

高級中學課本

代 数

第三册

数学参考資料（第二分册）

河南省教育厅編

河南人民出版社

高级中学课本
代数第三册教学参考资料
(第二分册)
河南省教育厅編

河南人民出版社出版(郑州市行政区經五路)
河南省書刊出版業營業許可証出字第一号
河南第二新华印刷厂印刷 河南省新华書店發行

豫总書号: 2274

787×1092耗 1/32·1 $\frac{5}{16}$ 印張·29,000字

1960年2月第1版 1960年2月第1次印刷

印数: 1—16,090册

統一書号: 7105·371

定价: (5)0.11元

目 录

第十章 不等式(續)..... (1)

第1課 方程討論的意義和一元一次方程的討論... (5)

第2課 一元一次方程的討論(續)..... (6)

第3課 二元一次方程組的討論..... (8)

第4課 二元一次方程組的討論(續)..... (9)

第5課 實系數的二次三項式的討論..... (10)

第6課 實系數的二次三項式的討論(續)..... (11)

第7課 一元二次不等式..... (12)

第8課 一元二次不等式(續)..... (13)

第9課 復習..... (15)

第10課 書面測驗..... (16)

[注] 復習題十提示..... (16)

第十一章 高次方程..... (18)

第11課 一元 n 次方程和余數定理..... (20)

第12課 余數定理(續)..... (21)

第13課 一元 n 次方程的根的個數..... (23)

第14課 一元 n 次方程的根的個數(續)..... (24)

第15課 一元 n 次方程的根和系數間的關係..... (25)

第16課 實數系數的一元 n 次方程的根的性質..... (27)

第17課 綜合除法..... (28)

第18課 整數系數方程的有理數根的求法..... (29)

第19課 整數系數方程的有理數根的求法(續)..... (30)

第20課 二項方程..... (33)

第21課 二項方程(續)..... (35)

第22課 習題課..... (37)

第十章 不等式(續)

方程的討論

(見高級中學課本代數第三冊85—106頁，§133—§137)

教學目的

(一)使學生明確方程討論的意義；學會含有參變數的一元一次方程和二元一次方程組的討論方法；並理解各種解在實際問題中的意義。

(二)使學生能結合二次三項式的圖象，進一步理解函數的相依關係；並能正確地對二次三項式進行討論和合理地解答二次不等式的問題。

(三)培養學生分析、綜合和邏輯推理的能力；並能解決實際問題。

教材分析

本單元的教材分三部分：

(一)關於方程的討論的意義 (§133)。

(二)關於一元一次方程和二元一次方程組的討論 (§134—§135)。

(三)關於二次三項式的討論和一元二次不等式的解法 (§136—§137)。

在高中三年級學習了不等式的性質、證明和解法後，接着就是系統的進行一次方程與二元一次方程組的討論。

所謂方程的討論就是研究方程的解，方程的解是由方程中各項的係數來決定的。如果方程或方程組的各項係數是數字，

則根据未知数的可允許值的集合，就可知道它是恆等关系；有唯一解或有无穷多解或无解。如果是文字系数（这样的系数叫参变数），那就必須討論参变数的那些值方程有解；如果有解，有多少解；对于那些值方程无解。如果是应用题，則还必须討論参变数的那些值方程的解符合題意；对于那些值方程的解不符合題意。所以方程的討論，就是研究含有参变数的系数对于解的影响。一元二次方程根的討論，已經教过。这里只討論一元一次方程和二元一次方程組。在 § 134 里討論了分母含有参变数的方程以及分式方程。在 § 135 里介紹了行列式的概念和計算的方法，目的是簡化一次方程組的解法。对于二元一次方程組的討論，仅要求学生理解和掌握在什么情况下，它有唯一組解、沒有解或者有无穷多組解。

§ 136 是在解一元二次方程的根和二次函数的圖象的基础上进行这一項目的教学，使学生进一步理解函数的相联关系；另一方面，它是解一元二次不等式的依据。討論时，首先明确它的系数是实数，其次是依判別式分为三种情形来进行的。最后归类加以总结。

§ 137 的教学，是以前节討論的結果为依据的，当 $a \neq 0$ 时，討論不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解。在这个基础上再进行解一元的分式不等式。它是利用解一元二次不等式組来解决的。

在进行这一單元教学时教师应当明确：关于方程的討論不是从高中三年級才开始的，只是加以系統的总结。所以教师在整个代数教学中都应当对这一方面的內容給予注意，否則在高中三年級进行方程的討論会产生一定的困难。因为，要学生克服長期养成的形式主义的对待文字式子的習慣是不容易的，同时要学生在短短的几天内，学会善于对应该討論的所有可能情况加以分类，也是难于办到的。

下面就本單元的主要內容再作重點的研究。

在進行一元一次方程的討論時，應注意下面幾個問題：

(1) 學生往往不會對參變量的所有可能情況加以分類。

例如，把所給方程化為下列形式：

$k(k-1)x=0$ 。他們分為① $k \neq 0, k \neq 1$ ；② $k=0, k=1$ ；③ $k=0, k \neq 1$ ；④ $k \neq 0, k=1$ 。這是形式的分類，而沒有考慮到字母所代表數的本質，最好利用數軸來說明，並注意那些數已經討論了，那些數還沒有討論。

(2) 如果題目中只要求討論方程的解為正數、零或負數時，學生也容易疏忽它的先決條件。例如，方程 $(m-1)x = m+2$ 。他們不管 m 為何值，就說原方程有解 $x = \frac{m+2}{m-1}$ ，從而進行討論。應使學生理解：只有當 $m \neq +1$ 時，原方程有唯一解，之後才可以進一步討論它的解為正數、零或負數。

(3) 在討論分母含有參變數的一元一次方程時，首先除掉參變數的不允許值，解得結果後，需審查再作決定。舉例說明如下：

例如： t 是什麼實數時，方程 $3x = \frac{1}{t}(2x-5)$ 的解是正數？是負數？

首先肯定 $t \neq 0$ ，才可以化為

$(2-3t)x=5$ ，其次，當 $t \neq \frac{2}{3}$ 時，原方程有唯一

解： $x = \frac{5}{2-3t}$ 。由此，學生會得出：當 $t < \frac{2}{3}$ 時，解為正數；當 $t > \frac{2}{3}$ 時，解為負數。原方程的解為負數時，所求 t 的範圍是 $t > \frac{2}{3}$ ；但它的解為正數時，所求 t 的範圍是 $t < 0$ 和 $0 < t < \frac{2}{3}$ 。學生往往會忘掉了 t 的不允許值而誤

写为 $t < -\frac{2}{3}$ 。

(4) 討論分式方程时学生往往不会把未知数和參变数的不允許值联系起来。举例說明如下:

例: m 是什么实数时, 方程 $\frac{x+1}{x-2} = \frac{2m-3}{m+5}$ 的解是正数呢? 是負数呢? 是等于零呢? 是沒有解呢?

首先应注意到 $x \neq 2$, $m \neq -5$, 在这些条件下把原方程化簡, 最后得到方程 $(m-8)x = 5m-1$ 。从这里来看, 当 $m = -5$ 时得 $x = 2$, 而 $x = 2$ 不是原方程的解, 因此只要 $m \neq -5$ 即可。下面写出它的討論:

討論: 1. $m \neq 8, m \neq -5$, 原方程有唯一解: $x = \frac{5m-1}{m-8}$ 。

① $m < -\frac{1}{5}$ 或 $m > 8$, 原方程解为正数;

② $-\frac{1}{5} < m < 8$, 原方程的解为負数;

③ $m = -\frac{1}{5}$, 原方程的解等于零。

2. $m = 8$, 則得 $0 \cdot x = 5 \cdot 8 - 1$, 原方程沒有解。

3. $m = -4$, 則得 $x = 2$ (增根) 原方程沒有解。

学生总结时会写成: 当 $m < -\frac{1}{5}$ 或 $m > 8$ 时, 原方程有正数解。这里就沒有注意到 $m \neq -5$ 的条件。正确結論應該是:

当 $m < -5, -5 < m < -\frac{1}{5}$ 或 $m > 8$ 时, 原方程有正数解。

关于二元一次方程組的討論, 应利用圖象說明它的几何意义。

关于解一元二次不等式, 首先討論实系数的二次三項式。对这个项目的教学, 学生是有基础的。他們作过这样的習題: 根据函数 $y = 2x^2 + 4x - 6$ 的圖象, 求 x 取何值时 $y < 0$ 或 $y > 0$ 或 $y = 0$ 。另外, 把二次函数化成 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式, 啓發学生, 当 x 取什么值时可以决定 y 的符号? 这个形式是否比

原來的形式容易找到 x 的值的範圍？用這樣的方式，引入討論二次三項式，才可以提出，要利用配方的方法來變形。

利用二次三項式討論的結果，就可以解一元二次不等式。通過解一元二次不等式的教學，接著就可解某些分式不等式。這樣聯系更為密切。

教師根據實際情況，可以補講一些可用因式分解為一次因式或二次因式的積的一元高次不等式。例如解 $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$ 、 $x^2 + 1 > 0$ 、 $x^4 - 1 > 0$ 。

第 1 課

教學題目：方程討論的意義和一元一次方程的討論

教學目的：

- (1) 使學生理解方程討論的意義。
- (2) 通過實際問題認識討論的必要性。
- (3) 學會對一元一次方程的討論。

教 材：見課本85、88頁 § 133和 § 134，例1—例3。

教 法：

(1) 方程的討論大部建立在解不等式的基礎上。用提問方式，首先復習一元一次不等式及一元一次不等式組的解法。

如不等式組化成：
$$\begin{cases} x > -6 \\ x > 0 \end{cases}$$

(參考78頁例1)

故不等式組的解是 $x > 0$ 。

(2) 提出 § 133兩個實例，讓學生發現一是方程無解，一是有解不合題意，從而說明討論的必要性。

(3) 可以先講例1，通過例1再討論 $ax = b$ ，讓學生註

出三种情况:

1. 有唯一解的条件 ($a \neq 0$);
2. 有无穷多解的条件 ($a = 0, b = 0$);
3. 无解的条件 ($a = 0, b \neq 0$).

(4) 讲解例2时, 要注意: 对原方程来解, $X \neq 0$, $X \neq a$. 在这些条件下原方程可化为 $(b+1)X = a$. 而对此方程只要 $b \neq -1$ 就有解. 下面可以按课本上进行讨论. 只是要注意使学生能把参变数和未知数的不允许值联系起来.

(5) 例3 是当 $k \neq 5$ 时才有解. 讨论时注意:

1. X 为正值条件是分子分母同号

即:
$$\begin{cases} k-2 > 0 \\ k-5 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} k-2 < 0 \\ k-5 < 0 \end{cases}$$

任一组的解 $k > 5$ 或 $k < 2$ 都是合题的.

2. X 为负值是分子分母异号

即:
$$\begin{cases} k-2 > 0 \\ k-5 < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} k-2 < 0 \\ k-5 > 0 \end{cases}$$

第一组的解为 $2 < k < 5$, 第二组无解.

3. 在 $k \neq 5$ 的条件下, $k = 2$ 时 X 为零.

最后说明 k 在方程中起着决定根的符号与性质的作用, 以巩固这一课时的学习.

布置作业: 习题四十: 1(2), 3(1), 4(2), 6(1), 7(2).

第 2 课

教学题目: 一元一次方程的讨论(续)

教材: 89—90页, 例4和例5.

教法: 通过应用问题, 使学生明确所要求的未知量的

允許值，然后再定參變數的允許值。

例4：列出方程為 $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = 1$ ，化成 $(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})X = 1$ 。

1. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$ ，即 $a=b$ 時， $0x=1$ 方程無解。

2. $b-a > 0$ ，即 $b > a$ ，有解且符合題意。

3. $b-a < 0$ ，即 $b < a$ ，有解但不合題意。

最後教師應着重說明其實際意義。

例5：列出方程為 $ax+15=9x-5$ ，化簡後得 $(9-a)x=20$ 。首先肯定所求人數為正整數， a 也是正整數，除 $a \neq 9$ 外還要在正整數 1、2、3、4、5、6、7、8 中挑選出一部分使它与 9 的差數恰為 20 的約數，否則是不合題意的（見課本）。

其次可用習題四十第12題作課堂練習。以提高學生對問題的討論能力。

布置作業：習題四十：8，9，10，11。

〔注〕下面注解僅供備課時參考：

8. $ax - bx = d$ ，在 $a > b$ 時有解 $x = \frac{d}{a-b}$ 。

9. $\frac{x}{m} - \frac{x}{n} = 10$ ，在 $n > m$ 時有解 $x = \frac{10mn}{n-m}$ 。

10. $\frac{n}{m+x} = q$ ， $x = \frac{n-mq}{q}$ 在 $n > mq$ 時有解。

11. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = 1$ ， $x = \frac{ab}{ab - (a+b)}$ ，

$ab > a+b$ 時，有解。

第 3 課

数学題目：二元一次方程組的討論

数学目的：

(1) 使学生理解在什么情况下方程組有唯一解、无解或有无穷多解。

(2) 学会用二阶行列式解二元一次方程組的方法。

教 材：91—94頁 § 135 和例 1。

教 法：

(1) 通过提問讓学生写出二元一次方程組的标准形式：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

(2) 討論可按課本上的內容进行。

当 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 至少有一个不为零时，使学生明确有以下三种情况：

1. $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$ ，方程組有唯一解；

2. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1}$ ，方程組无解；

3. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$ ，方程組有无穷多解。

当所有未知数的系数都是零，且常数项 c_1 与 c_2 至少有一个不是零，則方程組无解。如 $c_1 = c_2 = 0$ ，則有无穷多解。

(3) 在講解过程中可根据討論的各种情况，举例說明，并給以几何解釋（应根据一次函数斜率关系使学生徹底理解其道理）：

第一种情形：方程組有确定解。

例:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$$

第二种情形: 方程組无解。

例:
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

第三种情形: 方程組有无穷多解。

例:
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

(方程的圖象是同一条直綫。)

(4) 利用行列式解二元一次方程組及例1都可按課本上的內容进行講解。应当注意行列式計算的符号規則, 使學生掌握行列式計算的規律性。

布置作業: 習題四十一;

2(1)(2)(3)(4), 3(1)(3), 4(1)(2)(3)。

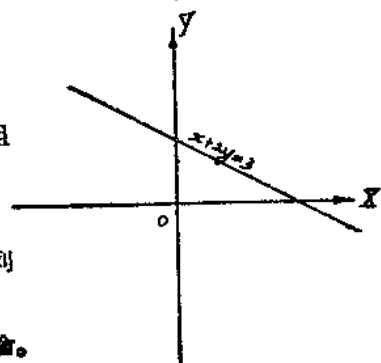
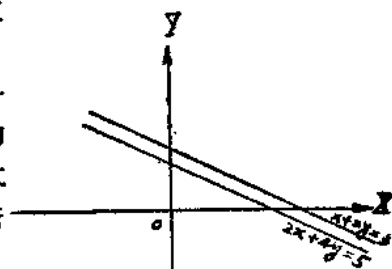
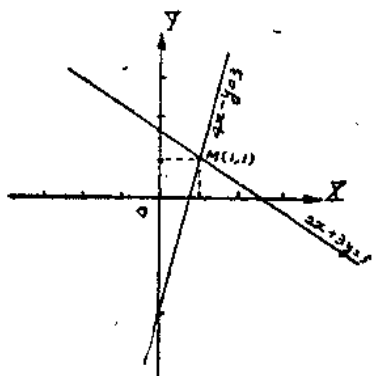
第 4 課

教學題目: 二元一次方程組的討論(續)

教學目的:

(1) 結合例題練習用行列式解二元一次方程組。

(2) 就解得結果进行討論。



教 材：94—97頁，例2和例3。

教 法：

(1) 复習提問，用板演方式將
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

用行列式直接写出 x 、 y 的值。进行討論。

(2) 講解例2和例3（見課本）。

(3) 用習題四十一第12題作例題。

布置作業：習題四十一：6(1)，9，10。

第 5 課

教學題目：实系数的二次三項式的討論

教學目的：使學生理解实系数的二次三項式当 $\Delta < 0$ 和 $\Delta = 0$ 时的值的符号的討論。

教 材：課本99—101頁 § 136。

教 法：

(1) 复習提問：

1. 什么是二次三項式？（要向學生強調 $a \neq 0$ ）

2. 二次三項式的討論是緊密結合二次函数的圖象来进行的，所以有必要对二次函数的圖象給以較系統的复習。

例：已知函数 $y = 2x^2 + 4x - 6$ 。

① 求函数的根。

② 指出函数有極小值还是有極大值。

③ 求出拋物綫頂点的坐标。

④ 作函数的圖象。

⑤ 根据函数圖象說出：对于 x 的哪些值，函数是正的；对于哪些值，函数是負的；对于哪些值，函数等于零。

(2) 講解新課:

1. 首先指出所謂“实系数的二次三項式”，就是指它的系数仅限于实数。

2. 指出二次三項式与二次方程不同，并且告訴学生討論二次三項式与討論二次方程不同。后者在于研究二次方程的根的性质，而前者却在于研究二次三項式的值的符号。

3. 按照課本講完当 $\Delta < 0$ 和 $\Delta = 0$ 时二次三項式的值的符号。但在講解每一种情况的过程中，应注意及时穿插些具体例子。以便使学生对所講解的理論理解得更透徹些。

4. 总结上述两种討論的步骤。

5. 講解例1和例2。講例2时，要学生先明确各項的意义，这样可以防止学生把一次項 $4ax$ ，当成二次項看待。

布置作業：習題四十二：1 (1)(2)(3)，2 (5)(6)。

第 6 課

教學題目：实系数的二次三項式的討論（續）

教學目的：使学生理解实系数的二次三項式当 $\Delta > 0$ 时的值的符号的討論。

教 材：課本 § 136 的后一部分。

教 法：

(1) 提問前一課所講的內容。

(2) 結合圖象講解当 $\Delta > 0$ 时，二次三項式的值的符号的討論，这样会便学生接受得更快些。

(3) 在講解过程中，尚須指出在 $\Delta > 0$ 时，根据需要与可能，对于 $ax^2 + bx + c$ 必須作不同于 $\Delta < 0$ 时的恆等变形——因式分解。这样才便于討論。

(4) 講解例3，另外再討論 $x^2 - 15x + 56$ 的值的符号。

(5) 最后把講过的三种情况的討論，列成簡明的条文（如課文）或表格，进行复習巩固。如下表：

$\Delta = b^2 - 4ac$	x值	$ax^2 + bx + c$ 的符号	
		$a > 0$	$a < 0$
< 0	任意值	+	-
$= 0$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	+	-
	$x = -\frac{b}{2a}$	0	0
> 0	$x < x_1$ 或 $x > x_2$	+	-
	$x_1 < x < x_2$	-	+
	$x = x_1$ 或 $x = x_2$	0	0

(6) 指出实系数的二次三項式的討論不适用于复系数的二次三項式。

布置作業：習題四十二：1 (4)，2 (2)(3)。

第 7 課

教學題目：一元二次不等式

教學目的：使学生会解一元二次不等式。

教 材：課本102—103頁。

教 法：

(1) 复習二次三項式的值的符号的討論。

(2) 指出解一元二次不等式与討論二次三項式不同。后

着是由 x 的值来确定二次三項式的符号，而前者就是已知二次三項式值的符号（即已知一个一元二次不等式）来求得 x 的值的范围。

（3）分析二次三項式的討論，从而导出解一元二次不等式的法則：

1. 若 $\Delta < 0$ ，且 $ax^2 + bx + c$ 和 a 同号（或異号）；
則原不等式的解为任何实数（或无解）。

2. 若 $\Delta = 0$ ，且 $ax^2 + bx + c$ 和 a 同号（或異号）；
則原不等式的解为 $x = -\frac{b}{2a}$ （或无解）。

3. 若 $\Delta > 0$ ，且 $ax^2 + bx + c$ 和 a 同号（或異号）；
則原不等式的解为 $x < x_1$ 和 $x > x_2$ （或 $x_1 < x < x_2$ ）。

（4）指出 $ax^2 + bx + c$ 必須是一般形式的一元二次不等式的左边，而 x_1 和 x_2 分別是 $ax^2 + bx + c = 0$ 的小根和大根。

（5）講解例1、例2和例3。

布置作業：習題四十二：3 (3)(4)，4 (1)(4)，5 (2)(4)。

第 8 課

教學題目：一元二次不等式（續）

教學目的：通过例题使学生进一步熟練一元二次不等式的解法。

教 材：課本104—105頁，例4和例5。

教 法：

（1）讓學生板演，解下面兩個不等式：

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \text{ 和 } x^2 - 2x + 3 < 0$$

(2) 講解例 4 和例 5。不过在按課本上的解法講完例 4 后, 还可向学生介紹用分解因式求不等式的解的方法。但此法必須限于 $\Delta > 0$ 的情形。因为这时二次三項式有两个不同的实数根, 可按 § 38 分解。具体解法如下:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3} < 0, \text{ 先注意每一个二次三項式的判別式。}$$

而知它們都是正的, 因此利用同解不等式的定理得:

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3) < 0$$

$$\text{再化为 } (x+1)(x-1)(x-2)(x-3) < 0。$$

这个不等式左端是四个因式的积, 每一个因式的值可以是正数、負数或零, 而决定于 x 的值。当 $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ 时, 它們的积为零, 于是利用数軸, 被这四个根把数軸分成五个区間, 来研究每一个因式在各区間里的符号, 可以列出下表:

因式符号 \ x 的值	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$	$x > 3$
因式					
$x+1$	-	+	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+	+
$x-2$	-	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	-	+
$(x+1)(x-1)$	+	-	+	+	+
$(x-2)(x-3)$	+	-	+	-	+

从上表可得解为 $-1 < x < 1$ 和 $2 < x < 3$ 。

用这种解法, 就可避免用解联立不等式組的方法, 解这类不等式。