高等学校数学讲练教程系列2

线性代数分级讲练教程

主　编　仉志余　副主编　王建军　张晋珠

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等学校数学讲练教程系列

线性代数分级讲练教程

主　编　仉志余

副主编　王建军　张晋珠

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数分级讲练教程/仉志余主编. —北京: 北京大学出版社,
2006.8

(高等学校数学讲练教程系列)

ISBN 7-301-10729-3

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 仉…　Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 049633 号

书　　　名: 线性代数分级讲练教程

著作责任者: 主编　仉志余　　副主编　王建军　张晋珠

责 任 编 辑: 刘　勇

标 准 书 号: ISBN 7-301-10729-3/O·0697

出 版 发 行: 北京大学出版社

地　　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　　址: http://www.pku.cn

电　　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　理科部 62752021
出版部 62754962

电 子 邮 箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印　刷　者: 北京大学印刷厂

发　行　者: 北京大学出版社

经　销　者: 新华书店

890mm×1240mm　A5　7.5 印张　215 千字

2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

印　　　数: 0001—7000 册

定　　　价: 15.00 元

内 容 简 介

本书是高等院校工科各专业数学公共课线性代数的学习辅导书，与国内多套现行全国优秀教材《线性代数》配套，可同步使用。为了配合同类高校各专业线性代数课程的教学和学生的学习，编者精心策划，按专题组织了多年参与教学改革并取得丰富经验的第一线教师，编写了这套《高等学校数学讲练教程系列》辅导教材。本书是《线性代数分级讲练教程》。全书共分为六个专题，内容包括行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与矩阵的对角化和二次型等。每个专题均分为六个模块：内容提要、基本要求、释疑解难、方法指导、同步训练（分 A，B 两级习题）、学习札记。

本书的重点是"释疑解难"和"方法指导"。"释疑解难"部分对于本专题易于混淆的概念和解题过程中容易出现的错误做了简要清晰的说明，以帮助学生克服难点。"方法指导"目的是使学生通过本部分练习，加强对基本概念、基本方法的理解和掌握；强调解题方法，特别是通过提供一题多解，启发学生掌握通用方法，学会运用技巧和养成灵活多样、举一反三的科学素质。

本书按照教育部颁布的《高等学校工科本科高等数学课程教学基本要求》进行编写，注重数学思想、方法和技巧三位一体，结合了作者在教学第一线总结出的学习高等数学的认知规律与解题方法。

本书可作为高等院校工科各专业本科大学生学习线性代数的辅导教材，也可作为任课教师的教学参考书。对于报考硕士研究生的高年级大学生，本书也是复习备考的良师益友。

作者简介

仉志余 数学教授,硕士生导师。1957年12月生,山东省寿光市人。现任中北大学分校副校长,中国优选法统筹法与经济数学研究会理事,山西省数学会常务理事,山西省管理科学研究会副理事长等职。自1982年毕业于山东大学数学系以来,一直担任高校数学教学工作,同时从事数学科学研究与应用工作。研究领域主要有常微分方程与泛函微分方程的定性理论和数学在经济、管理科学中的应用等。主持或参与过多个省级和国家级科研项目并通过相应鉴定;多次参加国际国内学术会议,在国际国内重要学术刊物上发表学术论文40余篇,多篇已被ISTP、美国《数学评论》、德国《数学摘评》等收录。主参编已公开出版的《面向21世纪数学规划教材》和教育部国家级精品课程配套教材等高校数学教材6套。现承担国家自然科学基金资助课题和国家级精品课程的建设和研究等项目。曾三次被评为省部级优秀教师或优秀中青年骨干教师。2003年被评为山西省教学名师;2004年被国家教育部授予"全国优秀教育工作者"称号;2002年和2005年两次获得省级教学成果一等奖;2005年一项科技成果通过省级鉴定,达到国内领先水平。

前　　言

随着我国高等教育大众化阶段的到来，高校入学新生数学基础区间呈扩大之势已是不争的事实。为了满足不同层次学生的需要，充分体现因材施教原则，我校自 1999 年以来，对高等数学、线性代数和概率论与数理统计等课程实行了分级教学改革试点。经过四年实践，效果突出。因此，于 2003 年，经专家评审，省教育厅批准，该试点已成为省级教学改革立项课题。为了总结经验，推动教学改革向纵深层次发展，也为了配合同类高校本科各专业数学课程的教学，我们精心策划，按专题组织了多年参与教学改革并取得丰富经验的部分教师，编写了《高等学校数学讲练教程系列》。本书是其中之一的《线性代数分级讲练教程》，它是根据 1995 年国家教委颁布的《高等学校工科本科线性代数课程教学基本要求》并配合多套现行全国优秀教材《线性代数》的内容而编写的。

线性代数是工科院校各专业重要的专业基础课之一，它不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行科学研究和工程实践的必要基础，而且对学生综合能力的培养起着重要作用。如何更好地指导学生学好这门课程，加深学生对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力，是我们编写本书的目的。全书分为六个专题，内容包括行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与矩阵的对角化和二次型等。每个专题均分为如下六个模块：一、内容提要；二、基本要求；三、释疑解难；四、方法指导；五、同步训练（分 A，B 两级）；六、学习札记。书末附有同步训练的答案或提示。

“内容提要”和“基本要求”概括出本专题的内容要点和要求掌握的程度，利于学生总结梳理重点；“释疑解难”部分对于本专题易于混淆的概念和解题过程中容易出现的错误作了简要清晰的说明，

以帮助学生克服难点。“方法指导”目的是使学生通过本部分的练习，加强对基本概念、基本方法的理解和掌握；强调解题方法，特别是通过提供一题多解，启发学生掌握通用方法，学会运用技巧和养成灵活多样、举一反三的科学素质。“同步训练”分为A，B两级，A级是对基本要求进行强化训练部分，B级是综合提高部分；这两部分的习题都经过精心选择，既基本又典型，既相互照应又互不重复；重点突出，难易有度、循序渐进。在附录一中对“同步训练”中的A级题目提供了参考答案，并对B级题目给出解题要点，供读者参考。“学习札记”是为读者特设的记录学习经验和采集经典的空间。本书还特意在书末精制了五套期末模拟试题，以供读者掌握过级考试的难易程度。本书既是大学本科生学习线性代数课程有益的辅导材料，又是有志考研或专升本同学晋级的良师益友。需要说明的是：为了对解题方法进行归纳和总结，特别是有益于考研同学的综合复习与提高，我们将某些内容、例题和习题跨章进行了处理。

本书由仉志余教授任主编，王建军副教授和张晋珠任副主编。责任执笔是王建军（专题一～三）、张晋珠（专题四～六），仉志余教授负责制订编写方案、全书统稿，并对各专题内容进行了修订。此外，还有王晓霞、宋智民、樊孝仁、赵治荣、阎乙伟、阮豫红、王波、高玉洁、寇静、王颖、于彩娴、尹礼寿、郭尊光、李灿、连高社等老师也做了相应的工作。

由于编者水平和时间原因，书中不当之处在所难免，敬请各位同仁与读者不吝指正。

编　者

2006年5月于太原

目　　录

专题一　行　列　式

【一】内容提要

1. 基本概念与运算

1.1　排列及其奇偶性

由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数字组成的一个有序数组，称为一个 **n 元排列**，一般地记做 $j_1,j_2,\cdots,j_n$. 由于是全排列，故 n 元排列共有 $n!$ 个.

在一个排列中，如果有一个大的数排在一个小的数的前面，则称这两个数构成该排列的一个逆序. 排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的**逆序数**记做 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**. 在全部 $n!$ 个排列中，奇排列与偶排列各占一半.

1.2　行列式定义

由一个 n 行 n 列的正方形数表

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

（称为 **n 阶方阵**）按以下规则确定的数称为 **n 阶行列式**，记为 D 或 $|\boldsymbol{A}_n|$，或 $\det\boldsymbol{A}_n$，$\det(a_{ij})_n$，即

$$D=\det(a_{ij})_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n}(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n}(-1)^{\tau}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，τ 为此排列的逆序数，而符号 $\sum\limits_{p_1,p_2,\cdots,p_n}$ 表示对所有的 n 元排列求和，共有 $n!$ 项.

2. 重要性质与定理

2.1 行列式性质

性质 1 行列式与其转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$，其中

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2 互换两行(列)，行列式的值变号.

性质 3 行列式某行(列)的公因数，可提到行列式符号之外.

性质 4 某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上去，行列式值不变.

性质 5 若行列式某行(列)的所有元素均为两项之和，则该行列式可分解成两个相应的行列式之和.

性质 6 若行列式有两行(列)对应元素成比例，则行列式的值为零.

性质 7 行列式某行(列)的元素与另一行(列)对应的元素的代数余子式乘积之和为零.

2.2 重要定理

定理 1(拉普拉斯定理) 设 $D=\det(a_{ij})_n$ 为任意一个 n 阶行列式，则

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式.

关于代数余子式还有

推论 设 $D=\det(a_{ij})_n$ 为任意一个 n 阶行列式，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

定理 2(克拉默法则) 如果 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D=|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则这个线性方程组有唯一解:

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

其中 D_j 是将 D 中第 j 列用方程组的**常数列替代后**的 n 阶行列式.

定理 3 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是其系数行列式 $D=|\boldsymbol{A}|=0$.

3. 行列式的计算方法与重要公式

3.1 计算方法

常见行列式的计算方法:三角化、递推法、加边法、公式法、拆项法.

3.2 重要公式

设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{A}_m,\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}_n$ 均为方阵,则有下列重要公式:

(1) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}(|\boldsymbol{A}|\neq 0)$; (2) $|\boldsymbol{A}_n^*|=|\boldsymbol{A}_n|^{n-1}$;

(3) $|k\boldsymbol{A}_n|=k^n|\boldsymbol{A}_n|$; (4) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$;

(5) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$; (6) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$;

(7) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_n \\ \boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}_m|\cdot|\boldsymbol{B}_n|$;

(8) $\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$;

(9) $\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n1} & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1};$$

(10) 范德蒙德行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$$

【二】基本要求

1. 了解 n 阶行列式的定义，掌握行列式的性质.
2. 熟练掌握三、四阶行列式的计算，会计算简单的 n 阶行列式.
3. 掌握克拉默法则.

【三】释疑解难

1. 问：若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则行列式

$$D=|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|=|(a_{ij})_n\pm(b_{ij})_n|$$
$$=|(a_{ij}\pm b_{ij})_n|=|(a_{ij})_n|\pm|(b_{ij})_n|$$

是否成立？

答 最后一个等号不成立. 一般情况下，$|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|\pm|\boldsymbol{B}|$. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 6\\2 & 3\end{bmatrix},\quad 则\quad |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2 & 8\\5 & 7\end{vmatrix}=-26;$$

而 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=-2+(-9)=-11$. 即 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

类似可以验证 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|$.

2. 问：如果行列式 D 的某两行(列)对应元素成比例，则 $D=0$. 其逆命题是否也成立？

答 否. 例如, $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}=0$, 但是, D 的任意两行(列)的对应元素都不成比例.

3. 问: 计算四阶行列式时, 能否按三阶行列式的对角线法则进行?

答 不能. 二阶、三阶行列式有对角线法则, 但是不适用于四阶及其以上的行列式, 它们只能按定义或利用行列式的性质进行计算.

例如, 对于

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{vmatrix}=-4.$$

但是, 若按类似于二、三阶行列式的对角线法则, 却有

$$D=0+0+0+0-0-0-0-0=0.$$

4. 问: 关于下面行列式

$$D=\begin{vmatrix}x & y & x+y\\y & x+y & x\\x+y & x & y\end{vmatrix}$$

的计算是否正确?

解 将第 1,2 行均乘以(—1)加到第 3 行上, 并且同时把第 1 行及第 3 行乘以(—1)加到第 2 行, 得

$$D=\begin{vmatrix}x & y & x+y\\-2x & 0 & -2y\\0 & -2y & -2x\end{vmatrix}=0.$$

答 本解法的错误在于没有完成上一步的基础上来做下一步, 而是从原来的行列式出发. 结果本应对运算"将第 1,2 行均乘以(—1)加到第 3 行上"得到的行列式的第 3 行进行"第 3 行乘以(—1)加到第 2 行"的运算, 却把原行列式的第 3 行"乘以(—1)加到"新行

列式的“第 2 行”.

正确解法：将第 1,2 行均乘以(−1)加到第 3 行上，然后按第 1 列展开

$$D=\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ 0 & -2y & -2x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} x+y & x \\ -2y & -2x \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} y & x+y \\ -2y & -2x \end{vmatrix}$$

$$=-2x\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & x \end{vmatrix}+2y\begin{vmatrix} 0 & y \\ y & x \end{vmatrix}=-2(x^3+y^3).$$

5. 问：计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$ 行列式时，下面计算过程是否正确？

解 利用性质“某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上去，行列式值不变”，将第 1 行乘以 3 加到第 2 行的对应元素上，有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 18 \end{vmatrix},$$

从而 $$D=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 18 \end{vmatrix}=3\times 18-0\times 9=54.$$

答 错.将“某行(列)的 k 倍加到另一行(列)上去”应该是一个运算步骤，而不是“先将某行乘以 k 倍”后，再“加到另一行的对应元素上”.

正确解法：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 18 \end{vmatrix}=18.$$

【四】方法指导

例 1 确定 n 阶排列 $n,n-1,\cdots,2,1$ 的奇偶性.

解 因为 $\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$，若 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 为偶数，即 $n=4t+1$ 或 $n=4t$，其中 t 为正整数，则该排列为偶排列；同样讨论可知 $n=4t+2$ 或 $n=4t+3$ 时，该排列为奇排列.

例 2 写出四阶行列式 $D_4=\det(a_{ij})_4$ 展开式中含有因子 $a_{23}a_{42}$ 且带有负号的所有项.

解 这样的项应该为 $-a_{1j_1}a_{23}a_{3j_3}a_{42}$，其中行标已成自然排列，而列标组成 4 级排列 $(j_1,3,j_3,2)$，故 j_1,j_3 只能取 1,4 或 4,1. 由于 $(-1)^{\tau(1,3,4,2)}=(-1)^2=1,(-1)^{\tau(4,3,1,2)}=(-1)^5=-1$，因此满足条件的排列只有(4,3,1,2)，即所求的项为 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

例 3 利用行列式的定义证明

$$D_5=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

证明 展开式中的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,j_4,j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，其中 $a_{3j_3},a_{4j_4},a_{5j_5}$ 中至少有一个数为零，因此 $D_5=0$.

注 证明本题的关键，在于说明展开式中任何一项的取自后三行的元素中，至少有一个元素取自后三列，即展开式中任何一项都含有零因子，因此展开式中每一项都为零.

行列式的计算在本专题里既是重点，又是难点. 以数值为元素的行列式，一般的方法是利用行列式的性质把某一行(列)的元素尽量多化出一些零，然后再按该行(列)展开，降低阶数计算；或者是利用行列式的性质把行列式化为一些特殊形式的行列式，如上(下)三角形行列式、范德蒙德行列式等. 但是以字母为元素的行列式就比较复杂了，以下根据行列式的特殊类型介绍几种最常用的方法.

1. 按某行(列)展开行列式(降阶法)

例 4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

分析 此 n 阶行列式每行(列)只含两个非零元素,所以按任意行(列)展开均可,此处按第 1 列展开更方便,因为相应的代数余子式都是三角形行列式.

解 按第 1 列展开

$$D_n = x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{1+n}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= x^n + (-1)^{1+n}y^n.$$

2. 化为上(下)三角形行列式计算

例 5 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}.$$

解 把 D_n 的各列加到第 1 列上去得

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$