全国特级教师联合编写
Quan Guo Te Ji Jiao Shi Lian He Bian Xie

丛书主编 马[illegible]

动态新课堂

DONGTAIXINKETANG

学生用书

全面解读 优化训练

开心一读 预习一测 合作一议 课内一练 课外一试 高考一链 视野一阅 答案一览

数学

【必修1】

依据现行《新课标》《考试大纲》编写

内蒙古人民出版社

动态新课堂

数学

马建明 编著

内蒙古人民出版社

动态新课堂

马建明　编著

*

内蒙古人民出版社出版发行

（呼和浩特市新城区新华大街祥泰大厦）

淄博北斗星印务有限公司印刷

开本:880×1230　1/16　印张:60　字数:960千

2006年6月第1版　2006年6月第1次印刷

印数:1—5000册

ISBN 7－204－08295－8/G·2076　定价:90.00(全五册)

目录

contents

你每一天的快乐牵动我们的心!

——动态新课堂编辑组

快乐总动员

警犬巴比立了一功！一个罪犯提着炸药刚上车，就被巴比发现了。卜克先生早就得到情报，一旦事败，将由这个罪犯的同伙发出救援电码，以便派别的罪犯继续作案。

已经知道，密电码将从这节车厢发出。但是，怎样发出，还不清楚。

罗波特小姐是个破译专家，她看到一个商人在用计算机，上面显示的数字是“601－105”，她马上看出，这就是密电码。

经审问，果然商人是罪犯的同伙。

那么，你明白这个密码是什么意思吗？

答案就在本书中

第一章 集 合

课标导学

目标一订

知识和技能目标

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念，了解空集和全集的意义.

2. 了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并能用它们正确表示一些简单的集合.

过程与方法目标

1. 通过实例，体会元素与集合的"属于"关系，从观察分析集合中的元素入手，正确地表示集合.

2. 经历并体验使用最基本的集合语言表示有关的数学对象的过程与方法，发展运用数学语言进行交流的能力.

情感、态度与价值观目标

1. 通过大量实例，感受集合语言在描述客观现实和数学问题中的意义.

2. 探索利用直观图示理解抽象概念，体会"数形结合"的思想.

3. 在运用集合语言的过程中，逐步养成实事求是、扎实严谨的科学态度，学习用数学的思维方式解决问题、认识世界.

4. 通过学习，初步了解数学科学与人类社会发展之间的相互作用，体会数学的科学价值、应用价值、人文价值和美学价值.

5. 通过实习作业培养学生独立思考、合作学习的意识.

内容一瞥

集合论是德国数学家康托在 19 世纪末创立的，集合是现代数学的基础，集合语言更是现代数学的基本语言. 使用集合语言，可以简洁、准确地表达数学的一些内容，高中数学课程中集合知识最为重要的一点就是将集合作为一种语言来学习，要求学习者学会使用最基本的数学语言表示有关数学对象，并以此发展运用数学语言进行交流的能力.

本章主要讲述集合的初步知识，包括集合的有关概念、集合的表示方法、集合间的关系及集合运算. 集合的初步知识与其他内容有着密切的联系，它是学习、掌握和使用数学语言的基础，是进一步学习高中数学不可缺少的知识. 同时运用集合的方式与方法处理问题成为解决数学问题的一种数学思想. 学好这一章，必将提高运用数学语言理解、表达和处理问题的能力.

学法一导

1. 集合是一个不加定义的概念，学习中应结合自己的生活经验和已有的数学知识，通过列举丰富的实例，理解集合的含义. 学习集合语言的最好方法是运用，在学习中，要养成运用集合语言进行表达和交流的习惯，以使自己在实际运用中逐渐熟悉自然语言、集合语言、图形语言各自的特点，进行相互转换并掌握集合语言. 在关于集合之间的关系和运算的学习中，使用 Venn 图是重要的，Venn 图有助于自己学习、掌握、运用集合语言和其他数学语言.

2. 本章概念较多，知识抽象，如子集、交集、并集、补集、空集等的概念均是用"元素"来定义的，因此抓住"元素"是理解与使用这些概念的关键. 在学习过程中要注意多从实例入手，领会概念的形成背景，加深对概念的理解，同时要注意采用对比学习的方法，深化概念的异同，要注重数形结合思想与分类讨论思想的运用，特别是 Venn 图的使用，帮助我们正确理解、分析问题.

3. 集合语言形成建立在对现实问题的抽象基础之上，同时在实际运用过程中，逐渐熟悉自然语言、集合语言、图形语言各自的特点，并在各种语言相互间转化的过程中准确地掌握集合语言. 注重集合语言与其他数学语言的相互联系，并养成将集合语言渗透到整个数学学习过程中的习惯. 提高数学语言的运用能力，促进对数学概念的理解与运用，提高数学综合素质.

1.1 集合与集合的表示方法

第一课时 集合的概念

开心一读

班主任如果要求你把所在班级中所有穿着漂亮的同学找出来,你能做到吗?

如果要求你把班级中的所有女同学找出来,你能做到吗?

这两个问题中,前者必定为难你,由于穿着漂亮的同学没有明确的界定,你是不是很难确定哪一位同学是你要找的对象?而后者几乎是一个让你不用费心的事了.你知道这是为什么吗?

作为有某些对象形成的一个确定的整体,必须有明确的界定.也就是,对于给定的任何一个对象都能够明确地断定是否属于这个整体.这类问题的自我举例,可以加强对整体中对象的确定性的认识.这是将要学习本节内容的基础.

预习一测

1. 一般地,把一些能够确定的不同的对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的______(或______).构成集合的每个对象叫做这个集合的______(或______).
2. 集合通常用英语______来表示,它们的元素通常用英语______来表示.
3. 如果a是集合A的元素,就说a______A,记作a______A,读作"a______A".如果a不是集合A的元素,就说a______A,记作a______A,读作"a______A".
4. 一般地,我们把不含任何元素的集合叫做______,记作______.
5. 实数集、有理数集、整数集、非负整数集、正整数集分别用____、____、____、____、____或____来表示.

自主一学

探究点1 集合的概念

集合的概念是一个原始概念,它和平面几何中的点、线一样都是不加定义的.这类概念并不是说不用理解,死记硬套就可以了,而是这类概念需要在人们实践中自然形成,并加归纳才能建立起来.

例1 下列给出的对象中,能构成集合的是 ( )

A. 高个子人　　B. 很大的数

C. 聪明的人　　D. 小于3的实数

【答案】D

【分析】这类问题主要考查集合元素的确定性,也就是对集合概念的理解.在解决这类问题时注意对概念的对照.

【解析】在A,B,C所描述的三类事物中,给出各类事物中的任何一个个体,都不可能确定它是否属于这类事物,违背集合中元素的确定性.因此A,B,C所描述的事物都不能构成集合.

点评:(1)读者可以通过这类问题的自我举例,加强对集合概念的理解.这是学习集合内容的基础.

(2)只有用来确定某一个元素是否是该集合的元素之标准是明确的,集合中的元素才是确定的.

对应训练1

下列各项中可以构成集合的是 ( )

A. 与0相差很小的数　　B. 某校高三·五班全体学生

C. 老人　　D. 学习好的学生

探究点2 元素与集合间的关系

对于集合A和某一个元素x,有一个明确的判断标准,即$x\in A$,还是$x\notin A$,两者必居其一,且仅居其一.

例2 若M是由1和3两个数构成的集合,则下列表示方法正确的是 ( )

A. $3\notin M$　　B. $1\notin M$

C. $1\in M$　　D. $1\in M$且$3\notin M$

【答案】C

【解析】注意集合与元素的关系，正确的使用符号"$\in$"与"$\notin$".

对应训练 2

若 $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$，下面结论不一定正确的是 ( )

A. $a+b\in\mathbf{R}$　　B. $a-b\in\mathbf{R}$

C. $ab\in\mathbf{R}$　　D. $\sqrt{ab}\in\mathbf{R}$

探究点 3 集合中元素的性质

(1) 确定性

作为一个集合的元素，必须是确定的. 这就是说不能确定的对象就不能构成集合. 也就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就确定了.

集合与元素的关系有两方面的含义：一方面凡具有(符合)公共属性(条件)的对象都是它的元素，另一方面凡它的元素都具有(符合)公共属性(条件).

(2) 互异性

对于一个给定的集合，它的任何两个元素都是不同的，即集合中的相同元素只能算作一个. 也可以说集合中的任何一个元素都有区别于其他元素的个性.

(3) 无序性

集合与其中元素的排列次序无关.

例 3 判断下列命题是否正确，并说明理由.

(1) $1, 1.5, \frac{1}{2}, \frac{6}{4}, \left|-\frac{1}{2}\right|$ 这些数组成的集合有 5 个元素；

(2) 高一(3) 班的同学某次排桌前和排桌后是同一个集合.

【解析】集合中的元素具有三大特性，即确定性、互异性、无序性. 这是判断此类命题正确与否的基本依据.

(1) 由于 $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ 及 $\frac{6}{4}=1.5$，$\therefore 1, 1.5, \frac{1}{2}, \frac{6}{4}, \left|-\frac{1}{2}\right|$ 这些数组成的集合有 3 个元素.

(2) 高一(3) 班的同学某次排桌前和排桌后的元素相同，$\therefore$ 二者是同一个集合.

对应训练 3

下列给出的对象中，能否构成集合?

(1) 电脑中储存的信息；

(2) 无限接近零的数；

(3) 密封容器里的水分子.

探究点 4 集合的分类

集合可根据它含有的元素的个数分为两类：含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集.

例 4 指出下列集合哪个是有限集，哪个是无限集?

(1)"所有直角三角形" 构成的集合 A；

(2)"所有的中国公民" 构成的集合 B.

【解析】尽管 A 中的元素有明确的界定，但它的元素个数是无限多个. 而 B 中的元素很多，但 B 中的元素是可数的，即 B 中有有限个元素. 因此：

(1) A 是无限集；

(2) B 是有限集.

对应训练 4

集合 M 是由"一条边长为 1，一个内角为 40° 的等腰三角形" 构成的集合，则 M 中的元素的个数为 ( )

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 无数个

探究点 5 空集

"空集" 是一个实实在在的集合，不是想象出来的. 如"方程 $x^2+1=0$ 的实数解" 构成的集合，只不过此集合中无任何元素，故此集合为空集. 再如"中国 2005CBA 联赛中的外星球队员" 也是一个空集.

例 5 下列表述正确的是 ( )

A. $0=\varnothing$　　B. $0\in\varnothing$

C. $\varnothing\in 0$　　D. $0\notin\varnothing$

【答案】D

【解析】A. 0 是一个元素，与集合不能相等；B. 空集 $\varnothing$ 中不含有任何元素，0 也不是空集中的元素；C. $\varnothing$ 是一个集合而 0 是一个元素，不能使用"$\in$"；D. 显然正确.

对应训练 5

已知命题："非空集合 M 中的元素都是集合 P 中的元素" 是假命题，那么命题：

①M 中的元素都不是 P 的元素；

②M 中有不属于 P 的元素；

③M 中有属于 P 的元素；

④M 中元素不都是 P 中的元素.

其中真命题的个数有 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

探究点 6 常见的数集

实数集、有理数集、整数集、非负整数集、正整数集分别用 $\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$ 来表示.

例 6 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) $\sin 90°$ ________ $\mathbf{N}$；

(2) $\cos 30°$ ________ $\mathbf{Q}$.

【答案】(1) $\in$；(2) $\notin$

【解析】(1) $\sin 90°=1$，而 $\mathbf{N}$ 表示非负整数集，即 $1\in\mathbf{N}$，

$\therefore \sin 90° \in \mathbf{N}$.

(2)$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 是无理数，而 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，

$\therefore \cos 30° \notin \mathbf{Q}$.

对应训练 6

若 $a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}$，那么下列运算结果与 $\mathbf{Q}$ 具有怎样的关系？

(1)$a+b$；(2)$a-b$；(3)ab；(4) $\sqrt{ab}$.

合作一议

问题 1 做一做，看看失误在何处？经过同学间的相互讨论，找出出错原因，并探索应对方法.

由“$2, a, b$”三个元素构成的集合与由“$2a, 2, b^2$”构成的集合表示的是同一个集合，求 a, b 值.

【分析】根据两个集合是同一个集合，可利用集合中元素的特性求解.

【解析】解法一：根据集合中元素的互异性，有

$\begin{cases} a = 2a, \\ b = b^2. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = b^2, \\ b = 2a. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 0, \\ b = 1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 0, \\ b = 0. \end{cases}$ 或

$\begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$ 再根据集合中元素的互异性，

得 $\begin{cases} a = 0, \\ b = 1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$

解法二：$\because$ 两个集合相同，则其中的对应元素相同，

$\therefore \begin{cases} a + b = 2a + b^2, \\ a \times b = 2a \times b^2. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a + b(b-1) = 0, & ① \\ ab(2b-1) = 0. & ② \end{cases}$

$\because$ 集合中元素互异，$\therefore a, b$ 不同时为零. 当 $b \neq 0$ 时，由②得 $a = 0$，或 $b = \frac{1}{2}$；当 $a = 0$ 时，由①得 $b = 1$，或 $b = 0$(舍)；当 $b = \frac{1}{2}$ 时，由①得 $a = \frac{1}{4}$. $\therefore a, b$ 的值为

$\begin{cases} a = 0, \\ b = 1. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$

点评：在解答时，如果不注意集合中元素的互异性，可得方程组有三组不同的解，从而得到 a, b 的三组值. 故对于此类问题，我们常常需要代入检验.

问题 2 大家都来做，看谁有发现.

已知数集 A 满足条件：若 $a \in A$，则 $\frac{1}{1-a} \in A\ (a \neq 1)$.

(1) 若 $2 \in A$，试求出 A 中其他所有元素；

(2) 自己设计一个数属于 A，再求出 A 中其他所有元素；

(3) 从(1)(2)中你能发现什么规律，并论证你的发现.

【解析】(1)$2 \in A$，则 $\frac{1}{1-a} = -1 \in A$，

$\because -1 \in A$，则 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$，

$\because \frac{1}{2} \in A$，则 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A$.

$\therefore A$ 中其他元素为 $-1, \frac{1}{2}$.

(2) 可根据自己所选的数去重复(1)中的过程.

(3) 观察(1)(2)不难发现：A 是由“$a, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}$”三个元素构成的集合，并且 $a \times \frac{1}{1-a} \times \frac{a-1}{a} = -1$.

证明：设 $a \in A$，则 $\frac{1}{1-a} \in A$，

$\because \frac{1}{1-a} \in A$，则 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{a-1}{a} \in A$，

$\because \frac{a-1}{a} \in A$，则 $\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}} = a \in A$.

$\therefore A$ 是由“$a, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}$”三个元素构成的集合，

并且 $a \times \frac{1}{1-a} \times \frac{a-1}{a} = -1$.

即这三个元素的乘积恒为 -1.

点评：通过讨论，体会分析问题、发现问题、解决问题的过程与乐趣.

课内一练

基础题

1. 下列给出的对象中，能构成集合的是 ( )

A. 鲜艳的颜色　　B. 视力差的同学

C. 矮个子的人　　D. 2006 年某校的毕业生

2. 不能形成集合的是 ( )

A. 正三角形的全体

B.《数学必修 1》中所有习题

C.《数学必修 1》中所有难题

D. 所有无理数

3. 设集合 A 是由一个元素 a 构成的单元素集合,集合 B 是由 a,b 两个元素构成的集合,下列四个关系中,正确的是 ( )

A. $\varnothing \in A$　　B. $a \notin A$

C. $A \in B$　　D. $a \in B$

4. 给出下列关系 ① $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$,② $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$,③ $|-3| \notin \mathbf{N}$,④ $|-\sqrt{3}| \in \mathbf{Q}$,其中正确的个数为 ( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

前沿题

5. 方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集中,有_______个元素.

6. 设集合 M 是由"$1,2,x^2$"三个元素构成的集合,若 $3\in M$,则 $x=$_______.

7. 已知集合 A 是由"$a-3,2a-1,a^2+1$"三个实数构成的集合,$-3\in A$,求 a 的值,并写出集合 A 的所有元素.

8. 由实数 $a,-a,|a|,\sqrt{a^2},\sqrt[3]{a^3}$ 所组成的集合,最多有多少个元素?

课外一试

能力题

1. 设 a,b,c 为非零实数,则 $y=\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的所有值组成的集合中元素的个数为 ( )

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

2. 下面有四个命题:

① 集合 $\mathbf{N}$ 中最小的元素是 1;

② 若 $-a\in\mathbf{N}$,则 $a\in\mathbf{N}$;

③ 若 $a\in\mathbf{N},b\in\mathbf{N}$,则 $a+b$ 的最小值是 2;

④ $x^2+4=4x$ 的解集中有两个元素.

其中正确命题的个数是 ( )

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

前沿题

3. 集合 M 是由"一个内角是 30°,一条边长为 6 的等腰三角形"构成的集合,则 M 中的元素的个数为_______.

4. 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$,当 a,b,c 分别满足什么条件时,解集为空集?单元素集合?两元素集合?

视野一阔

逻辑与谎言

逻辑是数学的一大支柱,不会逻辑推理很难学好数学,下面我们就一具体事例说明这一问题.

"现有张三、李四、王五三人,张三说李四在说谎,李四说王五在说谎,王五说张三和李四都在说谎.请问:张三、李四、王五谁在说谎?谁说的是真话?"

该问题看起来复杂,但若把它变为数学问题,则清晰多了.

设张三为 A,李四为 B,王五为 C,说真话为 1,说谎话为 0.

(1) 若 $A=1$,即张三说真话.

由于张三说:"李四在说谎",可推知 $B=0$.

而李四说:"王五在说谎",但 $B=0$,李四说假话,则王五说真话,$C=1$;

由于王五说:"张三和李四都在说谎",可知 $A=0,B=0$ 与 $A=1$ 矛盾.

则 $A=1$ 时问题无解.

(2) 若张三说假话,即 $A=0$.

由于张三说:"李四在说谎",可知李四说真话,即 $B=1$;

李四说:"王五在说谎"知 $C=0$.

由于王五说:"张三和李四都在说谎",而 $C=0$,可得 $A=1,B=1$ 或 $A=0,B=1$,或 $A=1,B=0$.只要这三种情况有一种成立,都可说明王五说的张三、李四全都说谎是假的,因在这三种情况中至少有一个说的是真话.由这三种情况可以挑选出 $A=0,B=1,C=0$ 符合要求.

结论:张三、王五说假话,李四说真话.

利用逻辑推理进行判断的题目,形式可以多种多样,请看下面问题:

"某次会议有 100 人参加,参加会议的每个人都可能是诚实的,也可能是虚伪的,现在知道下面两项事实:

(1) 这 100 人中,至少有 1 名是诚实的;

(2) 其中任何两人中,至少有一名是虚伪的.

请你判断:有多少名诚实的?多少名虚伪的?"

既然参加会议的人至少有一名是诚实的,就让这名诚实者与其余 99 人中每人组成一对,根据"任何两人中,至少有

一名是虚伪的”,可以推知剩下的 99 人都是虚伪的.

结论:1 名诚实的,99 名虚伪的.

答案一览

课本习题答案

练习 A

1. (1) 能;(2) 能;(3) 不能;(4) 能;(5) 能;(6) 不能;(7) 能;(8) 能.
2. 非负整数集,记作 **N**,是无限集;
   整数集,记作 **Z**,是无限集;
   有理数集,记作 **Q**,是无限集;
   实数集,记作 **R**,是无限集.
3. (1) 不正确;(2) 正确;(3) 不正确;(4) 不正确;(5) 正确;(6) 正确;(7) 正确;(8) 正确.

练习 B

1. (1) $\notin$;(2) $\in$;(3) $\in$;(4) $\notin$;(5) $\notin$;(6) $\in$;(7) $\in$;(8) $\in$.
2. (1) 不正确;(2) 不正确;(3) 不正确;(4) 正确;(5) 不正确.

第二课时　集合的表示方法

开心一读

你能一一写出由大于2小于3的实数构成的集合中的元素吗?

由于大于2小于3的实数有无穷多个,而且不能一一列举.因此,我们很难做到.这就需要我们寻求集合的表示方法.

预习一测

1. 如果一个集合是有限集,元素又不太多,常常把集合的所有元素都列举出来,写在大括号内表示这个集合,这种表示集合的方法叫做________.
2. 如果在集合 I 中,属于集合 A 的________元素 x 都具有性质 $p(x)$,而______集合 A 的元素都不具有性质 $p(x)$,则性质 $p(x)$ 叫做集合 A 的一个______.
3. 集合 A 可以用它的特征性质 $p(x)$ 描述为________,它表示集合 A 是由集合 I 中具有性质 $p(x)$ 的________构成的.

自主一学

探究点1 列举法

用列举法表示集合,只要把集合中的元素一一列出,加大括号即可,如“方程 $x^2-1=0$ 的所有解”组成的集合可以表示为 $\{-1,1\}$. 显然,列举法最适合于表示元素个数比较少的有限集.

使用列举法时应注意以下四点:

① 元素间用分隔号“,”;

② 元素不重复、不遗漏;

③ 不考虑元素顺序;

④ 对于含较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法,但是必须把元素间的规律显示清楚后方能用省略号.

例1 用列举法表示下列集合:

(1) 15 的正约数;

(2) 不大于 10 的非负偶数集;

(3) 两边分别在坐标轴的负半轴上,且边长为 1 的正方形的顶点;

(4) 平方后仍为原数的数.

【分析】明确集合中的元素是什么,有哪些.

【解析】(1) $15=1\times3\times5$. 故集合为 $\{1,3,5,15\}$.

(2) 不大于 10 的非负偶数,即为从 0,2 至 10 的偶数. 故集合为 $\{0,2,4,6,8,10\}$.

(3) 两边在坐标轴的负半轴上,可以判断出 $O(0,0)$ 必为正方形一顶点,从而不难推出其余三顶点分别为 $(0,-1)$,$(-1,0)$,$(-1,-1)$. 故集合为 $\{(0,0),(0,-1),(-1,0),(-1,-1)\}$.

(4) 平方后仍为原数的数构成的集合是 $\{0,1\}$.

注意:① 使用列举法表示集合,一定要把握住元素的互异性,无序性,即集合中的元素一定要写全,但不能重复,同一元素只写一次. 另外,元素没有先后顺序.

② 关于 15 的正约数很容易求得,在解题中把 15 分解开来观察即得. 有些同学可能不需要分解 15,只凭想象即可得到答案,但求一个整数的约数,最根本的办法还是要分解. 试一试写出 240 的正约数的集合.

③ 关于第(3)小题的表示法,一定要注意集合中的元素是点,要用有序数对来表示,另外,$O(0,0)$ 点的确定是关键,要注意仔细体会.

对应训练 1

集合 $\{0,1\}$ 与集合 $\{(0,1)\}$ 有何区别?

探究点2 特征性质描述法

特征性质描述法是用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.

特征性质描述法表示集合是很方便的. 不管集合是有限集还是无限集都可以用描述法来表示. 此种描述法是最根本的表示法. 其方法是:大括号内写一个代表元素,竖杠后写出代表元素满足的条件. 如"正数"组成的集合,可以写成$\{x \mid x>0\}$. 注意一个集合中代表元素只能有一个,若要表示一个点或方程组的解,则代表元素可用一组有序数对表示. 如"直角坐标平面内第二象限的点"组成的集合,可以写成$\{(x,y) \mid x<0,y<0\}$.

在使用特征性质描述法时,应注意以下六点:

① 写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表达的元素符号);

② 说明该集合中元素的性质;

③ 不能出现未被说明的字母;

④ 多层描述时,应当准确使用"且""或";

⑤ 所有描述的内容都要写在集合括号内;

⑥ 用于描述的语句力求简明、确切.

例2 直角坐标系中,坐标轴上的点的集合可表示为(　　)

A. $\{(x,y) \mid x=0,y\neq 0$ 或 $x\neq 0,y=0\}$

B. $\{(x,y) \mid x=0$ 且 $y=0\}$

C. $\{(x,y) \mid xy=0\}$

D. $\{(x,y) \mid x,y$ 不同时为 $0\}$

【答案】C

【解析】A. $(0,0)$ 在坐标轴上,但$(0,0) \notin \{(x,y) \mid x=0,y\neq 0$ 或 $x\neq 0,y=0\}$;B. $\{(x,y) \mid x=0$ 且 $y=0\}$ 表示由原点构成的单元素集合;C. 坐标轴上的点的两个坐标至少一个为0,即$xy=0$,所以C正确.

对应训练2

集合$\{y \mid y=-x^2+6,x\in \mathbf{N},y\in \mathbf{N}\}$与集合$\{(x,y) \mid y=-x^2+6,x\in \mathbf{N},y\in \mathbf{N}\}$有何区别?

探究点3 两种表示方法的相互联系

数学语言形式间的互译是指一种语言形式与另一种语言形式之间的相互转换与翻译. 在数学学习中进行各种语言形式间的互译,不仅有利于对数学知识的理解和记忆,还可以熟悉数学语言本身,并为合理、简洁、准确地用数学语言表达数学思维过程铺平道路,因为流畅的数学思维建筑在准确娴熟的数学语言基础之上. 因而,这种互译可提高我们的数学素质.

例3 用特征性质描述法表示下列集合:

(1) 正偶数集;

(2) $\{1,-3,5,-7,\cdots,-39,41\}$;

(3) 被3除余2的正整数的集合;

(4) 坐标平面内第一、三象限平分线上的点的集合.

【分析】观察集合中的元素所具有的公共属性,选定代表元素,设法用代数式表达这些属性.

【解析】(1) $\{x \mid x=2n,n\in \mathbf{N}^*\}$.

(2) $\{x \mid x=(-1)^{n-1}\cdot(2n-1),n\in \mathbf{N}^*$ 且 $n\leqslant 21\}$.

(3) 被3除余2的正整数为$5,8,11,\cdots$,它们能表示成$3k+2(k\in \mathbf{N}^*)$的形式,故集合可以表示成$\{x \mid x=3k+2,k\in \mathbf{N}^*\}$.

(4) 坐标平面内第一、三象限平分线上的点满足方程$y=x$,凡点的坐标满足方程$y=x$的点都在坐标平面内第一、三象限平分线上,故集合为$\{(x,y) \mid y=x,x\in \mathbf{R},x\in \mathbf{R}\}$.

点评:(1) 用特征性质描述法表示集合,是将元素的公共属性描述出来,多用于集合中的元素有无限多个的无限集或元素个数较多的有限集.

(2) 注意区分集合中的元素是数集还是点集,以及集合中元素的限制条件.

对应训练3

下列命题正确的是 (　　)

A. 10以内的素数集合是$\{0,3,5,7\}$

B. "接近零的实数"不能构成集合

C. 方程$x^2-2x+1=0$的解集是$\{1,1\}$

D. 集合$\{a,b,c\}$与集合$\{a,c,b\}$表示两个不同的集合

探究点4 集合语言的应用

一切用以反映数量关系和空间形式的语言都是数学语言,如普通语言(包括口头的、文字的日常用语)、符号语言和图形语言. 同一数学研究对象,往往可用不同的语言形式表达.

例3 已知集合$A=\{x \mid ax^2+2x+1=0\}$

(1) 若$A=\varnothing$,求a;

(2) 若A中只有一个元素,求a的取值范围;

(3) 若A中至少有一个元素,求a的取值范围;

(4) 若A中至多有一个元素,求a的取值范围.

【分析】了解空集的概念. 理解"只有""至多"的准确含义是解本题的关键.

【解析】(1) $\because A=\varnothing$,

$\therefore$ 方程$ax^2+2x+1=0$无实根,

当$a\neq 0$时,$\Delta<0\Leftrightarrow a>1$,

当 $a=0$ 时，$x=-\frac{1}{2}$，

$\therefore a>1$.

(2) 问题 $\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+2x+1=0$ 只有一解，

若 $a\neq 0$ 则 $\Delta=0$，解得 $a=1$，此时 $x=-1$.

若 $a=0$ 则 $x=-\frac{1}{2}$；

$\therefore a=0$ 或 $a=1$ 时 A 中只有一个元素.

(3)①A 中只有一个元素时，见上 $a=0$ 或 $a=1$.

②A 中有两个元素时，$\begin{cases}a\neq 0,\\ \Delta>0.\end{cases}$

得 $a<1$ 且 $a\neq 0$.

综上 $a\leqslant 1$.

(4) 问题 $\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+2x+1=0$ 至多有一组解，

$\therefore \begin{cases}\Delta=4-4a\leqslant 0\\ a\neq 0\end{cases}$ 或 $a=0$，

$\therefore a\geqslant 1$ 或 $a=0$，

$\therefore$ 当 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$ 时，A 中至多有一个元素.

点评：本题应用一元二次方程有关根的讨论，得集合语言转化为方程解的问题. 本题难点在于如何将集合元素个数转化为方程系数所需要的条件.

对应训练4

被3除余1的整数组成的集合用描述法可表示为：①$\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$；②$\{\cdots\cdots,-5,-2,1,4,7,10,\cdots\cdots\}$；③$\{x\mid x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$. 其中正确的个数是 ( )

A. 0　　B. 3　　C. 2　　D. 1

合作一议

问题1　集合是一种语言，大家能否从下面问题中体会集合语言的应用特点.

试说明下列集合的含义：

$A=\{x\mid y=x^2+2x-1,x\in\mathbf{R}\}$；

$B=\{y\mid y=x^2+2x-1,x\in\mathbf{R}\}$；

$C=\{(x,y)\mid y=x^2+2x-1,x\in\mathbf{R}\}$；

$D=\{s\mid s=t^2+2t-1,t\in\mathbf{R}\}$.

【分析】根据给出的集合搞清其含义.

【解析】集合 A 表示二次函数的 x 的取值范围，所以集合 $A=\mathbf{R}$.

集合 B 表示满足 $y=(x+1)^2-2\geqslant -2$ 的所有实数，即 $B=\{y\mid y\geqslant -2\}$.

集合 C 表示抛物线 $y=x^2+2x-1$ 上的所有的点所构成的集合，是点的集合. 集合 D 与 B 相等.

点评：在用描述法表示集合时，一要注意代表元素是什么，二要注意集合中的元素的公共属性，三要注意集合中的元素有哪些. 元素全部相同集合就相同如 B 与 D，与所使用的字母无关.

问题2　大家想一想，能否根据所学知识证明下面的问题：

已知集合 $A=\{x\mid x=m+n\sqrt{3},m,n\in\mathbf{Z}\}$，设 $x_1,x_2\in A$. 求证：$x_1x_2\in A$.

【分析】此集合反映数 x 的属性，$x_1,x_2\in A$，即具有 A 的性质，$x_1x_2\in A$，即要证 x_1x_2 也具有 A 的性质.

【证明】任取 $x_1,x_2\in A$，则必存在 $m_1,n_1,m_2,n_2\in\mathbf{Z}$，

使 $x_1=m_1+n_1\sqrt{3}$，$x_2=m_2+n_2\sqrt{3}$

$x_1x_2=(m_1+n_1\sqrt{3})(m_2+n_2\sqrt{3})$

$=(m_1m_2+3n_1n_2)+(m_1n_2+m_2n_1)\sqrt{3}$

$\because m_1,n_1,m_2,n_2\in\mathbf{Z}$，$\therefore m_1m_2+3n_1n_2\in\mathbf{Z}$.

$m_1n_2+m_2n_1\in\mathbf{Z}$，设 $m_1m_2+3n_2n_1=m_3$，

$m_1n_2+m_2n_1=n_3$，则 $x_1x_2=m_2+n_3\sqrt{3}$，而且 $m_3,n_3\in\mathbf{Z}$，

$\therefore x_1x_2\in A$.

课内一练

基础题

1. 若 $A=\{(2,-2),(2,2)\}$，则集合 A 中元素的个数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid -\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$，则必有 ( )

A. $-1\in A$　　B. $0\in A$

C. $\sqrt{3}\in A$　　D. $2\in A$

3. 下列说法错误的是 ( )

A. 直角坐标平面内所有的整点（纵、横坐标都是整数的点）能构成集合

B. $\{y\mid y<0.01,y\in\mathbf{Z}\}$ 是一个有限集

C. $0\in\mathbf{Q}$，$0\in\mathbf{Z}$

D. $\{0\}$ 表示仅有一个元素零的集合

4. 集合 $M=\{(x,y)\mid xy<0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 是 ( )

A. 第一象限的点集　　B. 第二象限的点集

C. 第四象限的点集　　D. 第二、四象限的点集

前沿题

5. 方程组 $\begin{cases}x+y=2\\ x-2y=-1\end{cases}$ 的解集是 ( )

A. $\{x=1,y=1\}$　　B. $\{1\}$

C. $\{(1,1)\}$　　D. $\{1,1\}$

6. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

(1) $2\sqrt{3}$ ________ $\{x \mid x < \sqrt{11}\}$;

(2) $(-1,1)$ ________ $\{y \mid y = x^2\}$.

7. 已知集合 $M = \left\{a \left| \frac{6}{5-a} \in \mathbf{N} \text{且} a \in \mathbf{Z}\right.\right\}$, 则 $M =$ ________.

8. 已知集合 $A = \{(x,y) \mid x + y = 3, x \in \mathbf{N}_+, y \in \mathbf{N}_+\}$,试用列举法表示 A.

课外一试

能力题

1. 下面四个命题中:

①$\{a,b,ab\}$ 和 $\{ab,b,a\}$ 是不同的集合;

② 集合 $M = \{x \in \mathbf{R} \mid x - 2 < \sqrt{7}\}$,则 $5 \notin M$ 但 $-5 \in M$;

③ $a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{N}$,则 $\frac{b}{a}$ 的最小值不存在;

④ $(x-9)^3 = 0$ 的解集可表示为 $\{9,9,9\}$.

其中正确命题的个数是 ( )

A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 3 个

2. 有下列命题:

①$\{\varnothing\}$ 是空集;

② 集合 $\{x \mid ax + b = 0\}$ 是单元素集合;

③ 集合 $\{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ 有两个元素;

④ 集合 $\left\{x \left| \frac{100}{x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{Z}\right.\right\}$为无限集.

正确的个数是 ( )

A. 0 B. 3 C. 2 D. 1

创新题

3. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + ax + b = 0\}$ 中仅有一个元素 1,则 $a =$ ______, $b =$ ______.

4. 设 $A = \{x \mid x^2 + (b+2)x + b + 1 = 0, b \in \mathbf{R}\}$,求 A 中所有元素之和.

视野一阔

不可判定性定理

1902 年,罗素提出了数学史上著名的罗素悖论,罗素以通俗的理发师悖论比喻说:

一位乡村理发师,宣称他不给村子里任何自己刮脸的人刮脸,但给所有不自己刮脸的人刮脸. 有人问:"理发师先生,您自己刮脸吗?"

如果理发师回答:自己刮脸,那么他违背了他约定的前半句;如果理发师回答:不自己刮脸,那么按他约定的后半句,他应给自己刮脸. 理发师怎么说也说不通,陷入自相矛盾的尴尬境地.

如 $\{1,2,3,\cdots,10,11\}$, $\{1,2,3,\cdots,10,11,12\}$, $\cdots$, $\{1,2,3,\cdots,10,11,12,13,\cdots,n-1,n\}$ 等都是有十个以上元素的集合,以 10 个以上元素的集合为元素组成一个集合 β,则 β 中的元素有无穷多个,所以 β 也是 10 个以上元素的集合,于是 $\beta \in \beta$. 即康托的集合论应该允许谈集合属于自己. 当然集合不属于自己的事也是很多的,例如 $\{1,2\} \notin \{1,2\}$. 罗素造了一个集合如下:

$$B = \{A \mid A \text{是一个集合,且} A \notin A\}, \quad ①$$

罗素问道:"$B \in B$ 吗?"

若 $B \in B$,按 B 的定义 ①,应有 $B \notin B$;若 $B \notin B$,按定义 ①,应该有 $B \in B$.

矛盾似乎无法避免!这就是自相矛盾的罗素悖论. 出现了轰动一时的第三次数学危机,德国逻辑学家、数学家弗雷格(Frege,1848—1925)抱怨说:"大厦即将竣工之时,基础却崩溃了!"

1908 年罗素指出"我们不应该随意制造一个集合." 排除理发师悖论的办法是宣布世界上不存在那样的理发师,排除罗素悖论的办法是否决 $B = \{A \mid A$ 是一个集合,且 $A \notin A\}$ 是一个集合,禁谈 $B \in B$ 之类的话. 1908 年,法国数学家策墨罗(Zemelo)和弗伦克尔(Fmenkel)等制定了一套公理,实现了排除 $B = \{A \mid A$ 是一个集合,且 $A \notin A\}$ 这种集合的合法性,禁谈 $B \in B$ 之类的言论,排除了第三次数学危机.

答案一览

课本习题答案

练习 A

1. (1) $\{4,6,8,10,12,14\}$; (2) $\{-4,4\}$; (3) $\{5\}$; (4) $\{-2,2\}$; (5) $\{1,2,3,4\}$; (6) {北京, 上海, 天津, 重庆}.

2. (1) {城市 $x \mid x$ 是北京}; (2) $\{x \mid x$ 是偶数$\}$; (3) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2$

$-2x+3=0\}$;(4)$\{x\in\mathbf{R}\mid x>3\}$.

练习B

1. (1)$\{m,a,t,h,e,i,c,s\}$;(2)$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+5x+6=0\}$或$\{-2,-3\}$;(3)$\{x\in\mathbf{N}\mid 0\leqslant x<1\,000$,且$x$是奇数$\}$;(4)$\{x\in\mathbf{R}\mid x(x^2+2x-3)=0\}$或$\{0,1,-3\}$;(5)$\{x\in\mathbf{R}\mid |x|=3\}$或$\{-3,3\}$.
2. (1)$\{x\mid x=3n+2$,且$n\in\mathbf{Z}\}$;(2)$\{x\mid 1<x<100$,且x是质数$\}$;(3)$\{x\mid x$是平行四边形$\}$.

习题1—1A

1. (1)$\{2,4,6,8\}$;(2)$\{1,2,3,4,5,6\}$;(3)$\{x\mid x$是15的约数$\}$或$\{1,3,5,15\}$;(4)$\{x\mid x$是15的质因数$\}$或$\{3,5\}$;(5)$\{-2,2\}$;(6)$\{-3,3\}$;(7)$\varnothing$.
2. (1){1月,3月,5月,7月,8月,10月,12月};(2)$\{x\in\mathbf{Z}\mid -3.5<x<12.8\}$;(3)$\{x\mid x$是梯形$\}$;(4)$\{x\mid x$是矩形$\}$;(5)$\varnothing$.
3. (1)$\left\{\frac{1}{2}\right\}$;(2)$\{-5\}$;(3)$\{1,4\}$;(4)$\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
4. 有序实数对(x,y),或说点(x,y). $\{(x,y)\mid y=x\}$.

习题1—1B

1. (1)$\{-1,1,-4,2\}$;(2)$\{-2,4\}$;(3)$\{-2,-1,0,1,2\}$.
2. (1)$\{x\in\mathbf{N}\mid 0\leqslant x<10$,且$x$是偶数$\}$;(2)$\{x\mid x=3^n,n\in\mathbf{N}_+\}$;(3)$\left\{x\mid x=\frac{2n-1}{2n},n\in\mathbf{N}_+\right\}$;(4)$\{x\mid x=5n+2,n\in\mathbf{Z}\}$.
3. (1)有限集;(2)空集;(3)无限集;(4)有限集;(5)无限集;(6)空集.

1.2 集合之间的关系与运算

第一课时　集合之间的关系

开心一读

知道你所在学校的高一(1)班二组的同学构成的集合与高一(1)班同学构成的集合之间的关系吗?

这是一个局部与整体的关系问题,高一(1)班二组的任何一位同学都是高一(1)班同学中的一员.问题非常简单,但是,它蕴涵着一个重要的数学概念,也就是这节要学习的子集.

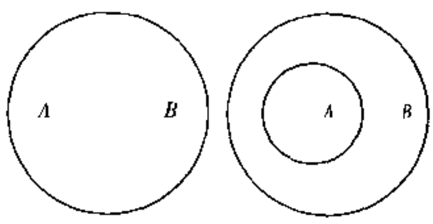
预习一测

1. 如果集合A中的______元素都是集合B的元素,那么集合A叫做集合B的子集,记作A____B或B____A,读作"A______B"或"B______A".
2. 如果集合P中存在着______集合Q的元素,那么集合P不包含于Q,或Q不包含P.分别记作P____Q或Q____P.
3. 任意一个集合A都是它本身的______,即A____A.
4. 我们规定空集是任意一集合的______,也就是说,对任意集合A,都有$\varnothing$____A.
5. 如果集合A是集合B的子集,并且B中______元素不属于A,那么集合A叫做集合B的真子集,记作A____B或B____A,读作"A______B"或"B______A".
6. 如果A____B,又B____A,则$A=B$;反之,如果$A=B$,则A____B,且B____A.

自主一学

探究点1 子集

两集合之间的包含关系如下图所示:



(1)　　(2)

子集表达的是集合与集合间的包含关系.当集合A不是集合B的子集时,它们不具备包含关系,记为$A\not\subseteq B$(或$B\not\supseteq A$).要特别注意$A\subseteq B$,即集合A中任何一个元素都在集合B中.

其数学表达应为：任意$x\in A$，则$x\in B$. 这一数学表达常用来证明子集关系.

另外，由子集的定义不难推出，任何集合必为自身的一个子集，同时规定：空集是任何集合的子集，即$A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$.

例1 已知$A=\{0,1\}$，且$B=\{x\mid x\subseteq A\}$，求B.

【分析】集合B中的元素x满足的属性是$x\subseteq A$，也就是集合B是由集合A的所有子集构成.

【解析】$B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$.

注意：(1) 集合的元素因为研究的对象不同，可以是数、式、人、物等，也可以是集合.

(2) 集合的子集包括空集及集合本身.

对应训练1

已知集合$M=\{a,b,c,d\}$，$N=\{p\mid p\subseteq M\}$，则集合N的元素个数为　（　　）

A. 4个　　B. 8个　　C. 16个　　D. 32个

探究点2 真子集

真子集就是不与自身相等的子集. 如果$A\subsetneqq B$：一方面$A\subseteq B$；另一方面，B中至少存在一个元素$x_0\notin A$. 这也就是我们证明一个集合是另一个集合的真子集的依据与方法.

如果$A\subsetneqq B$，其数学表达为：任意$x\in A$，则$x\in B$，且存在$x_0\in B$，但$x_0\notin A$.

由真子集的定义可得：空集是任何一个非空集合的真子集.

例2 符合条件$\{a\}\subsetneqq P\subseteq\{a,b,c\}$的集合$P$的个数是　（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【答案】B

【分析】本题给出了三个集合间的包含关系，由$\{a\}\subsetneqq P$知，$a\in P$且P中至少有两个元素.

【解析】$\because\{a\}\subsetneqq P\subseteq\{a,b,c\}$，

$\therefore P$可以是：$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,b,c\}$.

注意："$\{a\}\subsetneqq P$"说明$a\in P$且P中至少有两个元素；"$P\subseteq\{a,b,c\}$"说明P的元素属于$\{a,b,c\}$，但可以有$P=\{a,b,c\}$.

对应训练2

设$A=\{0,a\}$，且$B=\{x\mid x\in A\}$，则集合A与集合B的关系是　（　　）

A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\subseteq B$

C. $A=B$　　D. $A\in B$

探究点3 集合的相等

数学表达为：$A\subseteq B$且$B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.

集合相等，如上图(1)，顾名思义，就是集合中的元素完全相同. 对于两个有限集来说，集合相等，只要元素完全相同即可，不需要考虑元素的顺序；而对于一个无限集来讲，元素个数都是无限个，那就只能用定义（相互包含关系）来说明（证明、判定）.

例3 设集合$A=\{x-y,x+y,xy\}$，$B=\{x^2+y^2,x^2-y^2,0\}$，且$A=B$，求实数x和y的值及集合A，B.

【分析】$A=B$，则A与B的三个元素完全相同，又$0\in B$，则A中三个数必有一个为0，讨论可求得.

【解析】$\because A=B$，$0\in B$，$\therefore 0\in A$.

若$x+y=0$或$x-y=0$，则$x^2-y^2=0$，这样集合$B=\{x^2+y^2,0,0\}$，根据集合中元素的互异性知：$x+y\neq0$，$x-y\neq0$.

$$\therefore\begin{cases}xy=0\\x-y=x^2-y^2\\x+y=x^2+y^2\end{cases}\quad(\text{Ⅰ})$$

$$\text{或}\begin{cases}xy=0\\x-y=x^2+y^2\\x+y=x^2-y^2\end{cases}\quad(\text{Ⅱ})$$

由(Ⅰ)得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

由(Ⅱ)得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

$\therefore$ 当$x=0$，$y=0$时，$x-y=0$，故舍去.

当$x=1$，$y=0$时，$x-y=x+y=1$，故也舍去.

$\therefore\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

$\therefore A=B=\{0,1,-1\}$.

注意：因为集合中的元素具有确定性、互异性、无序性，解此题时应注意集合的元素满足这三性. 由已知条件$A=B$，知$0\in A$，是解决本题的突破口.

对应训练3

已知集合$M=\{(x,y)\mid x+y<0,xy>0\}$，$P=\{(x,y)\mid x<0,y<0\}$，那么　（　　）

A. $P=M$　　B. $P\subsetneqq M$

C. $M\subsetneqq P$　　D. $M\not\subseteq P$

探究点4 子集、真子集、相等三者之间的关系

(1) 一般地，若A是B的真子集，则A是B的子集. 反之，若$A\subseteq B$，则$A\subsetneqq B$或$A=B$；若$A\subseteq B$且$A\neq B$，则$A\subsetneqq B$.

(2) 对于集合A，B，C，存在下列关系：

① 若$A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$；

② 若$A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C\Rightarrow A\subsetneqq C$.

例4 已知$M=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$，$P=\{y\mid y=b^2-6b+10,b\in\mathbf{N}^*\}$，问集合$M$与$P$之间的关系是怎样的？

【分析】两个集合间的关系不外乎"$\subseteq$""$\subsetneqq$""$=$"或不存在这些关系，而集合 M,P 都是无限集，不可能用列举法列举穷尽，于是考虑两个表达式之间的关系．由 M,P 内元素的性质确定．

【解析】解法一：集合 P 中，$y=b^2-6b+10=(b-3)^2+1$，当 $b=4,5,6,\cdots$ 时，与集合 M 中 $a=1,2,3,\cdots$ 时的值相同，而当 $b=3$ 时，$y=1\in P,1\notin M$，

$\therefore M\subsetneqq P$.

解法二：对任意的 $x_0\in M$，

有 $x_0=a_0^2+1=(a_0+3)^2-6(a_0+3)+10\in P$.

$(\because a_0\in \mathbf{N}^*,\therefore a_0+3\in\mathbf{N}^*)$

$\therefore M\subseteq P$，又 $b=3$ 时，$y=1$，

$\therefore 1\in P$，而 $1<1+a_0^2(a_0\in\mathbf{N}^*)$

$\therefore 1\notin M$，从而 $M\subsetneqq P$.

注意：判断两个集合之间的关系，关键是寻求表达两个集合的解析式的关系．若将本题中的正整数集改为整数集，则 $M=P$，在证明"$\subseteq$"或"$=$"关系时需要严格证明，而要否定这两种关系，只要举出一个具体反例即可．

对应训练4

集合 $M=\{x\mid x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\},P=\{y\mid y=3l+1,l\in\mathbf{Z}\},S=\{y\mid y=6m+1,m\in\mathbf{Z}\}$ 之间的关系是 (　　)

A. $S\subsetneqq P\subsetneqq M$　　B. $S=P\subsetneqq M$

C. $S\subsetneqq P=M$　　D. $S\supsetneqq P=M$

合作一议

问题1 细心审题，先自己完成，再与同学们相互对照各自答案，如果答案不相同，分析原因，共同找出防止出错的策略．

设 $A=\{x\mid x^2-8x+15=0\},B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 组成的集合．

【分析】集合 A,B 分别是两个方程的解集．

$\because B\subseteq A,\therefore$ 方程 $ax-1=0$ 的解一定是方程 $x^2-8x+15=0$ 的解，注意到 B 可以是空集．

【解析】$A=\{3,5\}$，因为 $B\subseteq A$，

若 $B=\varnothing$ 时，则 $a=0$；

若 $B\neq\varnothing$ 时，则 $a\neq0$，

这时有 $\frac{1}{a}=3$ 或 $\frac{1}{a}=5$，

即 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=\frac{1}{5}$，

所以由实数组成的集合为 $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\}$

点评：本例是一个分类讨论问题，根据问题的实际分类要恰当、合理，做到不重复、不遗漏，克服分类讨论问题中的主观性和盲目性．在 $A\subseteq B$ 中，含有 $B=\varnothing$ 这种情况，解答时需注意，否则容易遗漏．

问题2 我们在初中经常遇到等式证明问题，大家先想一想能否像证明初中代数等式一样证明两个集合相等．然后议一议证明集合相等的方法．

已知 $M_1=\{m\mid m=x^2-y^2,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\},M_2=\{m\mid m=2k+1$ 或 $m=4k,k\in\mathbf{Z}\}$，求证：$M_1=M_2$.

【分析】要证 $M_1=M_2$，按集合相等的定义，应证 $M_1\subseteq M_2$，且 $M_2\subseteq M_1$.

【证明】设 $m\in M_1$，则存在整数 x,y，使 $m=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，

若 x,y 为一奇一偶，则 $x\pm y$ 均为奇数，m 也为奇数，即有 $m=2k+1,k\in\mathbf{Z}$；

若 x,y 同奇同偶，则 $x\pm y$ 均为偶数，故 m 为 4 的倍数，即有 $m=4k,k\in\mathbf{Z},\therefore m\in M_2$.

反之设 $m\in M_2$，则存在整数 k，使 $m=2k+1$，或 $m=4k$，

若 $m=2k+1=(k+1)^2-k^2$，则 $m\in M_1$；

若 $m=4k=(k+1)^2-(k-1)^2$，则 $m\in M_1$.

$\therefore M_2\subseteq M_1.\therefore M_1=M_2$.

点评：在解决此题时，注意：(1) 根据 x,y 的奇偶性进行讨论．(2) 证明一个元素在某一个集合内时，必须证明这个元素具备这个集合中元素应具有的属性，此题中应用到了代数式的变换．

问题3 先讨论下面问题中的三个集合中的元素是什么，再各自考虑如何解答，看看谁的解答完美．

若 $a,x\in\mathbf{R},A=\{2,4,x^2-5x+9\},B=\{3,x^2+ax+a\},C=\{x^2+(a+1)x-3,1\}$，求：

(1) 使 $A=\{2,3,4\}$ 的 x 的值；

(2) 使 $2\in B,B\subsetneqq A$ 的 a,x 的值；

(3) 使 $B=C$ 的 a,x 的值．

【解析】(1) $x^2-5x+9=3$，

解得 $x=2$ 或 $x=3$.

(2) $2\in B,\therefore x^2+ax+a=2$　①

$B\subsetneqq A,\therefore x^2-5x+9=3$　②

由①②可得 $x=2,a=-\frac{2}{3}$

或 $x=3,a=-\frac{7}{4}$.

(3) $B=C,\therefore x^2+ax+a=1$ 且 $x^2+(a+1)x-3=3$，

解得 $\begin{cases}x=3\\a=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\a=-6.\end{cases}$