Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集

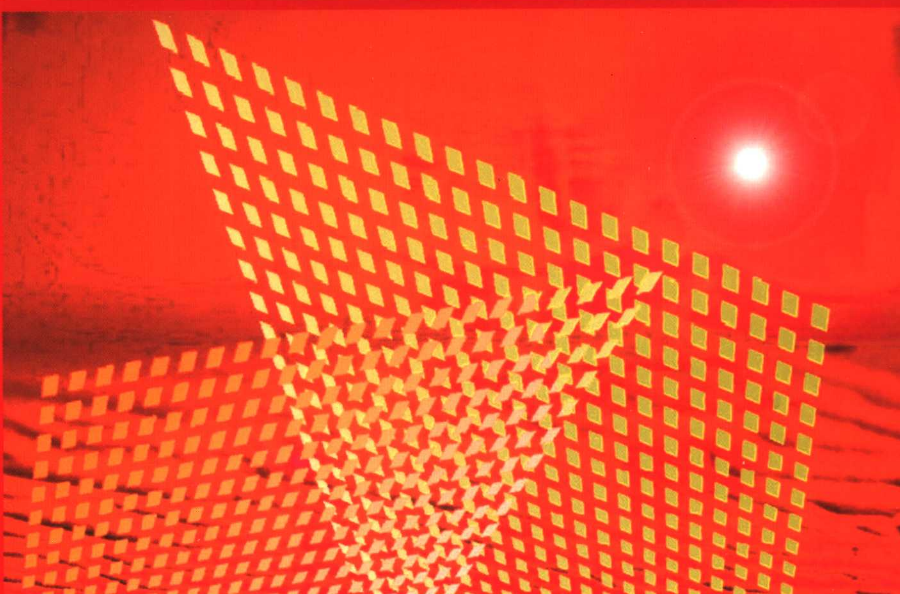
精选精解

（全一册）

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审

SHUXUE FENXI XITIJI JINGXUAN JINGJIE



山东科学技术出版社

www.lkj.com.cn

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集精选精解

（全一册）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

SHUXUE FENXI XITIJI JINGXUAN JINGJIE

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

吉米多维奇数学分析习题集精选精解/费定晖，周学圣编演—济南：山东科学技术出版社，2007.1
ISBN 7-5331-4551-8

Ⅰ.吉... Ⅱ.①费...②周... Ⅲ.数学分析—高等学校—解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第115490号

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集精选精解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn
发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路16号
邮编：250002　电话：(0531)82098071
印刷者：青岛星球印刷有限公司
地址：胶南市珠山路120号
邮编：266400　电话：(0532)88194567

开本：700mm×1000mm　1/16
印张：30.75
版次：2007年1月第1版第1次印刷

ISBN 7-5331-4551-8　　O·115
定价：39.00元

出版说明

CHUBANSHUOMING

《数学分析习题集题解》(6 卷本),由山东科学技术出版社出版以来,几经修改补充,一直畅销不衰,深受读者厚爱。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识和基本技能的训练,感到帮助很大,赞誉其为学习数学分析“不可替代之图书”。

众所周知,原书 4462 题,内容丰富,题目有浅有深;涉及的内容涵盖了数学分析的全部主题。在长期的教学实践中,我们又反复研究了原习题集,有些问题引起了我们的思考:该书题量较大,且有相当的重复率;有些题目解答运算过程冗长;部分题目难度较大;使用该书耗时较多。那么怎样才能在一定的时间内,既掌握了数学分析的基本知识和基本技能,又学到了数学分析的主要内容呢?因此,我们想到了对原书进行精选和精解。考虑到原书四位作者,均系从事高等教育近 50 年的教授,且指导研究生教学数十年,有着极其丰富的教学经验与指导能力,因此,继续由他们对全书进行精选和精解,无疑是最合适的人选。

这次选题掌握以下原则:

第一,对于通过学习,读者能独立解决的容易的习题不予选用。

第二,对于重复率高的计算题,仅选出其中有代表性的习题。

第三,对于难度很大或运算过程冗长的习题不予选用。

第四,对于一题多解或多种证明方法的习题,仅选用其中较好的解法或证明方法。

第五,对于选用的习题,相对于 6 卷本的习题解答,进行了精解或修正,使其更加注重了科学性、规范性和简明性。

第六,为保证读者数学分析基本功的训练,总题量控制在原习题集的四分之一左右。

通过精选,共对原书的 1080 题做出解答,其中证明题 274 道。一册出版。

本书精选精解工作由华东交通大学费定晖教授负责第一章,第五章,第六章,第七章和第八章,以及全书的统稿和校阅。山东大学周学圣教授负责第二章,第三章和第四章。山东大学郭大钧教授和青岛大学邵品琮教授,对全书作了重要仔细的审校,其中有的较好的解法或证明方法的习题,均出自

这两位教授的亲笔，尤其是郭大钧教授，对精解本的形成及精选原则作了积极的指导和裁定。

本书可作为大专院校师生学习和教学参考用书，也可作为广大青年自学者及工程技术人员的自学用书。特别是，可作为广大有志考研人员的指导用书。读者使用该书时，宜先独立求解，再与本书作比较，这样一定会获益匪浅，取得较多的有用知识，以及掌握丰富的数学分析基本技能。如果读者志在向科学进军的征途上更上一层楼，那就建议花点时间和精力，认真仔细阅读山东科学技术出版社出版的《数学分析习题集题解》（第三版，2005.01）的 6 卷本。

书中不当之处，恳请指正。

编　者

2006.08

目录
MULU

目 录

MULU

第一章　分析引论

§1.　实　数

1° 数学归纳法　为了证明某定理对任意的自然数 n 为真，只须证明下面两点就够了：(1)这定理对 $n=1$ 为真，(2)设这定理对任何的一个自然数 n 为真，则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真.

2° 分割　假设分有理数为 A 和 B 两类，使其满足于下列条件：(1)两类均非空集，(2)每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3)属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数，这样的一个分类法称为分割.(i)若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数.(ii)若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数.有理数和无理数统称为实数*.

3° 绝对值　假若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值：

$$|x| = \begin{cases} x, & 若\ x \geqslant 0, \\ -x, & 若\ x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，有以下的不等式成立：

$$|x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

4° 上确界和下确界　设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合，若：

(1) 每一个 $x \in X$** 满足不等式　$x \geqslant m$；

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$，存在有 $x' \in X$，使　$x' < m + \varepsilon$，

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样，若：

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式　$x \leqslant M$，

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$，存在有 $x'' \in X$，使　$x'' > M - \varepsilon$，

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界，则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界，则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差　设 $a\,(a \neq 0)$ 是被测的量的准确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差，而

---

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数.

** 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X.

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的一半,则说 x 有 n 位准确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立:

【5】 设 $a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{[0]}=1$,求证:

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个元素的组合数,由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时,由于

$$[a+b]^{[1]} = a+b \qquad 及 \qquad \sum_{m=0}^{1} C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]} = a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时,等式成立,即

$$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$(a+b)^{[k+1]} = (a+b)^{[k]} \cdot (a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{[k+1]} = (a+b-kh)\cdot \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]} \\
&= (a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} + \cdots + C_k^k a^{[0]} b^{[k]}\} \\
&= \{(a-kh)+b\} C_k^0 a^{[k]} b^{[0]} + \{[a-(k-1)h]+(b-h)\} C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]} \\
&\quad + \cdots + \{a+(b-kh)\} C_k^k a^{[0]} b^{[k]} \\
&= C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_k^0 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k]} b^{[1]} + C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]} + \cdots + C_k^k a^{[1]} b^{[k]} + C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + (C_k^0 + C_k^1) a^{[k]} b^{[1]} + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]} + C_{k+1}^1 a^{[k]} b^{[1]} + \cdots + C_{k+1}^k a^{[1]} b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},
\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时,等式也成立:

$$(a+b)^{[k+1]} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]}.$$

于是,对于任何自然数 n,有

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}. \tag{3}$$

在式子 $$a^{[n]} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中,令 $h=0$,即得

$$a^{[n]} = a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式,得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m.$$

【6】 证明:贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时,此式取等号.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时,由于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 大于 -1,所以,$1+x_i>0$.因而,有

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})&\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于 $x_ix_j\geqslant 0$,所以,

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【8】 证明不等式:

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad 当\ n>1.$$

证 当 $n=2$ 时,因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$,故不等式成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时,有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2\quad(k=1,2,\cdots),$$

从而有

$$(k+1)!<\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.

于是,对于任何自然数 n,有

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

【10】 证明不等式:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时,因为 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$,不等式显然成立.

设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n=k+1$ 而言,由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$,而上述不等式由于

$$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4,$$

因而是成立的.于是,最后得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时,不等式也成立.由数学归纳法证毕.

【11】 设 c 为正整数,而不为整数的平方,且 A/B 为确定实数$\sqrt{c}$的分割,其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数b,而 A 类包含所有其余的有理数.求证在 A 类中无最大数,而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a\in A$.若 $a\leqslant 0$,则显然存在 $a'>a(a'>0)$且 $a'\in A$.故可设 $a>0$,于是 $a^2\leqslant c$.但不可能有 $a^2=c$.因若 $a^2=c$,设 $a=\frac{p}{q}$,p 与 q 为互质的正整数,则$\frac{p^2}{q^2}=c$.由于 c 是正整数,而 p^2 与 q^2 也是互质的,故必 $q=1$,从而 $c=p^2$,此与假定矛盾,故必 $a^2<c$.下面我们证明,存在正整数 n,使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$也属于A.

上述不等式相当于:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c,\quad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a+1}{n}<c-a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此,只要取

$$n>\frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的.因此,不论 a 为A 类内怎样的数,在 A 类内总能找到大于它的数,故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中也无最小数.

实质上,此处分割 A/B 确定了一个无理数$\sqrt{c}$.

【13】 作出适当的分割,然后证明等式:

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$.

证 (1) 作确定$\sqrt{2}$的分割 A/B:一切有理数 $a\leqslant 0$ 以及满足 $a^2<2$ 的正有理数 a 都归于A类,一切满足 $b^2>2$ 的正有理数 b 归入B 类.又作确定$\sqrt{8}$的分割 A'/B':一切有理数 $a'\leqslant 0$ 以及满足 $a'^2<8$ 的正有理数 a'归入A'类,一切满足 $b'^2>8$ 的正有理数 b'归入B'类.我们知道,根据实数加法的定义,满足不等式:

$$a+a'<c<b+b' \quad (\text{对任何 } a\in A, b\in B, a'\in A', b'\in B')$$

的惟一实数 c 就是$\sqrt{2}+\sqrt{8}$.因此,如果我们能证明恒有$(a+a')^2<18$(当 $a+a'>0$ 时),$(b+b')^2>18$,则有 $a+a'<\sqrt{18}<b+b'$.于是得知$\sqrt{18}=c=\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

若 $a+a'>0$,则 a 与a'中至少有一个为正,从而由 $a^2a'^2<16$ 知 $aa'<4$,$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18$;同样,因 $b^2>2$,$b'^2>8$,$b>0$,$b'>0$,故 $b^2b'^2>16$,$bb'>4$,$(b+b')^2=b^2+b'^2+2bb'>2+8+8=18$.于是证毕.

【15】 求证:任何非空且下方有界的数集有下确界,而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性,只证本题的后半部分,分两种情形:

(1) A 中有最大数$\bar{a}$,此时,设 $a\in A$,则有 $a\leqslant\bar{a}$,说明 $\bar{a}$ 为A 的上界.又由于$\bar{a}\in A$,故对 A 的任何上界 M,均有 $\bar{a}\leqslant M$,故 $\bar{a}$ 为A 的上确界.

(2) A 中无最大数.此时,作分割 A_1/B_1:取集 A 的一切上界归入B_1 类,而其余的数归入 A_1 类.这样,A 中一切数全部落在A_1 内,A_1 及 A 均非空,且 A_1 中的数小于 B_1 中的数,这确实是一个实数分割,易知由此分割所产生的实数 β 是B_1 类中的最小数,即 β 是A 的最小上界,从而 β 是A 的上确界.

【18】 设$\{-x\}$为数的集合,这些数是与 $x\in\{x\}$符号相反的数.证明等式:

(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

证 (1) 设 $\inf\{-x\}=m'$,则有:

(i) 当$-x\in\{-x\}$时,$-x\geqslant m'$;

(ii) 对于任何的正数 ε,存在有$-x'\in\{-x\}$,使

$$-x'<m'+\varepsilon.$$

由(i)及(ii)推得:

(iii) 当 $x\in\{x\}$时,$x\leqslant -m'$;

(iv) 对于任何的正数 ε,存在有 $x'\in\{x\}$,使

$$x'>-m'-\varepsilon.$$

由(iii)及(iv)知数$-m'=\sup\{x\}$,即 $m'=-\sup\{x\}$,所以,$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

【19】 设$\{x+y\}$为所有$x+y$ 这些和的集合,其中 $x\in\{x\}$及$y\in\{y\}$.证明等式:

(1) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

证 (1) 设 $\inf\{x\}=m_1$,$\inf\{y\}=m_2$,则有:

(i) 当 $x\in\{x\}$,$y\in\{y\}$时,$x\geqslant m_1$,$y\geqslant m_2$;

(ii) 对于任何的正数 ε,存在有数 $x'\in\{x\}$,$y'\in\{y\}$,使

$$x'<m_1+\frac{\varepsilon}{2},\quad y'<m_2+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由(i)及(ii)推得:

(iii) 当 $x+y\in\{x+y\}$时(其中 $x\in\{x\}$,$y\in\{y\}$),

$$x+y\geqslant m_1+m_2;$$

(iv) 对于任何的正数 ε,存在有 $x'+y'\in\{x+y\}$ (其中$x'\in\{x\}$,$y'\in\{y\}$),使

$$x'+y'<(m_1+m_2)+\varepsilon.$$

由(iii)及(iv)知数 $m_1+m_2=\inf\{x+y\}$,即

$$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}.$$

解不等式：

【26】 $|x+2|+|x-2|\leqslant 12.$

解 令 $x-2=t$，则得

$$|t+4|+|t|\leqslant 12 \quad 或 \quad |t+4|\leqslant 12-|t|.$$

两边平方，即有 $$t^2+8t+16\leqslant 144-24|t|+t^2,$$

或 $$3|t|\leqslant 16-t.$$

将上式两端再平方，化简整理得 $$t^2+4t-32\leqslant 0,$$

于是，有 $$-8\leqslant t\leqslant 4.$$

从而得 $$-8\leqslant x-2\leqslant 4,$$

即 $$-6\leqslant x\leqslant 6 \quad 或 \quad |x|\leqslant 6.$$

【29】 $|x(1-x)|<0.05.$

解 由 $|x-x^2|<\frac{1}{20}$ 得

$$x^2-x+\frac{1}{20}>0 \quad 或 \quad x^2-x-\frac{1}{20}<0,$$

解之得
$$\begin{cases} \frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10} \\ \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x \quad 或 \quad x<\frac{5-\sqrt{20}}{10}, \end{cases}$$

即 $$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10} \quad 或 \quad \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}.$$

【40】 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差，$\delta(x,y)$ 为数 xy 的相对误差．求证：

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

证 设 $x=a+\Delta_x$，$y=b+\Delta_y$，其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值，Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差，则有

$$xy-ab=b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y,$$

于是， $$\Delta=|xy-ab|\leqslant|b|\cdot\Delta_x+|a|\cdot\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

最后得 $$\delta(xy)=\frac{\Delta}{|ab|}\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|},$$

此即 $$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 叙列的理论

1° 叙列的极限的概念 假设对于任何的 $\varepsilon>0$，有数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称叙列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 有极限 a（或者说，收敛于 a），亦即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

其中，若 $$\lim_{n\to\infty}x_n=0,$$

则称 x_n 为无穷小.

没有极限的叙列，称为发散的.

2° 极限存在的准则

(1)设

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

(2)单调而且有界的叙列有极限.

(3)哥西判别法　叙列$\{x_n\}$的极限存在的必要而且充分的条件是：对于任何的$\varepsilon>0$，有数$N=N(\varepsilon)$，使当$n>N$和$p>0$时，$|x_n - x_{n+p}|<\varepsilon$.

3° 关于叙列的极限的基本定理　设

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty} y_n$$

存在，则有：

(1)若$x_n \leqslant y_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(4)若$\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

4° 数 e　叙列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

有确定的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284\cdots$$

5° 无穷极限　符号

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

表示对于任何的$E>0$，有数$N=N(E)$，使当$n>N$时，$|x_n|>E$.

6° 聚点　设已知叙列$x_n(n=1,2,\cdots)$有子叙列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n}, \cdots$$

适合

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数ξ(或符号∞)为已知叙列$x_n(n=1,2,\cdots)$的聚点.

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点(波尔查诺——外尔斯特拉斯原理).若这个聚点是惟一的，则它即为已知叙列的有穷极限.

叙列x_n的最小聚点(有穷的或无穷的)

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n$$

称为下极限，而它的最大聚点

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

称为此叙列的上极限.

等式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

为叙列x_n的(有穷或无穷)极限存在的必要而且充分的条件.

【44】 求证：

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

无界,但当 $n\to\infty$ 时,它并不成为无穷大.

证 因为 $x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & \text{当 } n=2k,k \text{ 为自然数},\\ \dfrac{1}{2k+1}, & \text{当 } n=2k+1,\end{cases}$

所以,
$$x_{2k}\to\infty,\quad x_{2k+1}\to 0\quad (k\to\infty).$$
由于 $x_{2k}\to\infty$,故 x_n 无界;但因 $x_{2k+1}\to 0$,故 x_n 并不趋于无穷大.

设 n 跑过自然数列,求下列各式之值:

【48】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解 因为 $\sin n!$ 有界:$|\sin n!|\leqslant 1$ 及 $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\to 0(n\to\infty)$,所以,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

【52】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

解 当 $n=2k$ 时(k 为自然数),
$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\frac{3}{2k}-\cdots-\frac{2k}{2k}=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2};$$
当 $n=2k+1$ 时,
$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+1}+\frac{3}{2k+1}-\cdots+\frac{2k+1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2};$$
由于取不同方式时,所得的极限值不同,所以,极限
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$$
不存在.

【53】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\dfrac{1}{3}$.

【54】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 设 $f(n)=\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}$,由 53 题即得
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}[8f(2n)-4f(n)]=\frac{4}{3}.$$

【55】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 设 $f(n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$, $g(n)=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$,则有
$$2f(n+1)-g(n)=f(n)+1,$$
又由
$$2f(n+1)-f(n)=f(n)+\frac{2n+1}{2^n}=g(n)+1,$$
故
$$f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}.$$