到这些子空间上去， x 就可以有 “分量表示式”， $x = x_1 + x_2 + \cdots x_n, x_i \in X_i, i = 1, 2, \cdots, n$. 这就如同三维空间中的任意向量 x 可以投影到 x, y, z 三条坐标轴上， $x = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)$. 如果 $Y_i = \{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots, y_{k_i}^{(i)}\}$ 是子空间 X_i 的标准正交基， $i = 1, 2, \cdots, n$, 则把这些标准正交基并起来 $\{y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \cdots, y_{k_1}^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \cdots, y_{k_2}^{(2)}, \cdots, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \cdots, y_{k_n}^{(n)}\}$ 就成为 X 的标准正交基.

无限维的 Hilbert 空间与 n 维欧氏空间有很多类似之处， n 维欧氏空间的很多性质可以推广到无限维的 Hilbert 空间上去.

设 $\{e_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一个标准正交基，则下列陈述等价：

(1) 对所有 $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} |\langle x, e_k\rangle|^2$; (并称之为 Plancherel 公式)

(2) $x=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}\langle x,e_k\rangle e_k,\forall x\in H.$

在这种情况下，$\langle x,e_k\rangle$ 称为 x 关于 $\{e_k,k\in\mathbf{Z}\}$ 的系数，并且系数 $\{e_k,k\in\mathbf{Z}\}$ 是唯一的.

定义 1.1.10 设 H,K 是 Hilbert 空间，令 $T:H\to K$，则有下列性质:

(1) 对任意数 a,b 及所有 $x,y\in H$，若 $T(ax+by)=aT(x)+bT(y)$，则 T 是线性算子;

(2) 对所有 $x\neq y$，若 $Tx\neq Ty$，则 T 是单射;

(3) T 的值域 $R(T)=\{Tx,x\in H\}$， T 的核 $N(T)=\{x:Tx=0\}$;

(4) 若 $R(T)=K$，则 T 是满射;

(5) T 的范数 $\|T\|=\sup\limits_{0\neq x\in H}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|.$

若 $\|T\|<\infty$，则 T 是有界的. T 是有界的当且仅当 T 是连续的.

以下假设 T 是有界算子:

(6) T 的伴随算子 $T^*:K\to H$ 满足 $\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$, $\forall x\in H,y\in K$. 容易证明 $\|T\|=\|T^*\|$;

(7) 若 $\|Tx\|=\|x\|$，则 T 是等距算子;

(8) 若 T 是可逆的等距算子，则 T 是酉算子;

(9) 若 $T=T^*$，则 T 是自伴算子. 也就是说，$\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle$, $\forall x,y\in H$;

(10) 若 $\langle Tx,x\rangle\geq 0$, $\forall x\in H$，则 T 是正算子，记为 $T\geq 0$;

(11) 设 $\lambda\in\mathbf{C}$, I 是 H 上的单位算子.

若 $\lambda I-T$ 在 H 上是不可逆算子，则称 λ 为 T 的谱点，全体谱点，记为 $\sigma(T)$, 称为 T 的谱集，简称 T 的谱; 若存在 $x_0\in H,x_0\neq 0,Tx_0=\lambda x_0$, 则称 λ 为 T 的点谱，全体点谱，记为 $\sigma_p(T)$;

(12) 若 $\|T\|\leq 1$, 则 T 是压缩算子.

为了方便起见, 在本文中, 设 H,K 表示 Hilbert 空间, 用 $B(H,K)$ 表示从 H 到 K 的有界线性算子全体所组成的集合，特别若 $H=K$, 则 $B(H,K)=B(H)$.

定义 1.1.11 设 $T\in B(H)$, $\{e_n:n\in\mathbf{N}\}$ 是 H 中的一组正规正交基，定义

$$\|T\|_2=\left(\sum_{n\in\mathbf{N}}\|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $\|T\|_2<\infty$, 则称 T 是 Hilbert-Schmidt 算子. 这时 $\|T\|_2$ 称为 Hilbert-Schmidt 范数，且 $\|T\|_2$ 与 H 中正规正交基 $\{e_n:n\in\mathbf{N}\}$ 的选取无关.

定义 1.1.12 设 $T \in B(H)$, $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是 H 中的一组正规正交基，定义

$$\|T\|_1 = \sum_{n \in \mathbf{N}} \langle |T|(e_n), e_n \rangle.$$

若 $\|T\|_1 < \infty$, 则称 T 是迹类 (trace-class) 算子．这时 $\|T\|_1$ 称为迹类范数，且 $\|T\|_1$ 与 H 中正规正交基 $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ 的选取无关． T 的迹为

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \langle T(e_n), e_n \rangle.$$

引理 1.1.13 设 U_1, U_2 是 Hilbert 空间 H 上的两个 Hilbert-Schmidit 算子，$\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是 H 中的一组正规正交基, 令 $V = U_1^* U_2$, 则 $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}} |\langle V e_n, e_n \rangle| < +\infty$, 且

$$\mathrm{tr}(V) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \langle V e_n, e_n \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|U_2 + i^k U_1\|_2^2.$$

定理 1.1.14 设 $U, V \in B(H)$, 若 U, V 满足下列条件之一,

(1) U, V 是 Hilbert 空间 H 上的两个 Hilbert-Schmidit 算子,

(2) V 是迹类算子，则 $\mathrm{tr} UV = \mathrm{tr} VU$.

证明 (1) 由引理 1.1.13 得

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(UV) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|V + i^k U^*\|_2^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|(V + i^k U^*)^*\|_2^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|U + i^k V^*\|_2^2 \\ &= \mathrm{tr}(VU). \end{aligned}$$

(2) 设 $V = U_1 U_2$, U_1, U_2 是 H 上的 Hilbert-Schmidit 算子，于是

$$\mathrm{tr}(UV) = \mathrm{tr}((UU_1)U_2) = \mathrm{tr}(U_2(UU_1)) = \mathrm{tr}(U_1(U_2 U)) = \mathrm{tr}(VU).$$

定理 1.1.15 设 U 是 Hilbert 空间 H 上正的迹类算子， V 是 H 上的有界线性算子，则 $\mathrm{tr} : U \mapsto \mathrm{tr}(U)$ 是有界线性算子，且

$$|\mathrm{tr}(VU)| \le \|V\| \mathrm{tr}(U).$$

证明 显然，tr 是 H 上有界线性算子. 设 $U = W|U|$ 是算子 U 的极分解表示，$\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ 是 H 中的一组正规正交基，则有

$$\begin{aligned}
|\mathrm{tr}(VU)| &= |\sum_{n\in\mathbf{N}} \langle VUe_n, e_n\rangle| \\
&= |\sum_{n\in\mathbf{N}} \langle |U|^{\frac{1}{2}}e_n, |U|^{\frac{1}{2}}W^*V^*e_n\rangle| \\
&\le \sum_{n\in\mathbf{N}} \||U|^{\frac{1}{2}}e_n\|\||U|^{\frac{1}{2}}W^*V^*e_n\| \\
&\le (\sum_{n\in\mathbf{N}} \||U|^{\frac{1}{2}}e_n\|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{n\in\mathbf{N}} \||U|^{\frac{1}{2}}W^*V^*e_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|U\|_1^{\frac{1}{2}}\||U|^{\frac{1}{2}}\|W^*V^*\|_2 \\
&\le \|U\|_1^{\frac{1}{2}}\||U|^{\frac{1}{2}}\|_2\|V\| \\
&= \mathrm{tr}(U)\|V\|.
\end{aligned}$$

因此，$|\mathrm{tr}(VU)| \le \|V\|\mathrm{tr}(U)$.

§ 1.2 Hilbert 空间中的正交射影

本节介绍 Hilbert 空间中的正交射影概念.

一般 Banach 空间 X 中都可定义射影，它被定义为幂等的有界线性算子 P，幂等的意思是 $P^2 = P$. 每个射影 P 与 X 的一对闭线性子空间 M, N 一一对应，它们使得 $X = M \oplus N$, M 是 P 的值域，N 是 P 的零空间. 这里 $\oplus$ 是空间直和，即 $M \cap N = \{0\}$, 且 M, N 张成 X . 在这种对应下，当 z 有分解式 $z = x + y$ 时，$Pz = x$. 既然 z 的分解可以改写为 $z = Pz + (z - Pz)$, 在 Hilbert 空间情形就更多地考虑正交射影，即使 $H = M \oplus N$ 是正交直和情形的射影，此时 M, N 互为正交补.

命题 1.2.1 设 P 是 Hilbert 空间 H 中的一个射影，则 P 是正交射影当且仅当 $P^* = P$, 其中 P^* 是 P 的伴随算子.

证明 已知每个 $z \in H$ 可唯一表示为 $z = x + y, x \in M, y \in N$, 其中 M 是 P 的值域，N 是 P 的零空间. 设 P 是正交射影，则 $x \perp y$, 这样

$$\langle P^*z, z\rangle = \langle z, Pz\rangle = \langle x + y, x\rangle = \langle x, x\rangle = \langle x, x + y\rangle = \langle Pz, z\rangle.$$

这推出 $P^* = P$. 现设 $P^* = P$. 要证 $M \perp N$. 设 $x \in M, y \in N$, 有

$$\langle x, y \rangle = \langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0.$$

证毕.

Hilbert 空间中的射影一般指正交射影. 按上述命题, 正交射影是满足

$$P^2 = P, \quad P^* = P \tag{1.2.1}$$

的线性算子. 注意, 满足 (1.2.1) 式线性算子的有界性是自动满足的. 这是因为

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle Px, x \rangle \le \|Px\| \|x\|,$$

$$\|Px\| \le \|x\|, \ \forall x \in H,$$

这推出 $\|P\| \le 1$(事实上 $\|P\| = 1$) .

命题 1.2.2 每个射影算子 P 由唯一一个闭线性子空间 M 如下定义

$$Pz = x, \text{其中 } z \text{ 有分解式 } z = x + y, \ x \in M, \ y \in M^{\perp}. \tag{1.2.2}$$

Pz 是 M 中离 z 最近的元素. 此外 P 是压缩算子. 并且 P 是到闭线性子空间 M 上的射影当且仅当 $I - P$ 是到 $M^{\perp}$ 上的射影. 最后, P 与 $I - P$ 都是正算子, 从而

$$0 \le P \le I. \tag{1.2.3}$$

证明 已给闭线性子空间 M, 则 $H = M \oplus M^{\perp}$ 是正交直和分解, 按 (1.2.2) 式定义的算子 P 显然满足 $P^2 = P$, 以及对任意 $z_1, z_2 \in H, z_i = x_i + y_i, i = 1, 2$ 有

$$\langle Pz_1, z_2 \rangle = \langle x_1, x_2 + y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1 + y_1, x_2 \rangle = \langle z_1, Pz_2 \rangle,$$

这推出 $P^* = P$. 故 P 是正交射影算子. 反之, 给定射影算子 P, 令 $M = \{Pz : z \in H\}$, 则因任意 $z \in H$ 的分解是

$$z = Pz + (z - Pz),$$

说明 P 由 (1.2.2) 式被 P 的值域 M 定义. P 的几何解释, 以及压缩性, $P, I - P$ 同时为射影算子等性质都是 (1.2.2) 式的直接结果. 又因

$$\langle Pz, z \rangle = \langle P^2 z, z \rangle = \langle Pz, Pz \rangle = \|Pz\|^2 \ge 0,$$

所以 P 是正算子. 既然 $I-P$ 也是射影算子, 故 $I-P\geq 0$, 即 $P\leq I$. 这就证明了 (1.2.3) 式. 命题证毕.

命题 1.2.3 设 P,Q 分别是闭线性子空间 M,N 上的射影算子, 则

$$M\perp N\Leftrightarrow PQ=0\Leftrightarrow QP=0. \tag{1.2.4}$$

证明 显然第二个等价性成立. 以下证明第一个等价性. 设 $M\perp N$, 则 $N\subset M^{\perp}$. 故对任意 $z\in H$, 由于 $Qz\in N$, 故 $PQz=0$, 即 $PQ=0$. 设 $PQ=0$, 对每个 $z\in N$, 有 $Pz=PQz=0$, 说明 $N\subset M^{\perp}$, 故 $M\perp N$. 命题得证.

命题 1.2.4 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 分别是到闭线性子空间 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 上的射影, 则 $P=P_1+P_2+\cdots+P_n$ 是一个射影当且仅当 $\{P_i\}$ 两两正交, 即 $P_iP_j=0,i\neq j$. 且此时 P 是到 $M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n$ 上的射影.

证明 P 的自伴性是显然的, 只看幂等性. 两两正交性推出幂等性是显然的. 现设 P 是幂等的, 要证 M_i 与所有 $M_j,j\neq i$, 正交. 设 $z\in M_i$, 则

$$\begin{aligned}
&\|z\|^2=\|P_iz\|^2\\
\leq\ & \sum_{j=1}^{n}\|P_jz\|^2=\sum_{j=1}^{n}\langle P_jz,z\rangle\\
=\ & \langle Pz,z\rangle=\|Pz\|^2\leq\|z\|^2.
\end{aligned}$$

这说明所有 $\|P_jz\|=0,j\neq i$, 即 $M_i\subset M_j^{\perp},M_i\perp M_j$ 得证. 这等价于 $P_iP_j=0,i\neq j$. 现证命题的最后断言. 设 $z\in M$, 则 $z=z_1+z_2+\cdots+z_n$, 有

$$\begin{aligned}
Pz &= Pz_1+Pz_2+\cdots+Pz_n=P_1z_1+P_2z_2+\cdots+P_nz_n\\
&= z_1+z_2+\cdots+z_n=z.
\end{aligned}$$

这说明 M 包含于 P 的值域. 反之 $Pz=P_1z_1+P_2z_2+\cdots+P_nz_n\in M,\forall z\in H$. 这证明了 M 就是 P 的值域. 命题得证.

注 1.2.5 设 P,Q 分别是 M,N 上的射影, 则下列结论成立:

(1) PQ 是射影当且仅当 $PQ=QP$, 且此时 PQ 是到 $M\cap N$ 上的射影;

(2) 下列陈述等价.

(a) $P\leq Q$;

(b) $\|Pz\|\leq\|Qz\|,\forall z\in H$;

(c) $M\subset N$;