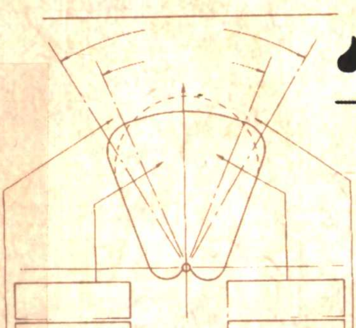
从大学数学走向现代数学

徐宗本◎主编



科学出版社
www.sciencep.com

从大学数学走向现代数学

徐宗本　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

在国家自然科学基金委员会天元基金领导小组委托西安交通大学理学院举办的“西部与周边地区高等学校非数学类数学教师培训班”上，12位教授应邀联合开设了“从大学数学走向现代数学”的系列讲座，本书即为该系列讲座的集成. 书中各篇从大学数学中的某些基本概念与原理出发，以简短的篇幅阐明这些基本概念、原理如何发展到近代数学的相关分支与内容，使读者能更清楚地了解大学数学与现代数学的联系，从而能从更高的观点和更全面的视角理解大学数学内容. 主要内容包括：从代数运算到代数结构、从有限维空间到无限维空间、从函数到算子、从序列收敛到网收敛、从导数到广义导数、从Newton-Leibniz 公式到Stokes 公式、从 Taylor 公式到学习理论、从矩阵的特征值到算子的谱、从微分方程到动力系统、从随机变量到随机过程、从数学应用题到数学建模、从 Stirling 公式到积分的渐近逼近、从平坦的欧氏空间到弯曲的黎曼空间. 全书各章内容自成体系.

本书可作为高等学校数学基础课程教师培训教材，亦可供高等院校数学及相关专业的高年级本科生、研究生和教师阅读.

图书在版编目（CIP）数据

从大学数学走向现代数学 / 徐宗本主编. —北京：科学出版社，2007
ISBN 978-7-03-018579-2

Ⅰ.从… Ⅱ.徐… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 020342 号

责任编辑：林 鹏 吕 虹 赵彦超 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静 / 封面设计：中飞时代

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 3 月第一次印刷 印张：22
印数：1—4 000 字数：435 000

定价：48.00 元

前 言

为落实国家科教兴国与西部大开发战略，从 2004 年起，国家自然科学基金委员会天元基金领导小组委托西安交通大学理学院举办“西部与周边地区高等学校非数学类数学教师培训班”. 培训班每年暑期举办，坚持聘请名师授课，已连续三年，已有来自 50 多所大学的 400 余位教师受训. 该培训班不仅受到中西部各高校广大数学教师及专家的欢迎，而且其效果之好、影响之广已远远超过预期.

除开设“大学数学课程疑难问题选讲”、“数学建模与数学实验”、“教学艺术与教学改革”等课程外，培训班的另一主体教学内容是开设“从大学数学走向现代数学”系列讲座. 该系列讲座（课程）包括 13 个专题，分别聘请了相关领域的国内知名专家讲授，旨在从大学数学中“高等数学”、“线性代数与解析几何”以及“概率统计”的某些基本知识出发，以简短的篇幅延伸至现代数学中的相关内容，使教师能更清楚地了解所教内容与相关现代数学分支的联系，从而能从更高的观点和更全面的视角理解所教内容和相关的科学思维方法. 该系列讲座开设三年来，受到学员的高度赞扬与普遍欢迎. 应广大学员与教师的要求，我们决定将本系列讲座整理出版，以期使更多未能参加培训班的教师和更多读者获益. 本书是在过去三年培训班各位主讲教师讲稿的基础上，通过教学实践，并参照天元基金领导小组的建议修改而成. 修改稿强调了从大学数学中现有相关教学内容出发，更突出体现“走向”过程，适当删减了一些过多过深的内容，讲述则力求通俗易懂，并对各专题内容间的衔接作了统一编排.

教育部原工科数学课程教学指导委员会主任、西安交通大学马知恩教授发起并具体组织了“西部与周边地区高等学校非数学类数学教师培训班”，他本人从系列讲座的主题选择到主讲教师的聘请都付出了极大的心血；西安交通大学数学系副教授易媛博士花费了大量精力审校、统一编排书稿，为本书的成稿作出了重要贡献. 对他们两位所付出的努力，编者表示诚挚的感谢. 本书是为培训班开设讲座的各位专家的集体成果，对各位专家的杰出工作与辛勤劳动，编者表示衷心感谢. 同时，也十分感谢天元基金领导小组，本书的出版与他们的信任、鼓励与支持密不可分. 最后，衷心感谢科学出版社为出版本书所作出的努力，特别是各位编审人员所付出的辛勤劳动.

徐宗本

2006 年 7 月于西安交通大学

目　录

第一章　从代数运算到代数结构

顾　沛

(南开大学, 天津, 300071)

本章以代数体系的结构为中心, 从"什么是代数运算"讲起, 分别介绍群、环、域、模的代数结构, 并介绍研究它们的基本思路和方法, 以期使读者初步了解这四种基本代数体系, 并由此懂得如何构建代数体系, 如何研究代数体系, 如何应用代数体系.

1.1　代数运算和代数结构

19 世纪初, 在天才的法国数学家 Galois(伽罗瓦) 解决"五次方程能否用根式解"的过程中, 就创造了"群"、"域"这样的代数体系, 但当时并未被其他数学家理解. 在将近二百年后的今天, 具有各种各样代数结构的代数体系, 已被广泛地应用到数学的许多分支. 以讨论和研究抽象的代数结构和抽象的代数体系为内容的"抽象代数", 也形成了一门独立的学科.

代数体系是带有代数运算的集合, 其中的运算可以有一种, 也可以有几种, 运算都具有一定的规律. 集合中不同的运算、不同的规律, 就描述了不同的代数结构. 所以, 从不同的代数运算到不同的代数结构, 就反映了不同的代数体系. 本章将沿着这样一条线索, 简略地介绍代数运算、代数结构、代数体系, 并希望使读者初步体会"抽象代数"研究客观事物的思想方法.

1.1.1　什么是代数运算

小学生就会计算

$$2+7=9,\quad 2\times 7=14,$$

并且把它们分别叫做"正整数的加法"和"正整数的乘法". 中学生还会进一步计算"有理数的加法"、"有理数的乘法"、"实数的加法"、"实数的乘法"、"多项式的加法"、"多项式的乘法"等等. 大学生则还会计算"矩阵的加法"、"矩阵的乘法"、"向量的加法"、"数与向量的乘法"等等.

这些, 都是代数运算. 那么, 它们共同的本质是什么呢?

"$2+7=9$", 本质上是一个正整数 2 与一个正整数 7, 按照某种规则共同确定一个正整数 9. 这里, 其中的"规则"是本质的, 加号"+"是表达该规则的一种形式, 是非本质的; 我们完全可以用"$*$"代替"+", 改记为 $2*7=9$, 只要规则没变, 就仍

是同一种运算, 本质没变. “$2\times 7=14$”, 本质上是一个正整数 2 与一个正整数 7, 按照某种规则共同确定一个正整数 14. 这里的规则, 显然不同于前面的规则, 因为, 同是 2 与 7, 前边确定的是 9, 这里确定的是 14. 所以这里的规则叫“乘法”, 前边的规则叫“加法”. 这里, “规则”仍然是本质的, 乘号“$\times$”是表达该规则的一种形式, 是非本质的; 我们完全可以用“$\circ$”代替“$\times$”, 改记为 $2\circ 7=14$, 甚至用“M”代替“$\times$”, 用“Y”代替“$=$”, 改记为 $2M7Y14$, 规则没变, 本质就没有改变.

类似地, 矩阵的乘法, 是矩阵集合 M_1 中的一个元素 A 与矩阵集合 M_2 中的一个元素 B, 按照某种规则, 共同确定矩阵集合 M_3 中的一个元素 C, 记为 $A\cdot B=C$, 或省略运算符, 记为 $AB=C$. 例如, 设 M_1 是全体 n 行 l 列的复矩阵, M_2 是全体 l 行 m 列的复矩阵, M_3 是全体 n 行 m 列的复矩阵. 这里, 作矩阵乘法 $AB=C$ 时, 左边矩阵 A 的列数等于右边矩阵 B 的行数, 乘积结果 C 的行数等于 AB 中左边矩阵 A 的行数, C 的列数等于右边矩阵 B 的列数, 这些是矩阵乘法运算“规则”中的一部分, 都是本质的内容.

类似地, 数与向量的乘法, 则是数集 F 中的一个元素 a 与向量集 V 中的一个元素 α, 按照某种规则, 共同确定向量集 V 中的一个元素 $a\alpha$, 可以记为 $(a,\alpha)=a\alpha$.

由此可以总结得到“代数运算”的以下定义:

定义 1.1.1 设 A, B, D 均是非空集合, 如果对于 A 中的任一个元素 a, B 中的任一个元素 b, 都能按照某种规则, 唯一确定集合 D 中的一元素 d, 则称之为 A 与 B 到 D 的一个**代数运算**.

这里,“唯一确定”四字是重要的, 本质的.

如果用直积集合和映射的语言, 也可以简单地叙述为

定义 1.1.1′ 设 A, B, D 均是非空集合, 则直积集合 $A\times B$ 到 D 的一个映射 f, 称为 A 与 B 到 D 的一个**代数运算**.

这就是说, 若有 $a\in A$, $b\in B$, 则 $(a,b)\in A\times B$, $f((a,b))=d\in D$, 就说 a 与 b 运算的结果是 d. 常记 $f((a,b))$ 为 $a\circ b$, 于是上面的运算就写成了 $a\circ b=d$. 为了区别不同的运算规则, 有时也把代数运算的符号“$\circ$”改记为“$+$”或“$\times$”, 于是就有了

$$2+7=9 \text{ 和 } 2\times 7=14$$

的写法, 也就有了“加法”、“乘法”以及“数乘”等关于运算的叫法. 在乘法或数乘等运算中, 常常把符号“$\circ$”省去, 记 $a\circ b$ 为 ab.

例 1.1.1 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathbf{R}$ 是实数集, 则求 V 中的两向量 α,β 的内积, 就是 V 与 V 到 $\mathbf{R}$ 的一个代数运算.

例 1.1.2 设 $A=\{$甲, 乙$\}$, $B=\{$甲, 乙$\}$, $D=\{$奇, 偶$\}$, f 是一个 $A\times B$ 到 D 的映射: (甲, 甲)$\mapsto$ 奇, (乙, 乙)$\mapsto$ 奇, (甲, 乙)$\mapsto$ 奇, (乙, 甲)$\mapsto$ 偶, 它也是一个 A 与 B 到 D 的代数运算.

当 A, B 都是有限集合的时候, A 与 B 到 D 的代数运算, 常用一个表来说明, 叫做"**运算表**". 例 1.1.2 的运算表为

∘	甲	乙
甲	奇	奇
乙	偶	奇

这里, 竖列中的"甲, 乙", 指集合 A 中的元素, 横行中的"甲, 乙", 指集合 B 中的元素.

通常较多用到的代数运算, 是 $A=B=D$ 时的情形, 即 A 与 A 到 A 的代数运算, 也称为 A 中的"**二元运算**"或简称为"**运算**". 此时也说"集合 A 对于该运算是封闭的". 一个集合中, 可以只有一种运算, 也可以有加法、乘法等多种运算.

1.1.2 代数运算的规律

代数运算, 是用来描述客观事物的. 而我们感兴趣的是客观事物中的规律性, 所以我们感兴趣的运算, 常常是满足某种规律的运算. 运算的规律, 例如有针对一种运算而言的结合律和交换律, 有针对两种运算而言的分配律, 它们都是数集中相应运算规律的推广.

定义 1.1.2 设集合 A 中有一种二元运算"∘", 如果

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c),\quad \forall\, a,b,c\in A,$$

则称该运算满足**结合律**.

定义 1.1.3 设集合 A 中有一种二元运算"∘", 如果

$$a\circ b=b\circ a,\quad \forall\, a,b\in A,$$

则称该运算满足**交换律**.

定义 1.1.4 设集合 A 中有两种代数运算"∘"和"+", 如果

$$a\circ(b+c)=(a\circ b)+(a\circ c),\quad \forall\, a,b,c\in A,$$

则称该运算满足"∘ 对 + 的分配律", 简称满足**分配律**.

例 1.1.3 设 $\mathbf{Z}$ 是全体整数的集合, $\mathbf{Z}$ 中的二元运算是数的减法, 则由

$$(5-4)-7\neq 5-(4-7),\quad 5-4\neq 4-5,$$

知该运算既不满足结合律, 也不满足交换律.

例 1.1.4 设 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 是复数域上全体 $n(n\geqslant 2)$ 阶方阵的集合, $\mathbf{C}^{n\times n}$ 中有两种运算, 一种是矩阵的加法, 一种是矩阵的乘法. 则加法运算既满足结合律, 又满足交

换律; 乘法运算满足结合律, 但不满足交换律; 乘法对加法满足分配律, 加法对乘法不满足分配律.

结合律的一个重要作用, 是使表达式 $a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n$ 有"一义性", 即这时无论怎样加括号, 运算的结果都是一样的, 这就给我们带来了方便. 本章中涉及到的运算都满足结合律.

交换律的一个重要作用, 是使等式 $(ab)^n = a^n b^n$ 成立. 本章中涉及的运算, 有的满足交换律, 有的不满足交换律.

分配律的一个重要作用, 是使一个集合中的两种运算之间产生一种联系.

除了结合律、交换律和分配律以外, 有的运算还满足其他一些规律 (例如消去律).

1.1.3 什么是代数结构

代数结构是指**代数体系**的结构. 一个代数体系首先是一个集合, 其次是这个集合中定义有一种或多种运算, 或者还与另一个集合共同定义有运算, 再其次是这些运算满足某些规律. 一种代数结构, 就是一个代数体系作为一个集合的构造, 它既包含这个集合, 也包含这个集合中定义的运算, 以及这些运算所满足的规律.

例如整数集合 $\mathbf{Z}$ 的代数结构, 首先是包含正整数、负整数和零这些元素组成的集合, 其次是包含这个集合中定义的加法运算和乘法运算 (减法可以看作加法的逆运算, 而除法在整数集中不封闭, 或者说整数集中不定义除法运算), 再其次是包含该种加法和乘法运算所满足的规律, 如加法的结合律、交换律, 乘法的结合律、交换律, 乘法对加法的分配律, 以及乘法的消去律:

$$a \neq 0, \quad ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c, \quad a, b, c \in A.$$

如果再仔细挖掘, 还会发现这种运算的另一些规律. 例如"加法有 0": 存在 $0 \in \mathbf{Z}$, 使 $\forall\, a \in \mathbf{Z}$, 都有 $0 + a = a + 0 = a$, 即整数集 $\mathbf{Z}$ 中有这么一个特殊的元素 0, 0 加任一整数, 都保持该整数不变. 再例如"乘法有 1": 存在 $1 \in \mathbf{Z}$, 使 $\forall\, a \in \mathbf{Z}$, 都有 $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, 即整数集 $\mathbf{Z}$ 中有这么一个特殊的元素 1, 1 乘任一整数, 都保持该整数不变. 再例如"加法有负": $\forall\, a \in \mathbf{Z}$, 存在 $-a \in \mathbf{Z}$, 使 $a + (-a) = (-a) + a = 0$, 即对于整数集 $\mathbf{Z}$ 中任一元素 a, 都存在整数集中的一个元素 $-a$, 使之与刚才那个元素 a 相加后, 恰巧得到前面提到的那个特殊元素 0; 称 $-a$ 为 a 关于加法的负元素, 因此, 整数集中任一元素关于加法都有负元素, 简称"加法有负". 此外, 整数集中还有"乘法对加法的分配律".

这里我们说到整数集 $\mathbf{Z}$ 作为一个代数体系的代数结构. 其实, 代数体系虽然是千差万别的, 但某些代数体系可能有共同的本质. 我们有必要把具有共同本质的代数体系集中起来, 统一研究, 寻找它们的共同规律.

例如, 一个数集可以被看作是一个线性空间, 一个矩阵集也可以被看作是一个线性空间, 一个平面也可以被看作是一个线性空间, 一个由数组构成的集合也可以被看作是一个线性空间, 一个由多项式构成的集合也可以看作是一个线性空间. 那么, 为什么我们不把线性空间这种代数体系共同的本质集中起来, 抽象出共同的代数结构, 去寻找它们共同的规律呢?

"线性代数" 中, 关于线性空间有许多介绍, 我们在此用 "代数运算及其规律" 的语言, 再次给出线性空间的定义, 以便理解抽象的代数体系、抽象的代数结构.

定义 1.1.5 设 F 是一个数域, V 是一个非空集合. 定义 V 中的一个二元运算, 称作加法, 用记号 "+" 来表达. 又定义 F 与 V 到 V 的一个代数运算, 称作纯量乘法, 用记号 "·" 来表达. 如果上述加法和纯量乘法满足以下 8 条规律, 我们就说, V 对 "+"、"·" 而言, 构成了 F 上的一个线性空间. 这 8 条规律是: $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in V$, $\forall\, a, b \in F$, 有

(1) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(2) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(3) $\exists 0 \in V$, 使 $0+\alpha=\alpha$;

(4) $\exists \alpha' \in V$, $\alpha+\alpha'=0$;

(5) $a\cdot(\alpha+\beta)=a\cdot\alpha+a\cdot\beta$;

(6) $(a+b)\cdot\alpha=a\cdot\alpha+b\cdot\alpha$;

(7) $(a\cdot b)\cdot\alpha=a\cdot(b\cdot\alpha)$;

(8) $1\cdot\alpha=\alpha$.

在线性空间的定义里, 数 1 与 V 中任一元素 α(称为向量) 作纯量乘法的结果, 都仍然是那个元素 α, 自然会问, 有没有规律 "$0\cdot\alpha=0$" 呢? 如果有, 是否也应把这条规律写入上述定义呢?

事实上, 有规律 "$0\cdot\alpha=0$", 因为它可以从

$$a\cdot\alpha+0\cdot\alpha=(a+0)\cdot\alpha=a\cdot\alpha$$

两边再加上 $a\cdot\alpha=0$ 的负元素 $-(a\cdot\alpha)$ 得到. 但是, 它不必被写入上述定义, 因为它可以由定义中的内容推出来, 我们不妨把它称为线性空间的一条 "性质".

由于线性空间的这一抽象定义中, 给出了这一代数体系的基本的代数结构, 我们就可以由定义出发, 去寻找和研究这一代数体系的各种共同的规律.

经过线性代数中的大量研究, 我们发现, 同一个数域 F 上的线性空间, 还可以有不同的代数结构, 这里的本质是线性空间的维数. 对于同一个数域 F 上的线性空间而言, 维数相同的线性空间有相同的代数结构, 称为 "同构", 维数不同的线性空间有不同的代数结构. 于是有

定理 1.1.1　设 V_1 与 V_2 都是数域 F 上的线性空间, 则 V_1 与 V_2 同构的充分必要条件是 V_1 与 V_2 有相同的维数.

例如复数集 $\mathbf{C}$, 既可以看作实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间, 又可以看作复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间, 当 $\mathbf{C}$ 看作 $\mathbf{R}$ 上的线性空间时, 是 2 维线性空间; 当 $\mathbf{C}$ 看作 $\mathbf{C}$ 上的线性空间时, 是 1 维线性空间. 这两种线性空间具有不同的代数结构.

由此看到, 用代数运算和代数结构的思想、方法与语言, 去研究和描述客观世界, 会产生强大的威力.

1.1.4 关于运算的同余关系

在研究一个集合的代数结构时, 常常要把集合分解成一些子集来讨论. 这时就要用到集合的分类; 当集合中有运算时, 还要用到集合中关于运算的同余关系. 为了叙述"同余关系", 下面先介绍"关系"和"等价关系"的概念.

我们知道, 实数集合中有"大于"、"小于"、"等于"这些关系, 也知道 n 阶复方阵集合中有"相合"、"相似"这些关系. 现在我们把关系的本质抽象出来.

如果有一种性质 R, 使集合 A 中任意两元素 a, b, 或者"有性质 R", 或者"没有性质 R", 二者必居其一且仅居其一, 就说"R"给定了 A 中的一个关系. 当 a, b 有性质 R 时, 称 a 与 b 有关系, 记为 aRb; 当 a, b 没有性质 R 时, 称 a 与 b 没有关系, 记为 $a\not R b$. 例如, 用 R 表示实数集中的"$\leqslant$"关系时, 就有 $3R5$, $3R3$, $5\not R3$.

集合 A 中"有性质 R"的两个元素 a, b, 如果改记为 (a,b), 就是直积集合 $A\times A$ 的一个元素. 满足"有性质 R"这一条件的全体 (a,b), 就构成了 $A\times A$ 的一个子集, 不妨把这个子集仍记为 R, 于是

$$aRb \Leftrightarrow (a,b)\in R.$$

这样, 我们就可以用 $A\times A$ 的一个子集, 来刻画 A 中的一个关系.

定义 1.1.6　设 A 是一个非空集合, R 是 $A\times A$ 的一个子集, $a,b\in A$, 若 $(a,b)\in R$, 则称 a 与 b 有关系 R, 记为 aRb, 且称 R 为 A 的一个**关系**(或**二元关系**).

在不致引起混淆时, aRb 也可记为 $a\sim b$.

例 1.1.5　实数集 $\mathbf{R}$ 中的"$\leqslant$"关系, 可以用 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中的子集 $\mathbf{R}_1$(如图 1.1) 来刻画, 实数集中的"$=$"关系, 可以用"$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$"中的子集 $\mathbf{R}_2$(如图 1.2) 来刻画.

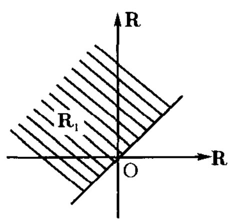


图 1.1

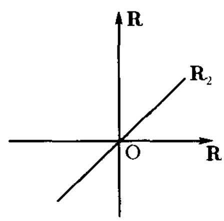


图 1.2

实数集中的“=”关系, 可以总结推广为一般集合中的等价关系.

定义1.1.7 若集合 A 中的一个关系 R 满足

(1) 反身性: $aRa, \quad \forall\, a \in A$;

(2) 对称性: $aRb \Rightarrow bRa, \quad \forall\, a, b \in A$;

(3) 传递性: $aRb, bRc \Rightarrow aRc, \quad \forall\, a, b, c \in A$,

则称关系 R 为 A 的一个等价关系. 所有与 a 等价的元素构成的集合, 称作以 a 为代表的**等价类**, 记为 $\bar{a}$. A 中所有等价类 (重复的只取一个) 构成的集合 $\{\bar{a}\}$, 称为 A 对 R 的商集合, 记为 A/R.

例 1.1.6 实数集中的“$\leqslant$”关系不是等价关系, 因其不满足对称性.

例 1.1.7 n 阶复方阵集合中的“相合”是等价关系, “相似”也是等价关系. 可见, 同一集合中可以有几种不同的等价关系.

定义 1.1.8 设集合 A 中有二元运算“$\circ$”, 如果 A 的一个等价关系 R 在该运算下仍然被保持, 即

$$aRb,\ cRd \Rightarrow (a \circ c)R(b \circ d), \quad \forall\, a, b, c, d \in A,$$

则称 R 为 A 中关于运算“$\circ$”的一个**同余关系**. 此时, a 为代表的等价类 $\bar{a}$, 也叫做 a 的**同余类**.

例 1.1.8 设 $\mathbf{Z}$ 为整数集, $0 \neq m \in \mathbf{Z}$, 在 $\mathbf{Z}$ 中定义关系 R 为 $aRb \Leftrightarrow m|(a-b)$, 则 R 关于 $\mathbf{Z}$ 中的加法和乘法都是同余关系.

此例中的关系 R, 也称为“以 m 为模的**模等关系**” aRb 在初等整数论中记为

$$a \equiv b (\operatorname{mod} m),$$

称为“对模 m, a 与 b 模等”或“对模 m, a 与 b 同余”.

例 1.1.9 设 $F^{n\times n}$ 是数域 F 上的所有 $n(n \geqslant 2)$ 阶方阵的集合, 在 $F^{n\times n}$ 中定义关系 R 为

$$ARB \Leftrightarrow |A| = |B|, \quad |A|, |B|\text{分别为}A, B\text{的行列式},$$

则 R 关于 $F^{n\times n}$ 中的加法运算不是同余关系, R 关于 $F^{n\times n}$ 中的乘法运算是同余关系.

设 R 是集合 A 中关于运算“$\circ$”的同余关系, 则因同余关系是等价关系, 所以可以产生新的集合 —— 商集合 A/R; 又因同余关系在运算“$\circ$”下自然保持, 所以又可以在 A/R 中产生一种与 A 中运算“$\circ$”有联系的运算 $\bar{\circ}$:

$$\bar{a}\bar{\circ}\bar{b} = \overline{(a \circ b)}, \quad \forall\, a, b \in A.$$

要说明上面的规定确实是 A/R 中的一个二元运算, 就要说明等号右边的元素, 确实是被等号左边有次序的两个元素 $\bar{a}, \bar{b}$ 唯一确定的. 即在等价关系又是同余关系时, 等价类的运算不仅归结为代表元的运算, 而且不依赖于代表元的选择. 我们把它的证明留给读者作为练习.

1.2 群

从这节开始, 我们将陆续简要介绍几种常用的代数体系的代数结构. 与一般的教科书不同, 我们的介绍把重点放在该代数体系的运算和结构上, 以及这些运算和结构的背景和由来上面. 我们不过多地追求知识的系统性和严密性, 而比较注重其中蕴含的数学思想、数学精神、数学方法、数学形象.

1.2.1 对称与群

首先介绍最常用的也是最重要的代数体系 —— 群的概念的一种原型, 或者说一种由来.

许多数学家说 "对称即群". 这表明, "对称" 与 "群" 之间有密切的关系, 我们就从对称谈起. "对称", 从字面上讲就是相对又相称. 例如, 雪花是对称的, 碎纸片不是对称的; 照镜子时你与镜子中的你是对称的, 照哈哈镜就不出现对称; 体育比赛的循环赛制每个队与其他所有队都要比赛, 显示出对称性, 淘汰赛制就不对称, 一个队在不同的位置上将会遇到不同的对手. 客观世界中有众多的对称, 我们要考虑, 各种各样的对称, 它们共同的本质是什么? 用什么样的数学把它描述出来?

我们从熟悉的平面图形的对称入手, 去探讨对称的数学描述. 人们可能会说, 大圆与小圆有相同的对称性, 大正方形与小正方形有相同的对称性, 正六边形比正三角形更对称些, 正三角形比等腰三角形更对称些, 等腰三角形比一般三角形更对称些. 但是如果问: 正三角形与正方形, 谁更对称些? 该怎样回答呢? 这就需要把 "平面图形的对称" 这个概念搞得更确切些.

我们知道, 平面图形的基本对称可以分为三类: 轴对称、n 次中心对称和平移对称 (图 1.3). 用运动的观点来描述, 说等腰三角形 K_5 关于直线 l "轴对称", 是指当平面关于直线 l 作反射时, 图形 K_5 整体上不变, 在平面关于 l 的反射下, 平面上大多数的点都变了. 这是一种运动, 一种变化; 但在这种变化下, 有的图形如 K_5 整体上就不变, 有的图形如 K_6 整体上就变了 (图 1.4). 这种差异是图形本身的对称性不同造成的. 这种 "变中有不变" 的整体不变性, 反映了该事物在对称性方面的某种本质.

说正六边形 K_3 是 "6 次中心对称", 用运动的观点, 是指当平面绕中心 O 逆时针旋转 $360°/6$ 时, 图形 K_3 整体上不变 (图 1.5). 又是 "变中有不变"!