

中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数学(第二册) 教学参考书

财经类中专数学教材编写组 编

高等教育出版社

中等~~专业学校~~试用教材

财经类专业通用

数 学

第二册

教学参考书

财经类中专数学教材编写组 编

高等教育出版社

本教学参考书是以国家教委 1987 年审定的财经类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲（试行草案）》为依据，为配合财经类中专数学编写组编《数学》的教学而编写的，与教材相配套，分四册出版，本书是第二册。可供财经类中专数学教师参考。

(京)112号

中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数 学

第二册

教学参考书

财经类中专数学教材编写组 编

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

崇明红卫印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 5 字数 101,000

1991 年 5 月第 1 版 1994 年 2 月第 4 次印刷

印数 12,056—15,305

ISBN 7-04-002650-3/O·1009

定价 2.20 元

序 言

本教学参考书是根据 1987 年国家教育委员会审定的财经类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲(试行草案)》和财经类中专数学教材编写组编写的财经类专业通用《数学》教材编写的。

本教学参考书共分四册,可与上述教材配套使用。主要包括上述教材各章的目的要求、教材内容说明、教学建议、各章小结、部分习题的提示或解答和一些参考题等。

本书是由国家教委组织的财经类中专数学教材编写组编写的。第一、二两册由北京市供销学校贝虹编写,第三册由上海金融专科学校姚叠叁编写,第四册由南京铁路运输学校沈清编写,全书由主编沈清统稿。

本书由全国中专数学课程组组织审稿。参加第二册教学参考书审稿会的有任必、秦柏前、吴伟贤、胡伯权、袁际奎、刘玲。

在编写过程中,曾得到有关单位的大力支持和协助,谨在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平所限,如有不当之处,恳请广大读者批评指正。

财经类中专数学教材编写组

一九八九年八月

目 录

*第七章	立体几何简介.....	1
第八章	直线.....	34
第九章	二次曲线.....	59
第十章	排列 组合 二项式定理.....	94
第十一章	数列.....	127

*第七章 立体几何简介

一、目的要求

1. 理解平面的概念和它的基本性质, 了解直线与直线, 直线与平面、平面与平面的位置关系; 理解异面直线, 直线与平面之间所成的角; 理解二面角、二面角的平面角的概念. 理解三垂线定理及其逆定理, 并会利用它们进行计算.

2. 掌握正棱柱、正棱锥、正棱台和圆柱、圆锥、圆台以及球的表面积的计算公式; 掌握柱、锥、台、球和拟柱体的体积计算公式.

二 教材说明

我们在生活中接触到的物体的形状都是空间图形, 所以理解空间图形的有关概念, 了解它们的基本位置关系和主要性质, 掌握其中一些简单空间图形(柱、锥、台、球)的表面积和体积计算, 是解决有关实际问题所必须的. 但由于课时有限和财经专业的特点, 所以本章仅供财经类中专某些专业选用.

学生在小学数学中已学过三角形、矩形、梯形、圆等平面图形的面积和长方体、球等空间图形的体积计算公式, 初中又系统地学习了平面几何的知识, 立体几何中相当一部分结论是对平面几何知识进行类比和推广而得出的, 不少立体几何问题又需转化为平面几何问题才能求解, 因此本章既是平面几何课程的继续和发展, 又有本质区别; 在立体几何中需要

把空间图形画在平面上,这些示意图虽有立体感,却不可能完全真实地表现出相应的元素间的关系:如圆要画成椭圆、直角处于不同位置时要画成不同大小的锐角或钝角;又如倾斜或垂直位置关系,一些线段的长短、角度的大小,从图形中都难以直观地进行比较,所以学习本章时要帮助学生建立空间概念,注意引导学生把立体问题转化为平面问题来考虑,要适当结合实物模型的观察来帮助学生分析立体图形的空间关系,培养空间想像力。

本章共分六节,第一节是平面及其基本性质。教材指出平面是广阔无涯、无厚度的,日常所见的简单平面图形可看作平面的一部分;教材介绍了平面的表示法,以及平面图形在水平平面内示意图的画法;最后讲解了表达平面性质的三个公理和三条推论。

第二节是直线与直线的位置关系,异面直线所成的角。教材通过实例的分析,给出了异面直线的定义,归纳出空间不重合两直线的三种位置关系,并介绍了异面直线的画法。教材又给出了空间平行直线的传递性——三线平行定理,并用生活经验加以验证。然后借助于平行四边形的性质证明空间两角相等的定理,在此基础上给出了异面直线所成角的定义。

第三节是直线与平面的位置关系。教材通过观察周围的实际事物,归纳出直线与平面的三种位置关系,给出空间直线与平面平行以及直线与平面相交的定义,并介绍了二者的画法。然后又给出了直线与平面平行的判定定理和性质定理、直线与平面垂直的定义和定理,斜线和射影的概念以及有关的定理,并应用三角形的边角关系证明了平面的斜线与它在平面内的射影所成的角是它与平面内一切直线所成角中最

小的一个，从而给出斜线与平面所成角的定义。本节最后证明了三垂线定理和它的逆定理。

第四节是平面与平面的位置关系。教材通过实例的分析给出两个平面相互平行的定义，归纳出空间不重合两平面的两种位置关系，并介绍了它们的画法。然后教材用反证法证明平面与平面平行的判定定理，并给出它的两个推论；又按定义证明了平面与平面平行的性质定理。在讨论平面与平面相交时，教材首先定义二面角及其平面角，然后研究平面与平面垂直的判定定理和性质定理。

第五节是多面体。教材在介绍了多面体的一般概念后，定义了棱柱、棱锥、棱台，并介绍它们的性质和表面积、体积计算公式，最后讲解拟柱体的定义和体积的计算公式。

第六节是旋转体。教材在介绍了旋转体的一般概念后，给出了圆柱、圆锥、圆台、球、球缺和球台的定义，性质以及它们的表面积和体积的计算公式。

本章的重点是

1. 平面的概念和它的基本性质；
2. 异面直线的概念和直线与直线、直线与平面所成的角、平面与平面的位置关系以及二面角的概念；
3. 利用三垂线定理及其逆定理进行计算；
4. 掌握柱、锥、台、球上的线、面关系，以及它们的表面积和体积的计算。

本章的难点是

1. 建立空间观念，能正确得出空间图形中有关线、面间的相互位置和度量关系。

2. 正确分析柱、锥、台、球等几何体上点、线、面等元素间的关系，并选用恰当的定理、公式解决有关问题。

因为平面的概念和性质是研究本章的基础，关于空间直线与平面的各种位置关系都在这个基础上讨论，所以它是本章的第一个重点；异面直线和直线与平面所成的角；平面与平面的位置关系、二面角的概念以及三垂线定理及其逆定理，一方面是研究空间直线与平面间各种位置关系的重要依据，另一方面在具体讨论多面体和旋转体，计算它们的表面积和体积时也常常用到，是本章的另一个重点；多面体和旋转体的表面积、体积计算，在实际中有许多应用，是选学本章的学生应掌握的，所以也是本章的重点。

学生虽然在生活中接触过许多实物，但对空间图形的线、面关系没有进行过系统的观察和分析，特别是因为立体几何图形只能画在平面上，它与学生熟悉的平面几何图形虽有联系更有区别，如何透过立体图形的平面示意图，想象出几何体的真实结构和线面关系，需要克服平面几何识图的思维习惯，在认识上有个飞跃。所以空间观念的建立和几何体上各元素间的相互位置与度量关系的分析是本章难点之一；在正确分析柱、锥、台、球这些几何体的线面关系的基础上，如何选择适当的定理、公式进行计算，有一定的难度，因此也是教学中必须重视的难点之一。

本章教学约需 20 学时，具体分配如下（仅供参考）：

§ 7-1	平面及其基本性质	约 1 学时
§ 7-2	直线与直线的位置关系	
	异面直线所成的角	约 2 学时
§ 7-3	直线与平面的位置关系	约 3 学时
§ 7-4	平面与平面的位置关系	约 4 学时
§ 7-5	多面体	约 4 学时
§ 7-6	旋转体	约 4 学时

三 教学建议

§7-1 平面及其基本性质

1. 平面是一个只描述而不定义的最基本的概念，是构成空间图形的最基本的元素，也是人们日常生活中到处接触的一个几何概念。教材一开始就提出平面是广阔无涯无厚度的，但学生往往由于日常接触的具有“平面”的物体，如黑板、桌面、窗玻璃等等都有边界，就误以为平面是有限的，四面有边的。由此出发，进而误以为两个平面可以交于一点或交于一条线段等等。教学中要注意纠正这个误解，通常可用直线是可以无限延伸的类比得出平面也是可以无限延展的。

2. 讲解平面的示意图时，可以观察教室中的黑板、桌面、窗玻璃等，归纳出平面示意图的画法。要特别强调教材第1页图 7-1 中平行四边形的周界线事实上是不存在的，只是借助有限的图形来表示无限的平面。通过这些解释要使学生从一开始就认识到这一点。为了帮助学生做到这点，可以在讲完教材第2页图 7-2 后，练习将平面向一侧或几侧作适当延展。图 7-1 之(1)、(2)是不完整的：(1)左图中 α 与 β 两平面现在只画出一个交点 A ；(2)左图中 α 与 β 两平面本应相交但未画出交线，让学生练习将这两图按习惯的画法画完整，其结果如箭头右侧所示，画出两平面的交线，并且被遮住部分不画或画虚线，这样就有了立体感。

关于平面图形在水平平面内的一般画法，是按画法几何的规定，即规定横边与竖边长度为 $1:\frac{1}{2}$ ，直角变 45° 角。但

在财经专业，可不必要求过高，在横、竖两方向线段的长短上需要有一定的比例，角度上有一定倾斜就可以了。

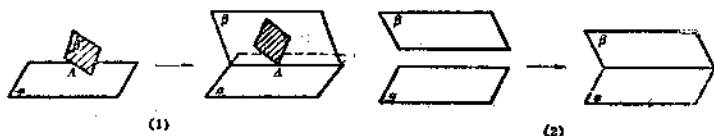


图 7-1

3. 平面的基本性质是研究空间图形的理论基础，要着重讲清描述平面特性的三个公理和三个推论的条件和结论，并多举一些相应的实例来验证这些命题，帮助学生理解。

公理 1 揭示了点、线、面的内在联系和从属关系，它一方面可以用来判定直线是否在平面内，另一方面又可用来检验一个面是否是平面。如在工厂中检验一个台面是否刨平，可用直尺一边紧贴台面四处滑动，并在尺的一侧打入灯光看另侧是否漏光，不漏光才为平面；又如瓦工抹墙面用直尺作刮刀刮掉凸起的墙泥，填补凹陷处，都是用此原理。

公理 2 应强调平面是广阔无涯的，因此两个平面若交于一点，它必然相交于过这点的一条直线，使学生想象出平面延展后的结果。

公理 3 给出了确定平面的条件，讲解时要突出“不在一条直线上”以及“任意三点”这几个字，因为不论过一点，还是过两点以及过同直线上三点也能作平面，但可作无数个；还要向学生说明，如果多于三个点，则不一定能确定一个平面，从而使学生会到前述字样的重要性。在此基础上，再进一步解释“存在”且“仅存在”，指出“存在”指“有”这样的平面，“仅存在”指“只有”一个。从而加深

对“确定一个平面”的理解。

本节最后讲了公理3的三个推论。这些确定平面的推论在后面将要用到，因为具体研究空间图形中角度和线段长度时，常常需要分析哪些重要的点、线在同一平面内，然后运用平面几何知识去求解。要找出上述平面，就必须理解本节的公理和推论，因此本节的教学将直接影响下阶段的学习效果。

§7-2 直线与直线的位置关系

异面直线所成的角

1. 由于在平面几何中学生已经很熟悉两直线不平行就相交的性质，所以在讲解空间两直线的位置关系时，从一开始就必须处处提醒学生从立体空间的角度思考问题，不仅看到与平面几何相同处，也要看到相异处。要强调通过对周围事物的观察来引入新概念。比如可通过对黑板上下边沿与各条墙缝位置关系的观察引导学生分析出，空间两直线除平行、相交外还有第三种位置关系，即既不平行也不相交，从而引出异面直线的概念。

2. 异面直线的概念是本节的重点。一方面由于学生受平面几何思维习惯的干扰，容易误认为空间直线也是不平行就相交，不相交就平行；另一方面对定义中“不在同一平面内”的字样往往不易理解，所以必须向学生说明“不在同一平面内”指“不可能在任何一个平面内”，而不是指“不在某一个平面内”。因此分别在某两个平面内的两条直线不一定是异面直线，它们有可能相交，也有可能平行，图7-2就描述了这方面情况。通过这些例子使学生加深对异面直线概念的理解。

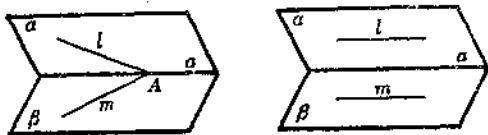


图 7-2

画异面直线时，可以根据其定义，以辅助平面为衬托。正如教材第 8 页图 7-8 所说明的，要突出两条直线不可能共面的本质特点。

3. 在定义异面直线之后，教材在第 8 页上给出了空间不重合的两直线位置关系的分类。分类可以按公共点的个数来分，也可以按是否在同一平面内来分，教材上的分法是二者的结合。

4. 空间的三线平行定理（第 8 页定理 1）与平面上三线平行定理相类似，因其结论明显，故证明从略。它是推证空间等角定理（第 9 页定理 2）和讨论平行问题的依据，所以一定要多举实例使学生加深对此定理结论的印象。教材随后给出空间等角定理的证明，本章教材只给出了 7 个定理的证明过程，这里是第一个。其证明方法是利用两条平行线段一定共面的性质再利用平面几何中平行四边形的知识去解决的。这种把空间图形转化到平面上去解决的方法将多次用到。

5. 本节最后定义了异面直线所成的角，它是异面直线位置关系中关于倾斜程度的描述，在下阶段求几何体表面积、体积时很有用，是本章的重点之一。讲解这个定义要着重三点：

（1）定义中空间一点是任取的，它可以在空间，也可

以在两直线中任意一条上；

(2) 规定只取锐角或直角为异面直线所成的角，当异面直线成直角时称两直线垂直；

(3) 异面直线所成的角决不是两条异面直线直接相交所成的角，而是从空间同一点分别引它们的平行线相交而成的角，它们的量度是唯一确定的。

定义了异面直线所成的角，就把角的概念从平面上两直线方向的变化扩展为任意两直线方向之间的变化。将空间直线平行移动时，直线的方向不变，直线间所成的角也不变，这个特点在解决实际问题时常常有用。

教材第11~12页例2讨论了正方体上有关直线间所成的角，研究这类问题对培养学生空间观念十分必要，解决的方法就是通过作平行线把异面直线所成的角用同一平面的角表示，然后利用平面几何知识求出角的大小。学生只要真正理解异面直线所成角的概念，能有目的地对某些直线进行平行移动，在某一平面上找出与它相等的角，就能顺利解决这类问题。

按大纲的要求，本教材不介绍异面直线的公垂线和距离的概念，教师不必扩充这个内容。

§7-3 直线与平面的位置关系

1. 教材首先归纳了直线与平面的三种位置关系，在提出这三种关系前可以多举一些学生熟悉的实例，诸如：

(1) 球场的界线在地面上；黑板上画的直线在黑板面上；——直线在平面内。

(2) 旗杆插在地面上；羊角天线插在电视机外壳的截面上；——直线与平面相交。

(3) 教室的日光灯管与天花板面；架好的输电线与地面；——直线与平面平行。

但由实例抽象出直线与平面的位置关系时，应把天花板、地面等等想象为水平平面；旗杆、羊角天线、日光灯管等想象为不同位置的直线，然后分析这些直线与平面有多少公共点，在此基础上，给出直线与平面平行及相交的定义。

空间的直线与平面除直线在平面内的情形外，不平行就相交。教学时，应注意教材中对直线和平面位置关系的几种表示方法。

2. 直线与平面平行的判定定理和性质定理，不仅应用较多，也是下节讨论平面与平面平行的基础。讲解时，要注意引导学生把直线与平面的平行关系转化为直线与直线的平行关系去考虑。

关于直线与平面平行的判定定理，按大纲要求教材中证明从略。所以在讲解时，要多举实例帮助学生理解。在引入定理前，可用下面的例子补充说明：如图 7-3 所示，门框的

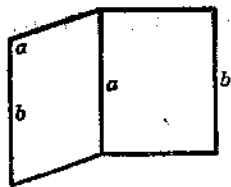


图 7-3

对边 a 和 b 是平行的，其中 a 在门扇 α 上，当不关门时，另一边 b 与门扇没有公共点，从而 $b \parallel \alpha$ 。

关于直线与平面平行的性质定理，教材在第 15 页上给出了它的证明。这个证明过程也可用集合表示法给出，介绍如下：由已知

$a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = b$, 则 $b \subset \alpha$. 而 $a \parallel \alpha$, 即 $a \cap \alpha = \emptyset$, 所以 $a \cap b = \emptyset$, 但又知 $b \subset \beta$, 且 $a \subset \beta$, 则按两直线平行的定义得出 $a \parallel b$. 不必要求全体学生都掌握证明的集合表示法。

教材第 15 页例 1 是直线与平面平行判定定理和性质定

理的綜合运用，可引导学生共同分析解决本题。

3. 关于直线与平面相交，教材分垂直和斜交来讨论。垂直关系与平行关系一样是以后学习的基础，也有许多应用。讲解时也要注意引导学生把直线与平面的垂直关系转化为直线与平面内的直线的垂直关系去考虑。

教材通过实例引出直线与平面垂直的判定定理，讲解时要突出定理中“平面内两条相交直线”的条件。关于另一个判定定理，教材只作了简单叙述，因结论明显成立，可不必证明。直线与平面垂直的性质定理结论的正确性也很明显，在应用这些定理时常常通过直线与平面垂直和直线与直线垂直的相互转化，组成适当的直角三角形来解决问题。如教材第17页例2，就是由于 PA 垂直于平面 α ，便分别与平面内直线 AB, AC 垂直，因此得到直角三角形 PAB, PAC 。然后，借助于勾股定理求出 PA 及 PC 的长度，这也是把立体几何问题转化为平面几何问题的一个实例。

4. 关于直线与平面斜交，教材首先定义了斜线及其在平面内的射影，这个概念不仅是定义直线与平面所成角的基础，而且在解题中也常常使用，教材随后给出了斜线长与射影长的有关定理，定理的证明比较简单，教材上没有详述，讲解时教师可简单解释如下：

如图7-4所示， $AO \perp \alpha$ ， AB, AC 为任意斜线。 O 为垂足，则 OB, OC 分别为 AB, AC 在平面 α 内的射影。

$$\left. \begin{array}{l} AO \perp \alpha \\ OB \subset \alpha \\ OC \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} AO \perp OB \\ AO \perp OC \end{cases}$$

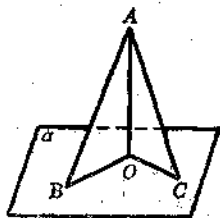


图7-4

因此分别组成直角三角形 AOB 和直角

三角形 AOC ，则有

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$AC^2 = AO^2 + OC^2$$

比较上面两个等式，显然 $OB=OC \iff AB=AC$

$$OB>OC \iff AB>AC。$$

还可得到 $AO < AB$ 及 $AO < AC$ ，从而证明了垂线比任何一条引自同一点的斜线都短。这样，我们可以把平面外一点所引的垂线长定义为点到平面的距离。

5. 直线与平面斜交也存在倾斜程度的问题，也要用角来描述它们的位置关系。但是由于在平面内可以作出许多条直线，教材在本段一开始就用定理形式指出：平面的斜线和它在平面内的射影所成的角，是这条斜线和平面内任何一条直线所成角中最小的角，证法是运用上述垂线长，斜线长的比较，并借助于正弦函数在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内是递增的性质。在此

基础上给出了斜线与平面所成角的定义。斜线与平面所成的角还有两种特殊情况，一是直线与平面平行（或在平面内），所成的角规定为 0° ，一是直线与平面垂直，所成的角规定为 90° 。这三种情况统称直线与平面所成的角。这个定义在具体计算中常常用到，是本章的又一个重点，应使学生理解并掌握。

随后教材给出了平行于平面的直线到平面的距离的定义，在进行计算时也常用到，应使学生掌握。

6. 本节最后讲解了三垂线定理和它的逆定理。这组定理在解决空间图形的有关问题时较为广泛的应用，所以是本章的又一个重点。在引入这组定理前可先用教具直观演示。使学生对结论的产生有个感性认识，如图 7-5 所示：丁字尺的