



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

21 世纪高等学校通信类规划教材

随机信号分析

(第3版)

Random Signal Analysis
(Third Edition)

李晓峰 李在铭 周宁 傅志中 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

内 容 简 介

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书主要讨论随机信号的基础理论和分析方法。全书共 7 章, 内容包括: 概率论基础, 随机信号与典型信号举例, 平稳性、循环平稳性与功率谱密度函数, 各态历经性与随机实验方法, 随机信号通过线性系统, 带通信号与窄带高斯信号, 马尔可夫链、独立增量过程与泊松过程等。

本书强调随机信号及其分析的基本概念、物理意义与系统方法, 注重理论基础, 并联系工程实践。内容全面, 叙述清楚, 例题与图示丰富, 便于教学与自学。

本书以初等概率论、高等数学与信号分析的基本知识为基础, 可以作为高等学校电子信息类专业本科生与研究生教材或教学参考书, 也可供相关专业领域的师生、科研和工程技术人员参考。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析 / 李晓峰, 李在铭, 周宁等编著. —3 版. —北京: 电子工业出版社, 2007.2

(21 世纪高等学校通信类规划教材)

ISBN 978-7-121-03628-6

I. 随... II. ①李... ②李... ③周... III. 随机信号—信号分析—高等学校—教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 149564 号

责任编辑: 韩同平 特约编辑: 李佩乾

印 刷: 北京季蜂印刷有限公司

装 订: 三河市万和装订厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 11.5 字数: 306.8 千字

印 次: 2007 年 2 月第 1 次印刷

印 数: 5000 册 定价: 19.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系电话: (010) 68279077; 邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlt@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：(010) 88254396; (010) 88258888

传 真：(010) 88254397

E-mail: dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

电子工业出版社总编办公室

邮 编：100036

出版说明

教材建设是高等学校教学和学科建设的主要内容之一。近几年来,我国各高等学校实施了一系列面向 21 世纪教学改革计划,在教学内容和课程体系改革上取得了丰硕的成果,因此需要适时推出适应教改成果的教材。同时,通信技术发展十分迅速,原有教材或者内容已比较陈旧、落后,难以适应教学的要求,需要修订或重新编写;或者需要开设新课程,编写新教材以填补空白。

电子工业出版社作为以信息技术领域出版为特色的中央级科技与教育出版社,始终关注着电子信息技术的发展方向,始终把出版适应我国高等学校发展要求的高质量精品教材放在重要位置上,出版了一系列特色鲜明的教材,希望能把它们放在学生的书包里、课桌上,为培养高素质人才打下良好的基础。

基于上述考虑,经过一年多的调研,并征求多方的意见,根据国内高等学校通信专业的发展现状,以及教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革意见》的指示精神,电子工业出版社规划出版了这套“21 世纪高等学校通信类规划教材”。

目前,我国多数高等学校都设有通信专业,但办学水平、特色及人才培养层次差异很大。这套教材定位于重点高校,即以研究型、研究教学型人才培养为主的高等学校通信类专业,包括其他相关专业的通信类课程教材。教材的作者全部来自于重点高校,多数是“信息与通信工程”一级学科设有全国重点学科的高校。

与以往出版的同类教材相比,这套教材具有以下特点:

(1) 专业特色鲜明:以重点院校本科通信类专业的专业课程教材为主线,兼顾其他相关专业的通信类课程。

(2) 突出系统性:本套规划教材覆盖了本科通信类专业的专业基础课、专业方向课及专业选修课,形成一个完整的教材系列,规模之大是以往教材中所不多见的。同时注意教材之间内容的合理划分与衔接,层次分明,重点突出,各高校可以根据需要组合选用,我们的目的是为通信类课程打造一套全方位解决方案。

(3) 体系、内容新颖:整个知识点建立在“高”、“新”平台上。基本理论阐述精练,深入浅出,便于自学;注意吸收新理论、新技术成果;加强实践性与应用性,结合实例进行讲解。

(4) 配套教学支持:多数教材配有教学课件(电子教案),部分重要课程配套出版教学辅导书或实验教材。

(5) 质量保证:多数教材为已出版教材的修订版,原教材在高校的影响大;重新规划的教材将在组织专家/教授对写作大纲和知识点进行充分讨论的基础上,选择优秀作者编写。

本套教材可作为高等学校通信专业及相关专业的本科生或研究生教材,也可供通信领域的有关专业人员学习参考。

为做好本套教材的出版工作,我们聘请了多位国内通信教育领域的著名教授作为教材顾问,并聘请了清华大学、东南大学、上海交通大学、北京交通大学、北京邮电大学、西安电子科技大学、电子科技大学等著名高校电子信息学院(系)的院长(系主任)成立教材编委会,从根本上保证了教材的高质量。在此对他们的辛勤工作表示衷心的感谢。

今后,我们将进一步加强同各高校教师的密切联系和合作,广泛听取一线教师对教材的反馈意见,以便使我们的教材出版工作做得更好。

《21世纪高等学校通信类规划教材》顾问委员

迟惠生 (北京大学)
冯重熙 (清华大学)
吴伟陵 (北京邮电大学)
谢希仁 (解放军理工大学)

程时昕 (东南大学)
李承恕 (北京交通大学)
吴诗其 (电子科技大学)
袁保宗 (北京交通大学)

《21世纪高等学校通信类规划教材》编审委员

主任委员: 樊昌信 (西安电子科技大学)

副主任委员:

顾婉仪 (北京邮电大学)
彭启琮 (电子科技大学)
王希勤 (清华大学)
吴镇扬 (东南大学)

李建东 (西安电子科技大学)
王金龙 (解放军理工大学)
文宏武 (电子工业出版社)
张思东 (北京交通大学)

委员:

安建平 (北京理工大学)
陈咏恩 (同济大学)
段哲民 (西北工业大学)
范平志 (西南交通大学)
郑广增 (南京邮电大学)
顾学迈 (哈尔滨工业大学)
李建东 (西安电子科技大学)
刘 琚 (山东大学)
仇佩亮 (浙江大学)
唐向宏 (杭州电子科技大学)
王金龙 (解放军理工大学)
王祖林 (北京航空航天大学)
韦 岗 (华南理工大学)
徐昌庆 (上海交通大学)
张思东 (北京交通大学)
朱光喜 (华中科技大学)

鲍长春 (北京工业大学)
邓建国 (西安交通大学)
樊昌信 (西安电子科技大学)
方 勇 (上海大学)
顾婉仪 (北京邮电大学)
康 健 (吉林大学)
李晓峰 (电子科技大学)
彭启琮 (电子科技大学)
唐朝京 (国防科技大学)
田宝玉 (北京邮电大学)
王希勤 (清华大学)
文宏武 (电子工业出版社)
吴镇扬 (东南大学)
张德民 (重庆邮电学院)
郑建生 (武汉大学)
朱秀昌 (南京邮电大学)

编辑出版组: 韩同平 王羽佳 姚晓竞

联系电话: (010)88254525 **E-mail:** hantp@phei.com.cn

前 言

随机信号分析是电子信息类专业的重要基础课程。本教材的第 1、2 版《随机信号分析及工程应用》自出版以来,在电子科技大学等多所学校的本科及研究生教学中长期使用,教学效果好,得到广泛的社会认同。第 3 版是作者结合近年来从事该门课程的教学与研究经验,在广泛参考与学习国内外现有的同类书籍后,对原书进行改编而成的。本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

编写与修订中,本教材力求突出下面三点:

(1) 揭示概念的来源与背景,引导学生领悟本理论的思想方法。初学本课程的学生由于长期习惯思考确定性问题,经常感觉统计理论与方法不可靠、概念模糊难懂。减少这类困惑的有效方法是进一步地揭示各种概念的本质,帮助他们形成新的、有趣的思维方法。

(2) 注重理论基础,安排适合的内容结构,采用简明的叙述方式。书中对许多重要的基础概念与结论采用了数学定义与定理的表现形式,以帮助学生建立严谨的基础体系。在内容选择与表述上,着力条理性与简明性,以突出重点,方便阅读理解。书中还增强了例题与举例,通过它们具体说明问题的应用背景,示范分析思路、方法与技巧。

(3) 结合专业背景,联系工程实践,强调物理意义。本课程是一门以基本数学理论为工具,研究电子电气工程应用的专业基础课程。为此,书中注意解释各种数学概念与结论的物理含义,阐述数学问题所关联的工程背景。书中还安排了专门章节,讨论基本的实验测量技术,说明随机模拟的思想,并示范了运用 MATLAB 进行实践的方法。

这次再版主要进行了下面几个方面的改进:① 调整了原书的部分结构,精选了例题与举例,进一步改善了内容的条理性与简明性;② 侧重于基础教学的需要,缩减了部分较深入的章节;③ 补充了运用 MATLAB 的计算机实践方法;④ 增强了马尔可夫链与泊松过程的基础理论内容。

本教材以初等概率论、高等数学与信号分析的基本知识为基础,可以作为本科生与研究生的教材或教学参考书,建议教学学时数为 32~64 学时。

全书共分 7 章:第 1 章复习与总结概率论的基础知识,同时补充了随机变量的条件数学期望、特征函数等新知识点;第 2 章介绍随机信号的定义、基本特性与描述方式,介绍几个典型的信号例子与重要的高斯信号;第 3 章介绍平稳性与循环平稳性,讨论平稳信号的相关函数与功率谱密度函数;第 4 章讨论随机信号的各态历经性、基本参数的实验测量方法、随机模拟的思想,以及运用 MATLAB 进行实践的方法;第 5 章介绍随机信号通过线性时不变系统的分析方法,讨论噪声中信号处理的基本技术;第 6 章介绍希尔伯特变换与复随机信号,说明带通信号的基本特性与重要性,给出窄带高斯噪声和它加上高频信号时的各种基础概率分布;第 7 章讨论马尔可夫链、独立增量过程与泊松过程。书中列举了大量的例题与图示,给出了一些运用 MATLAB 的实践示例,各章末附有足够的习题供练习。

本书由李晓峰教授等编著,经陈天麒教授主审。李在铭编写第 1 章,李晓峰编写第 2、3、5 章,周宁、李晓峰合作编写第 4、6 章,傅志中编写第 7 章。全书由李晓峰统编定稿。本书得到电子科技大学随机信号分析课程组同仁的鼓励、帮助和支持,研究生王俊芳、肖世尧和

汪明月等为书稿的录入、整理和校对做了许多工作，本书的出版还得到电子工业出版社的大力支持，韩同平编辑为本书花费了不少精力，作者在此一并表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中谬误与疏漏在所难免，敬请读者批评指正。

本书配有电子课件，可登录电子工业出版社华信教育资源网 <http://www.huaxin.edu.cn> 免费下载。

作者联系方式: xfli@uestc.edu.cn 028-83202468

编著者
于电子科技大学

本书常用符号说明

$\forall$	全称量词 (任意)	B_N	系统等效噪声带宽 (赫兹)
$\exists$	存在量词 (存在)	B_{3dB}	系统 3dB 带宽 (赫兹)
[]	取整运算	B_{eq}	信号矩形等效带宽 (赫兹)
$\chi^2(n)$	(n 个自由度的) χ^2 分布	B_{rms}	信号均方根带宽 (赫兹)
$\delta(x)$	(单位) 冲激函数	$Cov(X, Y), \mu_{11}$	协方差
$\delta(n)$	(单位) 冲激序列	$C_X, (Cov(X_i, X_j))_{n \times n}$	(n 维) 协方差矩阵
$\Phi(x), N(0, 1)$	标准正态 (高斯) 分布	$C_X(t_1, t_2), C_{XY}(t_1, t_2)$	随机信号自 (或互) 协方差函数
$\phi_X(v), \phi(v)$	特征函数	$C_X(\tau), C_{XY}(\tau)$	平稳信号自 (或互) 协方差函数
$\phi_X(v), \phi_{X_1 X_2 \dots}(v_1, v_2, \dots)$	多维 (联合) 特征函数	$EX, E(X), m_X$	数学期望、均值、统计平均、集平均
$\phi_X(v_1, v_2, \dots; t_1, t_2, \dots)$	随机信号的多维特征函数	$EX^2, E[X^2]$	均方值
$\mu_X, (EX_i)_{n \times 1}$	n 维均值 (列) 向量	$E(X - EX)^2, \sigma_X^2, \text{Var}(X), D(X)$	方差
μ_i	状态 i 的平均返回步数	$E(XY), m_{11}$	二阶联合原点矩
$\pi_i(n), p(n)$	绝对概率与概率分布向量	$EX^n, E(X^n), m_n$	n 阶原点矩
$\Gamma(\alpha, \beta)$	伽马分布	$E(X - EX)^n, \mu_n$	n 阶中心矩
ρ_{XY}, ρ	相关系数	$E X ^n, E(X ^n)$	n 阶绝对矩
$\rho_X(t_1, t_2), \rho_{XY}(t_1, t_2)$	随机信号自 (或互) 相关系数	$E[X Y=y], E[X Y], m_{X Y}$	条件数学期望、条件平均
$\rho_X(\tau), \rho_{XY}(\tau)$	平稳信号自 (或互) 相关系数	$EX(t), E[X(t)], m_X(t)$	随机信号的均值
σ_X, σ	标准差	$EX^2(t), E[X^2(t)]$	随机信号的均方值
$\sigma_X^2(t), \text{Var}[X(t)]$	随机信号的方差	$F_X(x), F(x)$	(概率) 分布函数, 累积分布函数
$\hat{\sigma}_X^2$	方差的估计	$F_{X_1 X_2 \dots}(x_1, x_2, \dots)$	多维联合 (概率) 分布函数
τ_c	相关时间	$F_{X Y}(x y), F(x y)$	条件 (概率) 分布函数
Ω	随机试验样本空间	$F_X(x; t)$	随机信号的一维分布函数
ω_0	系统的中心 (角) 频率	$F_X(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots)$	随机信号的多维分布函数
ω_m	最高非零 (角) 频率	$f_X(x), f(x)$	(概率) 密度函数
ξ, ξ_i	随机试验结果、样本点	$f_{X_1 X_2 \dots}(x_1, x_2, \dots)$	多维联合 (概率) 密度函数
$A[]$	算术或时间平均		
$A(t, \Delta t)$	泊松平均变化率, 泊松增量		
$a(t)$	复包络信号		
$B(n, p)$	参数 (n, p) 的二项分布		

$f_{X Y}(x y), f(x y)$	条件 (概率) 密度函数	$p_{ij}, p_{ij}(k)$	一步与 k 步转移概率
$f_X(x;t)$	随机信号的一维密度函数	$p_{ij}(m,n)$	m 时刻向 n 时刻的转移概率
$f_X(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots)$	随机信号的多维密度函数	$R_X(t_1, t_2), R_{XY}(t_1, t_2)$	随机信号自 (或互) 相关函数
$f_{ij}(n)$	状态 i 到 j 的 n 步首达概率	$R_X(\tau), R_{XY}(\tau)$	平稳信号自 (或互) 相关函数
f_{ij}	状态 i 到 j 的最终到达概率	$\hat{R}_X[m]$	自相关序列的估计
$G_X(\omega), G(\omega)$	单边功率谱密度函数	$r_h(t)$	系统相关函数
G_0	系统的中心功率增益	$S_X(\omega), S_{XY}(\omega)$	功率谱与互功率谱
$h(t)$	系统冲激响应	$S_X(e^{j\omega}), S_{XY}(e^{j\omega})$	平稳序列功率谱与互功率谱
$H(j\omega)$	系统频响函数	$S_X(z), S_{XY}(z)$	平稳序列自 (或互) 相关函数的 z 变换
$h(n)$	离散系统冲激响应	S_n	泊松事件的到达时刻
$H(e^{j\omega})$	离散系统频响函数	T_n	(相邻) 泊松事件的时间间隔
$H(z)$	离散系统 z 函数	T_{ij}	从状态 i 到 j 的首达时间
$\mathcal{H}[\] , \mathcal{H}^{-1}[\]$	希尔伯特变换与逆变换	T_s	采样间隔
$i(t), q(t)$	带通信号的同相与正交分量	$U(a,b)$	区间 (a,b) 上的均匀分布
$i \rightarrow j$	状态 i 可达状态 j	$u(x)$	(单位) 阶跃函数
$i \leftrightarrow j$	状态 i 与 j 互通	$u(n)$	(单位) 阶跃序列
J	雅可比行列式	W_N	系统等效噪声带宽 (角频率)
$L[\]$	线性系统算子	$X Y, X Y=y$	条件随机变量
$LPF\{ \}$	低通滤波处理	$X_1, \dots, X_n Y_1, \dots, Y_m$	多维条件随机变量
$\hat{m}_X$	均值的估计	$\{X(t, \xi), t \in T\}, X(t, \xi), X(t)$	随机信号, 随机过程
$N(\mu, \sigma^2)$	正态 (高斯) 分布	$\{X(n, \xi), n \in N\}, X(n, \xi), X(n), X_n$	随机序列, 离散随机过程
$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$	二维正态 (高斯) 分布	$X_0(t), \dot{X}(t)$	中心化信号与归一化信号
$N(\mu_X, C_X)$	n 维正态 (高斯) 分布	$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$	傅里叶变换对
$N_0/2$	白噪声功率谱密度	$\hat{x}(t)$	$x(t)$ 的希尔伯特变换
$N(t)$	泊松 (计数) 过程	$z(t)$	解析信号
$P(A)$	事件 A 的概率		
$P(A B)$	事件 B 条件下事件 A 的概率		
$P(\lambda)$	(参数为 λ 的) 泊松分布		
P_X, P	功率		
$P, P(k)$	一步与 k 步转移概率矩阵		
$P(m,n)$	m 时刻向 n 时刻的转移矩阵		

目 录

第 1 章 概率论基础	(1)
1.1 概率公理与随机变量	(1)
1.1.1 概率公理	(1)
1.1.2 随机变量	(5)
1.2 多维随机变量与条件随机变量	(7)
1.2.1 多维随机变量	(7)
1.2.2 条件随机变量	(10)
1.2.3 独立性	(11)
1.3 随机变量的函数	(12)
1.3.1 一元函数	(12)
1.3.2 二元函数	(13)
1.3.3 瑞利与莱斯分布	(15)
1.4 数字特征与条件数学期望	(16)
1.4.1 数学期望 (或统计平均)	(16)
1.4.2 矩与联合矩	(17)
1.4.3 无关与正交	(18)
1.4.4 条件数学期望	(19)
1.4.5 重要不等式	(21)
1.5 特征函数	(21)
1.5.1 (一维) 特征函数	(21)
1.5.2 多维 (联合) 特征函数	(24)
1.6 典型分布	(26)
1.7 随机变量的仿真与实验	(31)
习题	(33)
第 2 章 随机信号	(37)
2.1 定义与基本特性	(37)
2.1.1 概念与定义	(37)
2.1.2 基本概率特性	(40)
2.1.3 基本数字特征	(41)
2.2 典型信号举例	(42)
2.2.1 随机正弦信号	(42)
2.2.2 伯努利随机序列	(44)
2.2.3 半随机二进制传输信号	(45)
2.2.4 泊松过程	(47)
2.3 一般特性与基本运算	(49)

2.3.1	n 阶概率特性	(49)
2.3.2	联合特性	(50)
2.3.3	相关函数与协方差函数的性质	(52)
2.3.4	微分与积分	(53)
2.4	多维高斯分布与高斯信号	(54)
2.4.1	多维高斯分布	(55)
2.4.2	高斯随机变量的性质	(56)
2.4.3	高斯随机信号	(58)
2.5	独立信号	(60)
	习题	(61)
第 3 章	平稳性与功率谱密度	(64)
3.1	平稳性与联合平稳性	(64)
3.1.1	严格与广义平稳信号	(64)
3.1.2	联合平稳性	(66)
3.2*	循环平稳性	(67)
3.2.1	严格循环平稳性	(67)
3.2.2	广义循环平稳性	(68)
3.3	平稳信号的相关函数	(70)
3.3.1	基本性质	(70)
3.3.2	物理意义	(72)
3.4	功率谱密度与互功率谱密度	(73)
3.4.1	基本概念	(73)
3.4.2	定义与性质	(75)
3.4.3*	维纳-辛钦定理的证明	(78)
3.5	白噪声与热噪声	(78)
3.5.1	白噪声	(79)
3.5.2	热噪声	(80)
3.6	应用举例	(81)
	习题	(85)
第 4 章	各态历经性与随机实验	(89)
4.1	各态历经性	(89)
4.1.1	均值各态历经性	(89)
4.1.2	相关各态历经性	(91)
4.2	参数的估计与测量方法	(93)
4.2.1	估计的基本概念	(93)
4.2.2	模拟测量方法	(93)
4.2.3	采样测量方法	(95)
4.3	随机模拟方法与实验	(97)
4.3.1	蒙特卡罗法	(97)
4.3.2	用 MATLAB 进行随机实验	(98)

4.4	简单随机数的产生方法	(101)
4.4.1	均匀分布随机数的产生	(101)
4.4.2	利用变换法产生其他随机数	(101)
4.4.3	正态分布随机数的产生	(102)
	习题	(103)
第 5 章	随机信号通过线性系统	(105)
5.1	具有随机输入的线性时不变系统	(105)
5.1.1	系统的输出过程	(105)
5.1.2	输出过程的均值与相关函数	(106)
5.2	平稳白噪声通过 LTI 系统	(110)
5.2.1	白噪声通过 LTI 系统	(110)
5.2.2	低通与带通白噪声	(112)
5.2.3	系统的等效噪声带宽	(114)
5.3	信号功率谱与带宽	(115)
5.3.1	功率谱的物理含义	(115)
5.3.2	随机信号的带宽	(116)
5.4	噪声中的信号处理	(117)
5.4.1	平滑	(117)
5.4.2	维纳滤波器	(119)
5.4.3	匹配滤波器	(120)
5.5*	平稳序列通过离散 LTI 系统	(122)
5.5.1	平稳序列的功率谱与互功率谱	(122)
5.5.2	具有随机输入的离散 LTI 系统	(123)
5.5.3	连续带限信号与采样定理	(124)
	习题	(125)
第 6 章	带通随机信号	(129)
6.1	希尔伯特变换与解析信号	(129)
6.1.1	希尔伯特变换	(129)
6.1.2	解析信号	(131)
6.2	复(值)随机信号	(131)
6.2.1	复信号及其基本矩函数	(131)
6.2.2	平稳性与功率谱	(132)
6.2.3	复信号通过线性系统	(133)
6.3	带通信号与调制	(134)
6.3.1	带通信号	(134)
6.3.2	带通信号的复数表示	(135)
6.3.3	调制与解调	(136)
6.3.4	基本结论小结	(137)
6.4	窄带高斯信号	(140)
6.4.1	基本概率分布	(140)

6.4.2 包络与相位的概率分布	(141)
6.5 窄带高斯噪声中的高频信号	(142)
6.5.1 合成信号及其基本分布	(142)
6.5.2 合成信号的包络与相位分布	(143)
习题	(146)
第 7 章 马尔可夫链与泊松过程	(148)
7.1 马尔可夫链	(148)
7.1.1 基本定义	(148)
7.1.2 转移概率与切普曼-科尔莫戈罗夫方程	(150)
7.1.3 平稳分布与极限分布	(153)
7.2 马尔可夫链的状态分类	(155)
7.2.1 可达、互通、首达与首达概率	(155)
7.2.2 常返、非常返、周期与遍历	(156)
7.3 独立增量过程	(158)
7.4 泊松过程	(161)
7.4.1 定义与背景	(161)
7.4.2 泊松事件到达时间与时间间隔	(162)
7.4.3 泊松过程的平均变化率	(164)
7.4.4 泊松冲激序列	(165)
7.4.5 散弹噪声	(166)
习题	(167)
附录 A 傅里叶变换对表	(169)
附录 B 高斯分布函数$\Phi(x)$函数表	(170)
参考文献	(171)

第 1 章 概率论基础

概率论的基本知识读者已经学习过了，它们是随机信号分析的理论基础。因此，本章将简明地复习与总结这些知识，同时也扩充一些后面需要用到的新知识点，例如，利用冲激函数表示离散与混合型随机变量的概率密度函数，随机变量的条件数学期望与特征函数等。

1.1 概率公理与随机变量

随机现象总是表现得捉摸不定，它的基本特征在于：结果多样且事先无法预知。为了对随机性进行定量描述，并使用数学工具深入分析其内在规律，人们建立了随机试验、样本空间、事件与概率等概念，并定义了随机变量。

1.1.1 概率公理

1. 概率的定义

数学家通过对大量随机现象的深入考察建立了一系列的基本概念与术语：

随机试验 对随机现象做出的观察与科学实验被抽象为随机试验（Random Experiment）。它具有下述特性：① 可以在相同条件下重复进行；② 全部的可能结果是事先知道的；③ 每次试验的结果不可预知。

随机试验的例子很多，例如：投掷骰子，观察顶面出现的点数；连续投掷硬币两次，观察正、反面出现的组合结果；记录某街道照明灯泡的寿命时间；统计网络交换机 1 s 内接收到的数据包数目与到达时刻；用电压表测量某接收机前端的噪声输出电压。

样本点与样本空间 随机试验所有的基本可能结果构成的集合称为样本空间（Sample Space），记为 Ω 。 Ω 的元素是单个基本可能结果，称为样本点（Sample Point），记为 ξ_i ($i=1, 2, \dots$)， $\xi_i \in \Omega$ 。

事件 事件（Event）是试验中“人们感兴趣的结果”构成的集合，是 Ω 的子集，常用大写字母 A 、 B 、 C 等表示。事件可以是：

- ① 基本事件，仅包含一个样本点，如 $\{\xi_1\}$ ， $\{\xi_3\}$ 等；
- ② 复合事件，它包含多个样本点，如 $\{\xi_1, \xi_2, \xi_6\}$ ， $\{\xi_6, \xi_2\}$ 等；
- ③ 不可能事件，空集 $\emptyset$ ，它不包含任何样本点；
- ④ 必然事件，整个 Ω ，它包含所有样本点。

概率 事件是随机的。除必然事件与不可能事件外，试验进行前无法确知“感兴趣的结果”是否会出现。赋予每个事件一个出现可能性的度量值，称为**概率**（Probability）。

所谓“可能性的度量值”是指“宏观”意义下（即大量情形下）事件出现的比例值。人们对于随机现象长期的研究发现了一个有趣的结果：捉摸不定的随机事件在大量统计下，出现的比例表现为某个明确的固定值。这种特征——既在个别时表现为无法确定又在大量时表现为具有规律，引出了一套全新的理论，概率这个术语正好集中反映了这一特征，

因而是这套理论的核心术语。

在实际应用中,事件 A 出现的可能性直观地由其相对频率 (Relative Frequency) 来计算,因此

$$P(A) \approx \frac{\text{试验中 } A \text{ 出现的次数}}{\text{总试验次数}} = \frac{n_A}{n} \quad (n \text{ 很大}) \quad (1.1)$$

相对频率的客观特性要求 (理论研究中的) 概率具有一些基本特性,称为概率公理。

概率公理 任何事件 A 的概率满足:

- ① 非负性: 任取事件 A , $P(A) \geq 0$;
- ② 归一性: $P(\Omega) = 1$;
- ③ 可加性: 若事件 A, B 互斥, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

概率与概率公理是概率论的基石,它们源于科学实践,其正确性在于它能合理地表述与解释客观世界,并能有效地解决实际问题。

2. 条件概率与独立性

“前提条件”与“相互独立”是随机问题中经常遇到的概念。

若事件 A 会发生, 即 $P(A) > 0$, 考虑在 A 发生的条件下, 另外一个事件 B , 这便引出了条件事件和条件概率 (Conditional Probability), 它们定义为

$B|A$ = 事件 A 发生条件下的事件 B

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) > 0 \quad (1.2)$$

在实际应用中, 条件概率可以用相对频率如下计算 (n 足够大)

$$P(B|A) \approx (A \text{ 发生时 } B \text{ 也发生的次数占 } A \text{ 发生总次数的相对比例}) = n_{AB}/n_A$$

它还可以按图 1.1 直观地进行理解。

独立的概念用于描述事件的发生不依赖于条件的特性, 即 $P(B|A) = P(B)$ 。因此, 事件 A 与 B 独立 (Independent) 等价地定义为

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 彼此独立的定义为: 若对于任意的 $m (1 < m \leq n)$ 与 m 个任意整数: $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$, 满足

$$P(A_{k_1} A_{k_2} \dots A_{k_m}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \dots P(A_{k_m}) \quad (1.3)$$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 彼此独立。可见多个事件的独立要求它们两两独立, 三三独立, 以及任意 $m (\leq n)$ 个都独立。

3. 基本性质与事件运算

基于公理, 容易导出事件概率的如下基本性质:

- ① $P(\emptyset) = 0$;
- ② $0 \leq P(A) \leq 1$;

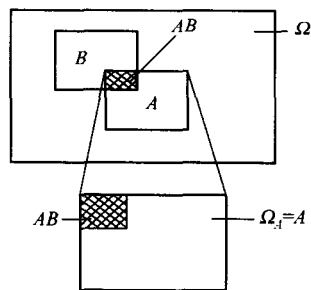


图 1.1 条件事件及其集合表示

$$\textcircled{3} P(A) \leq P(B), \text{ 如果 } A \subseteq B;$$

$$\textcircled{4} P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B).$$

样本空间与事件的数学描述都是集合，因此，事件的运算是集合的运算。事件的基本运算包括：非、加（或）、减、乘（与）及除（条件），对应的概率关系如下：

$$\textcircled{1} P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) \quad (\text{如果彼此互斥}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} P(A - B) &= P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(B) \quad (\text{如果 } B \subseteq A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} P(AB) &= P(A)P(B|A), \quad P(A) > 0 \\ &= P(B)P(A|B), \quad P(B) > 0 \\ &= P(A)P(B) \quad (\text{如果彼此独立}) \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} P(B|A) = P(AB)/P(A), \quad P(A) > 0$$

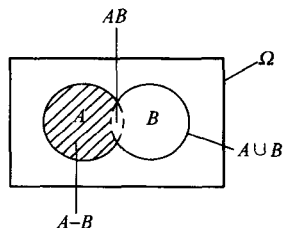


图 1.2 文氏图

通过文氏图（Venn Diagram）可以形象化地理解概率的基本性质、事件运算及其对应概率的运算，如图 1.2 所示。

事件的反复运算生成各种新的事件，各种不同事件的总体构成一个事件集合，称为事件域 F 。样本空间、事件和概率是概率理论的两个最基本的概念。

例 1.1 分析掷均匀硬币问题。

解：掷币试验的基本结果是： H —正面， T —反面。因此有

(1) 样本空间： $\Omega = \{H, T\}$ 。

(2) 事件域： $F = \{\{H\}, \{T\}, \emptyset, \Omega\}$ 。

(3) 由硬币的均匀特性可得， $P\{H\} = P\{T\} = 0.5$ ；而且 $P\{\emptyset\} = 0$ ， $P\{\Omega\} = 1$ 。

例 1.2 有 N 个格子排为一列，将一只小球随机地放入其中任一格子。对于 $k \in [1, N]$ ，求：

(1) 小球放入第 k 号格子的概率。

(2) 前 k 个格子中有小球的概率。

解：因为是等概的，显然

$$P(\text{小球放入任一格子}) = 1/N$$

又因为小球放入各个格子是互斥的，于是有

$$P(\text{小球放入任意 } k \text{ 个格子}) = k/N$$

基于概率论解决实际问题的原则思路是：首先为问题设计随机试验模型，确定其样本空间 Ω ，然后合理地假设其中某些基本事件的概率，再由它们推导出我们感兴趣的事件概率与特性，从而解决所关心的问题。

4. 几个基本公式

概率论中，有下面几个重要的公式。

(1) 链式法则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \quad (1.4)$$

式中, $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ 。易见, 链式法则是反复运用条件概率定义的结果。

(2) 全概率公式

事件组 $A_i, i=1, 2, \cdots, n$, 若满足:

$$\forall i \neq j, A_i A_j = \emptyset; \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

则称该事件组为样本空间的一个**完备事件组**或**分割** (Partition)。完备事件组是既彼此互斥又可以完整地拼成 Ω 的事件组。

若 $A_i, i=1, 2, \cdots, n$, 是完备组, 任取另外一个事件 B , 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i) \quad (1.5)$$

该式称为全概率公式。

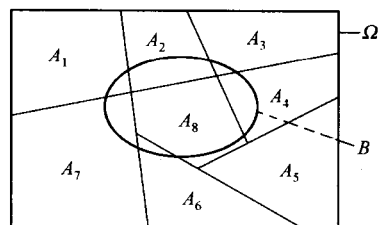


图 1.3 全概率公式

易见上式等价于 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i B)$, 其中各个 $A_i B$

是图 1.3 中 B 的局部子块, 它们彼此互斥。于是, 上式可由概率公理的可加性得出。形象地讲, 全概率公式表明: “全部”的概率是各种 (互斥的) “部分”的概率按比例构成的。

(3) 贝叶斯 (Bayes) 公式

若 $A_i, i=1, 2, \cdots, n$, 是完备组, 任取另外一个事件 B , 有

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}, \quad k=1, 2, \cdots, n \quad (1.6)$$

易见, 上式右边的分子与分母分别为

$$P(A_k)P(B|A_k) = P(A_k B), \quad \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i) = P(B)$$

因此, 式 (1.6) 本质上源于条件概率的定义。

贝叶斯公式在研究因果推测、信息传输与检测等问题中有着重要的应用。通常将各个因事件概率 $P(A_i)$ 称为**先验概率** (Priori Probability), 它是观察事件 B 出现与否的实验之前已存在的; 将条件概率 $P(B|A_k)$ 称为**转移概率** (Transition Probability), 它是第 k 个因事件转移成 (或引起) 事件 B 的概率; 而将观察到 B 出现之后, 条件概率 $P(A_k|B)$ 称为**后验概率** (Posteriori Probability)。考虑一下因果推测问题: A_i 是 m 个原因事件, B 是某种结果事件; 各原因的概率是先验概率, 由原因引起结果的概率是转移概率, 而知道结果后推测起因的概率就是后验概率。贝叶斯公式正是基于结果 B 推测某种起因 A_k 的可能性的方法。

例 1.3 在二元传输或检测中, 假定二元消息表示为 0 与 1, 记为 X , 其先验概率分别为 $P\{X=0\}=0.9$, $P\{X=1\}=0.1$, 传输可靠性为 80%。问: 收到 1 时, 真正发送的消息是什么?

解: 由于传输并非绝对可靠, 不论发送的是 0 或 1, 接收到的消息可能为 0, 也可能为