

责任编辑: 菲
封面设计: 点知教育



搜 狐 教育频道推荐用书
54111.com

编写说明

北京点知教育研究院编写的《2005年全国各省市高考卷总汇及详解》自6月15日上市以来受到全国各地师生的广泛好评。他们一致认为本试卷保留了高考真题的原貌,设计科学,解析详尽。为了最大限度的提供更多的读者欣赏到2005年全国各省市高考真题,我院特推出了《2005年全国各省市高考卷总汇及详解》经济版。本试卷保留了高考真题的全部内容,在形式上做了适当调整,答案只做了部分解析。读者可根据自己的需求选择使用。

欢迎登陆“点知教育”网(www.dzedu.com.cn)

语文 5.00 元 英语 5.00 元 数学(文) 7.00 元
文综 5.50 元 理综 5.00 元 数学(理) 7.00 元

英语另配原版听力磁带(2盒 20元)

ISBN 7-81108-109-1



9 787811 081091 >

ISBN 7-81108-109-1/G·329

定价: 34.00 元(全6册)

2005年全国各省市 高考卷总汇及详解

北京点知教育研究院 编写

经济版

数学(理)

中央民族大学出版社

目 录

2005年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷I)	(1-1)
(本试卷由河北、河南、山西、海南等地采用)	
2005年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷II)	(2-1)
(本试卷由广西、黑龙江、吉林等地采用)	
2005年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷III)	(3-1)
(本试卷由甘肃、四川、云南、陕西等地采用)	
2005年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)	(4-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)	(5-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)	(6-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(重庆卷)	(7-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(辽宁卷)	(8-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(浙江卷)	(9-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(福建卷)	(10-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(湖北卷)	(11-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)	(12-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(广东卷)	(13-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(江西卷)	(14-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)	(15-1)
2005年普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)	(16-1)
参考答案及解析	(理答-1)

轻松高考·2005年全国各省市高考卷总汇及详解(数学·理)

出版者:中央民族大学出版社

北京市海淀区中关村南大街27号

邮编:100081

电话:(发行部)68472815 68933837

传真:68932751

电话:(总编室)68932218

传真:68932447

印刷者:北京市德园印刷厂

发行者:全国各地新华书店

开 本:787×1092毫米 1/16 印张:30 字数:640千字

版 次:2005年6月第1版 2005年6月第1次印刷

书 号:ISBN 7-81108-108-1/G·329

定 价:34.00元(全6册)

如有印刷质量问题,印厂负责调换。

理科数学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 复数 $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 的值为 ()
A. 1 B. -1 C. $2\sqrt{2}-1$ D. $-2\sqrt{2}+1$
- 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ()
A. $\{S_1\} \cap \{S_2\} \cap \{S_3\} = \emptyset$
B. $S_1 \subseteq \{S_2\} \cap \{S_3\}$
C. $\{S_1\} \cap \{S_2\} \cap \{S_3\} = \emptyset$
D. $S_1 \subseteq \{S_2\} \cup \{S_3\}$
- 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面积为 π , 则球的表面积为 ()
A. $8\sqrt{2}\pi$ B. 8π C. $4\sqrt{2}\pi$ D. 4π
- 已知直线 l 过点 $(-2, 0)$, 若直线 l 与圆 $x^2 + y^2 - 2x$ 有两个交点, 则其斜率 k 的取值范围是 ()
A. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ B. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ C. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ D. $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

- 如图, 在多面体 ABCDEF 中, 已知 F 是 ABCD 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE, \triangle BCF$ 均为正三角形, $EF \parallel AB, EF = 2$, 则该多面体的体积为 ()
A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线为 $y = -\frac{1}{2}x$ 的准线重合, 则该双曲线的离心率为 ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
- 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1 + \cos 2x + 8 \sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为 ()

第 II 卷

二、填空题:本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分。把答案填在题中横线上。

- 若正整数 m 满足 $10^{m-1} < 2^{m-1} < 10^m$, 则 $m =$ ()
($\lg 2 \approx 0.3010$)
- $(x - \frac{1}{x})^n$ 的展开式中, 常数项为 () (用数字作答)

- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin \frac{A+B}{2} = \sin C$, 给出以下四个论断:
① $\sin A + \sin B = 1$ ② $0 < \sin A + \sin B \leq \sqrt{2}$
③ $\sin A + \sin B = 1$ ④ $\cos A + \cos B = \sin C$
其中正确的是 ()
A. ①③ B. ②④ C. ①④ D. ②③
- 过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条, 其中异面直线有 ()
A. 18 对 B. 24 对 C. 30 对 D. 35 对

- 在坐标平面上, 不等式组 $\begin{cases} y > x-1 \\ y < -3|x|+1 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为 ()
A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. 2

第 II 卷

- 填空题:本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分。把答案填在题中横线上。
13. 若正整数 m 满足 $10^{m-1} < 2^{m-1} < 10^m$, 则 $m =$ ()
($\lg 2 \approx 0.3010$)
- $(x - \frac{1}{x})^n$ 的展开式中, 常数项为 () (用数字作答)

- $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O, 两条边上的高的交点为 H, $\vec{OH} = m(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$, 则实数 $m =$ ()
- 在正方形 ABCD-A'B'C'D' 中, 过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E, 交 CC' 于 F,
①四边形 BFD'E 一定是平行四边形;
②四边形 BFD'E 有可能是正方形;
③平面 BFD'E 有可能垂直于平面 BB'D';
以上结论正确的为 () (写出所有正确结论的编号)
- 解答:本大题共 6 小题, 共 74 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。
17. (本小题满分 12 分)
设函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, $(-\pi < \varphi < 0)$, $y = f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x = \frac{\pi}{8}$.
(I) 求 φ ;
(II) 求函数 $y = f(x)$ 的单调增区间;
(III) 证明直线 $5x - 2y + c = 0$ 与函数 $y = f(x)$ 的图象不相切。



- (本小题满分 12 分)
已知锐角 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $PA \perp$ 底面 ABCD, 且 $PA = AD = DC = \frac{1}{2}AB = 1$, M 是 PB 的中点。
(I) 证明:面 PAD 上面 PCD;
(II) 求 AC 与 PB 所成的角;
(III) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小。

19. (本小题满分 12 分)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和 $S_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

(I) 求 q 的取值范围;

(II) 设 $b_n = a_{n+2} - \frac{3}{2}a_{n+1}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 试比较 S_n 与 T_n 的大小.

20. (本小题满分 12 分)

9 粒种子分种在甲、乙、丙 3 个坑内, 每坑 3 粒, 每粒种子发芽的概率为 0.5. 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽, 则这个坑不需要补种; 若一个坑内的种子都没发芽, 则这个坑需要补种.

假定每个坑至多补种一次, 每补种 1 个坑需 10 元, 用 ξ 表示补种费用, 写出 ξ 的分布列, 并求 ξ 的数学期望. (精确到 0.01)

21. (本小题满分 14 分)

已知椭圆的中心为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A, B 两点, $OA + OB$ 与 $a = (3, -1)$ 共线.

(I) 求椭圆的离心率;

(II) 设 M 为椭圆上任意一点, 且 $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 证明: $\lambda^2 + \mu^2$ 为定值.

22. (本小题满分 12 分)

(I) 设函数 $f(x) = \log_2 x + (1-x) \log_2 (1-x)$ ($0 < x < 1$), 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 设正数 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 满足 $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$, 证明: $p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + p_3 \log_2 p_3 + \dots + p_n \log_2 p_n \geq -n$.



理科数学(必修+选修 II)

第 I 卷

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

1. 函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)$ 的最小正周期是 ()
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π
2. 正四面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P, Q, R 分别是 AB, AD, B_1C_1 的中点,那么,正方体的过 P, Q, R 的截面图形是 ()
A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形
3. 函数 $y = \sqrt{x-1}$ ($x \leq 0$) 的反函数是 ()
A. $y = \sqrt{(x+1)^2}$ ($x \geq -1$)
B. $y = -\sqrt{(x+1)^2}$ ($x \geq -1$)
C. $y = \sqrt{(x+1)^2}$ ($x \geq 0$)
D. $y = -\sqrt{(x+1)^2}$ ($x \geq 0$)
4. 已知函数 $y = \tan ax$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是减函数,则 ()
A. $0 < a \leq 1$
B. $-1 \leq a < 0$
C. $a \geq 1$
D. $a \leq -1$

5. 设 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 若 $\frac{a+b}{c+d} = 0$ 有实数解,则 ()
A. $bc+ad \neq 0$
B. $bc-ad \neq 0$
C. $bc+ad = 0$
D. $bc-ad = 0$
6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 M 在双曲线上且 $MF_1 \perp x$ 轴, 则 F_1 到直线 F_2M 的距离为 ()
A. $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

7. 锐角三角形的内角 A, B 满足 $\tan A = \frac{1}{\sin 2A}$, 则有 ()
A. $\sin 2A - \cos B = 0$
B. $\sin 2A + \cos B = 0$
C. $\sin 2A - \sin B = 0$
D. $\sin 2A + \sin B = 0$
8. 已知点 $A(\sqrt{3}, 1), B(0, 0), C(\sqrt{3}, 0)$, 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E , 那么有 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CE}$, 其中 λ ()

9. 已知集合 $M = \{x | x^2 - 3x - 28 \leq 0\}, N = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$, 则 $M \cap N$ 为 ()
A. $\{x | -4 \leq x < -2 \text{ 或 } 3 < x \leq 7\}$
B. $\{x | -4 < x \leq -2 \text{ 或 } 3 < x < 7\}$
C. $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x > 3\}$
D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$

10. 点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向量 $v = (4, -3)$ (即点 P 的运动方向与 v 相同, 且每秒移动的距离为 $|v|$ 个单位), 设开始时点 P 的坐标为 $(-1, 10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 ()
A. $(-2, 4)$
B. $(-30, 25)$
C. $(10, -5)$
D. $(5, -10)$

11. 如果 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为各项都大于零的等差数列, 公差 $d \neq 0$, 则 ()
A. $a_1 a_n > a_2 a_{n-1}$
B. $a_1 a_n < a_2 a_{n-1}$
C. $a_1 + a_n > a_2 + a_{n-1}$
D. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$

12. 将半径都为 1 的 4 个两球完全装入形状为正四面体的容器内, 这个正四面体的高的最小值为 ()
A. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$
B. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$
C. $4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
D. $\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

13. 圆心为 $(1, 2)$ 且与直线 $5x - 12y - 7 = 0$ 相切的圆的方程为 ()
A. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 8 = 0$

14. 设 α 为第四象限的角, 若 $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{13}{5}$, 则 $\tan 2\alpha =$ ()

15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有 () 个。

16. 下面是关于三棱锥的四个命题:

第 II 卷

- 二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分。把答案填在题中横线上。)

13. 圆心为 $(1, 2)$ 且与直线 $5x - 12y - 7 = 0$ 相切的圆的方程为 ()

14. 设 α 为第四象限的角, 若 $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{13}{5}$, 则 $\tan 2\alpha =$ ()

15. 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有 () 个。

16. 下面是关于三棱锥的四个命题:

- ①底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等, 则三棱锥是正三棱锥;
- ②底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形, 则三棱锥是正三棱锥;
- ③底面是等边三角形, 侧面的面积都相等, 则三棱锥是正三棱锥;
- ④侧面与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等, 则三棱锥是正三棱锥。

- 其中, 真命题的编号是 ()。(写出所有真命题的编号)

- 三、解答题(本大题共 6 小题, 共 74 分。请解答写出文字说明, 证明过程或演算步骤。)

17. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = 2|x+1| - |x-1|$, 求使 $f(x) \geq 2\sqrt{2}$ 的 x 取值范围。



19. (本小题满分12分)

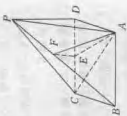
甲、乙两队进行一场排球比赛. 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6. 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设备局比赛相互间没有影响, 令 ξ 为本场比赛的局数, 求 ξ 的概率分布和数学期望. (精确到 0.0001)

20. (本小题满分12分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD=PD$, E, F 分别为 CD, PB 的中点.

(1) 求证: $EF \perp$ 平面 PAB ;

(2) 设 $AB=\sqrt{2}BC$, 求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.



21. (本小题满分14分)

P, Q, M, N 四点都在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知 PF 与 FQ 共线, MF 与 FN 共线, 且 $PF \cdot MF = 0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

22. (本小题满分12分)

已知 $a \geq 0$, 函数 $f(x) = (x^2 - 2ax)e^x$.
(1) 当 x 为何值时, $f(x)$ 取得最小值? 证明你的结论;
(2) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调函数, 求 a 的取值范围.



理科数学(必修+选修Ⅱ)

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 α 为第三象限的角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 ()
A. 第一或第二象限 B. 第二或第三象限
C. 第三或第四象限 D. 第二或第四象限
2. 已知过点 $A(-2, m)$ 和 $B(m, 4)$ 的直线与直线 $2x+y-1=0$ 平行,则 m 的值为 ()
A. 0 B. -8 C. 2 D. 10
3. 在 $(x-1)(x+1)^8$ 的展开式中 x^2 的系数是 ()
A. -14 B. 14 C. -28 D. 28
4. 设三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V , P, Q 分别是侧棱 AA_1, CC_1 上的点,且 $PA=A_1Q$, 则四棱锥 $B-APQC$ 的体积为 ()
A. $\frac{1}{5}V$ B. $\frac{1}{4}V$ C. $\frac{1}{3}V$ D. $\frac{1}{2}V$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{2}{x^2-4x+3} \right) =$ ()
A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{6}$
6. 若 $a = \frac{\ln 2}{2}, b = \frac{\ln 3}{3}, c = \frac{\ln 5}{5}$, 则 ()
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
C. $c < a < b$ D. $b < a < c$
7. 设 $0 < x < 2\pi$, 且 $\sqrt{1-\sin 2x} = \sin x - \cos x$, 则 ()
A. $0 \leq x < \pi$ B. $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{7\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{5\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}$
8. $\frac{2\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha} =$ ()
A. $\tan \alpha$ B. $\tan 2\alpha$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$
9. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 点 M 在双

曲线上且 $MF_1 \perp MF_2$, 则点 M 到 x 轴的距离为 ()
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $2\sqrt{\frac{5}{3}}$ D. $\sqrt{3}$

10. 设椭圆两个焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P , 若 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, 则椭圆的离心率是 ()
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $2-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}-1$
11. 不在圆的四个定点到平面 α 的距离都相等, 这样的平面 α 共有 ()
A. 3 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 7 个
12. 计算机中常用的十六进制是逢 16 进 1 的计数制, 采用数字 0~9 和字母 A~F 共 16 个计数符号, 这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

例如, 用十六进制表示 $E+D=1B$, 则 $A \times B =$ ()
A. 6E B. 72 C. 5F D. E0

第 II 卷

二、填空题:本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分。把答案填在题中横线上。

13. 已知复数 $z = 3+2i$, 复数 $\bar{z}$ 满足 $z \cdot \bar{z} = 3z+2i$, 则复数 $\bar{z} =$ _____。
14. 已知向量 $\vec{OA} = (k, 12)$, $\vec{OB} = (4, 5)$, $\vec{OC} = (-k, 10)$, 且 A, B, C 三点共线, 则 $k =$ _____。
15. 设 l 为平面上过点 $(0, 1)$ 的直线, l 的斜率等可能地取 $-2, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{2}$, 则 l 表示坐标原点到 l 的距离, 则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi =$ _____。
16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, P 是 AB 上的点, 则点 P 到 AC, BC 的距离乘积的最大值是 _____。

三、解答题:本大题共 6 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响, 已知在某一小时内, 甲、乙都需要照顾的概率为 0.05, 甲、丙都需要照顾的概率为 0.1, 乙、丙都需要照顾的概率为 0.125。

- (I) 求甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别为多少;
- (II) 计算这个小时内至少有一台机器需要照顾的概率。



(I) 证明: $AB \perp$ 平面 AVD 。

(II) 求平面 VAD 与平面 VDB 所成的二面角的大小。

如图, 在四棱锥 $V-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧面 VAD 是正三角形, 平面 $VAD \perp$ 底面 $ABCD$ 。

19. (本小题满分12分)

$\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 a, b, c 成等比数列, 且 $\cos B = \frac{3}{4}$.

(1) 求 $\cot A + \cot C$ 的值;

(2) 设 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{3}{2}$, 求 $a+c$ 的值.

20. (本小题满分12分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d \neq 0$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项, 已知数列 $a_1, a_2, a_4, a_8, \dots, a_{4^{k-1}}, \dots$ 成等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

21. (本小题满分14分)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点在抛物线 $y=2x^2$ 上, l 是 AB 的垂直平分线.

(1) 当且仅当 x_1+x_2 取何值时, 直线 l 经过抛物线的焦点 F ? 证明你的结论;

(2) 当直线 l 的斜率为 2 时, 求 l 在 y 轴上截距的取值范围.

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \frac{4x^2-7}{2-x}, x \in [0, 1]$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域;

(2) 设 $a \geq 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a, x \in [0, 1]$, 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_2 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_2) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.



数学(理工农医类)

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,共150分钟,考试时间120分钟,考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷(选择题,共40分)

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选择符合题目要求的一项。

1. 设集合 $U = \mathbb{R}$, 集合 $M = \{x | x > 1\}$, $P = \{x | x > 1\}$, 则下列关系中正确的是 ()
 A. $M = P$ B. $P \subseteq M$
 C. $M \subseteq P$ D. $\complement_U M \cap P = \complement$
2. " $m = \frac{1}{2}$ "是"直线 $(m+2)x + 3my + 1 = 0$ 与直线 $(m-2)x + (m+2)y - 3 = 0$ 相互垂直"的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 充分而不必要条件
 C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
3. $|a| = 1, |b| = 2, c = a + b$, 且 $c \perp a$, 则向量 a 与 b 的夹角为 ()
 A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°
4. 从原点向圆 $x^2 + y^2 - 12y + 27 = 0$ 作两条切线, 则两切点在这两条切线间的劣弧长为 ()
 A. π B. 2π C. 4π D. 6π
5. 对任意的锐角 α, β , 下列不等式关系中正确的是 ()
 A. $\sin(\alpha + \beta) > \sin \alpha + \sin \beta$
 B. $\sin(\alpha + \beta) > \cos \alpha + \cos \beta$
 C. $\cos(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$
 D. $\cos(\alpha + \beta) < \cos \alpha + \cos \beta$
6. 在正四面体 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点, 下面四个结论中不正确的是 ()
 A. $BC \parallel$ 平面 PDF
 B. $DF \perp$ 平面 PAE
 C. 平面 $PDF \perp$ 平面 ABC
 D. 平面 $PAE \perp$ 平面 ABC
7. 北京(财富)全球论坛期间,某高校有14名志愿者参加接待工作,若每天排早、中、晚三班,每班4人,每人最多值一班,则开幕式当天不同的排班种数为 ()
 A. $C_{14}^3 C_3^4 C_3^4 C_3^4$
 B. $C_{14}^3 A_3^4 A_3^4 A_3^4$
 C. $\frac{A_{14}^3}{C_3^4 C_3^4 C_3^4}$
 D. $\frac{A_{14}^3}{C_3^4 C_3^4 C_3^4}$

8. 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$ 的图像是 ()

- A. 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上递增, 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上递减
- B. 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上递增, 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上递减
- C. 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上递增, 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上递减
- D. 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上递增, 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上递减

第II卷(非选择题,共10分)

二、填空题:本大题共6小题,每小题4分,共24分。把答案填在题中横线上。

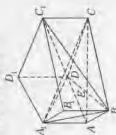
9. 若 $z_1 = a + 2i, z_2 = 3 - 4i$, 且 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为 _____。
10. 已知 $\tan \frac{\alpha}{2} = 2$, 则 $\tan \alpha$ 的值为 _____。
11. $(x - \frac{1}{x})^6$ 展开式中的常数项是 _____。(用数字作答)
12. 过点 P 作曲线 $y = e^x$ 的切线, 则切点的坐标为 _____, 切线的斜率为 _____。
13. 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 有如下结论:
 ① $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$;
 ② $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;
 ③ $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$;
 ④ $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 。
 当 $f(x) = \ln x$ 时, 上述结论中正确结论的序号是 _____。
14. 已知 n 次多项式 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 。

如果在一种算法中, 计算 $a_k^i (k=2, 3, 4, \dots, n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法, 计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6次乘法, 3次加法), 那么计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要 _____ 次运算。

下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x) = a_0$, $P_{k+1}(x) = xP_k(x) + a_{k+1} (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$, 利用该算法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 5 次运算, 计算 $P_4(x_0)$ 的值共需 _____ 次运算。

三、解答题:本大题共5小题,共80分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分13分)
 已知函数 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + a$ 。
 (I) 求 $f(x)$ 的单调减区间;
 (II) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 20, 求它在该区间上的最小值。



- (I) 求证 $BD \perp A_1C_1$;
- (II) 求二面角 A_1-BD-C_1 的大小;
- (III) 求异面直线 AD_1 与 BC_1 所成角的大小。

如图,在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=2, DC=2\sqrt{3}, AA_1=\sqrt{3}, AD \perp DC, AC \perp BD$, 垂足为 E 。



17. (本小题满分 12 分)

甲、乙两人各进行 3 次射击, 甲每次击中目标的概率为 $\frac{1}{2}$, 乙每次击中目标的概率为 $\frac{2}{3}$.

(I) 记甲击中目标的次数为 ξ , 求 ξ 的概率分布及数学期望 $E\xi$;

(II) 求乙至多击中目标 2 次的概率;

(III) 求甲恰好比乙多击中目标 2 次的概率.

18. (本小题满分 14 分)

如图, 直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与直线 $l_1: y = -kx$ 之间的阴影区域 (不含边界) 记为 W , 其左半部分记为 W_1 , 右半部分记为 W_2 .

(I) 分别用不等式组表示 W_1 和 W_2 ;

(II) 若区域 W 中的动点 $P(x, y)$ 到 l_1, l_2 的距离之和等于 $\sqrt{2}$, 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(III) 设不过原点 O 的直线 l 与 (II) 中的曲线 C 相交于 M_1, M_2 两点, 且与 l_1, l_2 分别交于 M_3, M_4 两点.

求证: $\triangle OM_1M_2$ 的重心与 $\triangle OM_3M_4$ 的重心重合.



19. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = a \neq \frac{1}{4}$, 且 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n$ 为偶数,

$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}, n$ 为奇数.

记 $b_n = a_{2n-1} - \frac{1}{4}, n = 1, 2, 3, \dots$

(I) 求 a_2, a_3 ;

(II) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并证明你的结论;

(III) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$.

20. (本小题满分 12 分)

设 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的函数, 若存在 $x^* \in (0, 1)$, 使得 $f(x)$ 在 $[0, x^*]$ 上单调递增, 在 $[x^*, 1]$ 上单调递减, 则称 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的单峰函数, x^* 为峰点, 包含峰点的区间为含峰区间.

对任意的 $[0, 1]$ 上的单峰函数 $f(x)$, 下面研究确定其含峰区间的长度的方法.

(I) 证明: 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, 1), x_1 < x_2$, 若 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则 $(0, x_2)$ 为含峰区间; 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则 $(x_1, 1)$ 为含峰区间;

(II) 对给定的 $\gamma (0 < \gamma < 0.5)$, 证明: 存在 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 满足 $x_2 - x_1 \geq 2\gamma$, 使得由 (I) 所确定的含峰区间的长度不大于 $0.5 + \gamma$.

(III) 选取 $x_1, x_2 \in (0, 1), x_1 < x_2$, 由 (I) 可确定含峰区间为 $(0, x_2)$ 或 $(x_1, 1)$, 在所得的含峰区间内选取 x_3 , 由 x_3 与 x_1 或 x_3 与 x_2 类似地可确定一个新的含峰区间. 在第一次确定的含峰区间为 $(0, x_2)$ 的情况下, 试确定 x_1, x_2, x_3 的值, 满足两次之差的绝对值不小于 0.02, 且使得新的含峰区间的长度缩短到 0.34. (区间长度等于区间的右端点与左端点之差)



数学(理工卷)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

第 I 卷(选择题,共 50 分)

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \left\{ \frac{x}{x+3} \geq 0, x \in \mathbb{R} \right\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $(-3, -2]$
 - B. $(-3, -2] \cup [0, \frac{5}{5}]$
 - C. $(-\infty, -3) \cup [\frac{5}{5}, +\infty)$
 - D. $(-\infty, -3) \cup [\frac{5}{5}, +\infty)$
2. 若复数 $\frac{a+3i}{1-2i}$ ($a \in \mathbb{R}$) 为实数,则实数 a 的值为
 - A. -2
 - B. 4
 - C. -6
 - D. 6
3. 给出下列三个命题:
 - ①若 $a > b > -1$, 则 $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$;
 - ②若正整数 m 和 n 满足 $m \leq n$, 则 $\frac{m}{m+1} \leq \frac{n}{n+1}$;
 - ③设 $P(x_1, y_1)$ 为圆 $O: x^2 + y^2 = 8$ 上一点,圆 O_2 以 $Q(a, b)$ 为圆心,半径为 1. 当 $(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 = 1$ 时,圆 O_1 与圆 O_2 相切.
其中命题的个数为
 - A. 0
 - B. 1
 - C. 2
 - D. 3
4. 设 α, β, γ 为平面, m, n, l 为直线,则 $m \perp l$ 的一个充分条件是
 - A. $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, m \perp l$
 - B. $\alpha \cap \gamma = m, \alpha \perp \gamma, m \perp l$
 - C. $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, m \perp l$
 - D. $n \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp l$
5. 设双曲线以椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 长轴的两个端点为焦点,其准线过椭圆的焦点,则双曲线的渐近线的斜率为
 - A. $(\frac{9}{4}, +\infty)$
 - B. $[\frac{3}{4}, 1]$
 - C. $(-\frac{9}{4}, -\infty)$
 - D. $(-\frac{9}{4}, -1]$

A. 12 B. 3 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

6. 从集合 $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$ 中任选两个元素作为椭圆方程 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ 中的 m 和 n , 则能组成落在矩形区域 $B = \{(x, y) \mid |x| < 11 \text{ 且 } |y| < 9\}$ 内的椭圆个数为

- A. 43
- B. 72
- C. 86
- D. 90

7. 某人射击一次击中目标的概率为 0.5, 经过 3 次射击, 此人恰有两次击中目标的概率为

- A. $\frac{81}{125}$
- B. $\frac{54}{125}$
- C. $\frac{36}{125}$
- D. $\frac{27}{125}$

8. 要得到函数 $y = \sqrt{2} \cos x$ 的图象, 只需将函数 $y = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象上所有的点

- A. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变), 再向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
- B. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变), 再向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
- C. 横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 再向左平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
- D. 横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 再向右平行移动 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

9. 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ ($a > 1$) 的反函数, 则使 $f^{-1}(x) > 1$ 成立的 x 的取值范围为

- A. $(\frac{a^2-1}{2a}, +\infty)$
- B. $(-\infty, \frac{a^2-1}{2a})$
- C. $(\frac{a^2-1}{2a}, a)$
- D. $[a, +\infty)$

10. 若函数 $f(x) = \log_2(x^2 - ax)$ ($a > 0, a \neq 1$) 在区间 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 内单调递增, 则 a 的取值范围是

- A. $[\frac{1}{4}, 1]$
- B. $[\frac{3}{4}, 1]$
- C. $(\frac{9}{4}, +\infty)$
- D. $(1, \frac{9}{4})$

第 II 卷(非选择题, 共 100 分)

二、填空题:本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

11. 设 $n \in \mathbb{N}^+$, 则 $C_2^n + C_4^n + C_6^n + \dots + C_{2n}^n =$

12. 如图, $PA \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$ 且 $PA = AC = BC = a$, 则异面直线 PB 与 AC 所成角的正切值等于

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $a_{n+2} - a_n = 1 + (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$), 则 $S_{100} =$

14. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0, 1)$ 和点 $B(-3, -4)$, 若点 C 在 $\angle AOB$ 的平分线上且 $|OC| = 2$, 则 $\vec{OC} =$

15. 某公司有 5 万元资金用于投资开发项目, 如果成功, 一年后可获利 12%, 一旦失败, 一年后将丧失全部资金的 50%, 下表是过去 200 例类似项目开发的结果:

投资成功	投资失败
192 次	8 次

则该公司一年后估计可获收益的期望是 (元).

16. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(5) =$

三、解答题:本大题共 6 小题, 共 76 分. 解答要写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

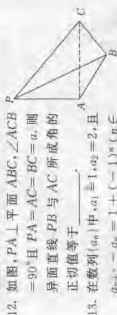
在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 所对的边长分别为 a, b, c . 设 a, b, c 满足条件 $b^2 + c^2 - bc = a^2$ 和 $\frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 求 $\angle A$ 和 $\tan B$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $a_n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$, $a > 0, b > 0$).

(1) 当 $a = b$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

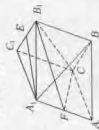
(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+1}$.



13. (本小题满分12分)

如图,在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1AB = \angle A_1AC, AB = AC, A_1A \perp B_1C_1$, 侧面 B_1BCC_1 与底面 ABC 所成的二面角为 120° , E, F 分别是棱 B_1C_1, A_1A 的中点.

- 求 A_1A 与底面 ABC 所成的角;
- 证明 $A_1E \parallel$ 平面 B_1FC ;
- 求经过 A_1, A, B, C 四点的球的体积.



20. (本小题满分20分)

某人在一山麓 P 处观看对面山崖顶上的塔,如图,塔高 $BC=80$ (米),塔所在的山高 $OB=220$ (米), $OA=200$ (米),图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上, l 与水平地面的夹角为 α , $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. 试问,此人距水平地面多远时,观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大(不计此人的身高)?



21. (本小题满分14分)

抛物线 C 的方程为 $y = ax^2$ ($a < 0$), 过抛物线 C 上一点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$) 作斜率为 k_1, k_2 的两条直线分别交抛物线 C 于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点 (P, A, B 三点互不重合), 且满足 $k_2 + \lambda k_1 = 0$ ($\lambda \neq -1$).

- 求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程;
- 设直线 AB 上一点 M , 满足 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{MA}$, 证明: 线段 PM 的中点在 y 轴上;
- 当 $\lambda = 1$ 时, 若点 P 的坐标为 $(1, -1)$, 求 $\angle PAB$ 为钝角时点 A 的纵坐标 y_1 的取值范围.

22. (本小题满分14分)

设函数 $f(x) = x \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$).

- 证明: $f(x+2\pi) - f(x) = 2\pi \sin x$, 其中 k 为整数;
- 设 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点, 证明 $[f(x_0)]^2 = \frac{x_0^2}{1+x_0^2}$;
- 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的全部极值点按从小到大的顺序排列为 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 证明 $\frac{\pi}{2} < a_n < \pi$ ($n=1, 2, \dots$).



数学试卷(理工农医类)

一、填空题(本大题满分 48 分)本大题共有 12 题,只要要求直接填写结果,每个空格填对得 4 分,否则一律得零分.

- 函数 $f(x) = \log_2(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.
- 方程 $4x^2 + 2x - 2 = 0$ 的解是 _____.
- 直角坐标平面 xOy 中,若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 4$,则点 P 的轨迹方程是 _____.
- 在 $(x-e)^{10}$ 的展开式中, x^2 的系数是 15,则实数 $a =$ _____.
- 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 3x$,它的一个焦点是 $(\sqrt{10}, 0)$,则双曲线的方程是 _____.
- 将参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)化为普通方程,所得方程是 _____.
- 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n - 2^n} =$ _____.

8.某班有 50 名学生,其中 15 人选修 A 课程,另外 35 人选修 B 课程,从该班中任选两名学生,他们是选修不同课程的学生的概率是 _____.(结果用分数表示)

9.在 $\triangle ABC$ 中,若 $\angle A = 120^\circ$, $AB = 5$, $BC = 7$,则 $\triangle ABC$ 的面积 $S =$ _____.

10.函数 $f(x) = \sin x + 2|\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象与直线 $y = k$ 有且仅有两个不同的交点,则 k 的取值范围是 _____.

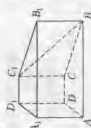
11.有两个相同的直三棱柱,高为 $\frac{2}{a}$,底面三角形的三边长分别为 $3a, 4a, 5a$ ($a > 0$).用它们拼成一个三棱柱或四棱柱,在所有可能的情形中,全面积最小的是一个四棱柱,则 a 的取值范围是 _____.

12.用 n 个不同的实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 可得到 $n!$ 个不同的排列,每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵.对第 i 行 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$,记 $b_i = -a_{i1} + 2a_{i2} - 3a_{i3} + \dots + (-1)^{n+1}a_{in}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n!$.例如用 $1, 2, 3$ 可得到

三棱柱(本大题满分 80 分)本大题共有 6 题,解答下列各题必须写出必要的步骤.

13. (本小题满分 12 分)

已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2$,底面 $ABCD$ 是直角梯形, $\angle A$ 为直角, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 2$, $DC = 1$.求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小.(结果用反三角函数值表示)



18. (本小题满分 12 分)

证明:在复数范围内,方程 $z^2 + (1-i)z - (1+i)z = \frac{5-i}{2+i}$ (i 为虚数单位)无解.

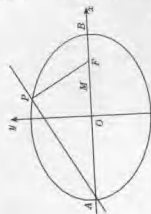


19. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

如图, 点 A, B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 长轴的左、右端点, 点 F 是椭圆的右焦点, 点 P 在椭圆上, 且位于 x 轴上方, $PA \perp PF$.

(I) 求点 P 的坐标;

(II) 设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点, M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$, 求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.



20. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

假设某市 2004 年新建住房 400 万平方米, 其中有 280 万平方米是中低价房, 预计在今后的若干年内, 该市每年新建住房面积平均比上年增长 8%. 另外, 每年新建住房中, 中低价房的面积均比上年增加 50 万平方米. 那么, 到哪一年底,

(I) 该市历年所建中低价房的累计面积 (以 2004 年为累计的第一年) 将首次不少于 4 750 万平方米?

(II) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

21. (本题满分 16 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 6 分.

对定义域分别是 D_1, D_2 的函数 $y=f(x), y=g(x)$, 规定: 函数 $h(x) =$

$\begin{cases} f(x) \cdot g(x), & \text{当 } x \in D_1 \text{ 且 } x \in D_2; \\ f(x), & \text{当 } x \in D_1 \text{ 且 } x \notin D_2; \\ g(x), & \text{当 } x \notin D_1 \text{ 且 } x \in D_2. \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{x-1}, g(x) = x^2$ 写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(II) 求问题 (I) 中函数 $h(x)$ 的值域;

(III) 若 $g(x) = f(x+\alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha \in [0, \pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x) = \cos x$, 并予以证明.

22. (本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 8 分, 第 3 小题满分 6 分.

在直角坐标平面中, 已知点 $P_1(1, 2), P_2(2, 2^2), P_3(3, 2^3), \dots, P_n(n, 2^n)$, 其中 n 是正整数, 对平面上任一点 A_n , 记 A_1 为 A_n 关于点 P_1 的对称点, A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点, $\dots, A_n$ 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.

(I) 求向量 $\vec{OA_n}$ 的坐标;

(II) 当点 A_n 在曲线 C 上移动时, 点 A_n 的轨迹是函数 $y=f(x)$ 的图象, 其中 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数, 且当 $x \in (0, 3]$ 时, $f(x) = \lg x$, 求以曲线 C 为图象的函数在 $[1, 4]$ 上的解析式;

(III) 对任意整数 n , 用 n 表示向量 $\vec{OA_n}$ 的坐标.



数学试卷(理工农医类)

第一部分(选择题,共50分)

一、选择题:本大题共10小题,每小题5分,共50分。在每小题给出的四个备选项中,只有一项是符合题目要求的。

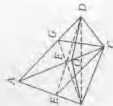
1. 则 $(x+2)^2 + y^2 = 5$ 关于原点 $(0,0)$ 对称的圆的方程为 ()
 A. $(x-2)^2 + y^2 = 5$ B. $x^2 + (y-2)^2 = 5$
 C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 5$ D. $x^2 + (y+2)^2 = 5$
2. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2005} =$ ()
 A. 1 B. -1 C. 2^{2005} D. -2^{2005}
3. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数,在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数,且 $f(2) = 0$,则使得 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$
 C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 2)$
4. 已知 $A(3, 1), B(6, 1), C(4, 3), D$ 为线段 BC 的中点,则向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 的夹角为 ()
 A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\arccos \frac{1}{5}$ C. $\arccos \left(-\frac{4}{5}\right)$ D. $\arccos \left(-\frac{1}{5}\right)$
5. 若 x, y 是正数,则 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$ 的最小值是 ()
 A. 3 B. $\frac{7}{2}$ C. 4 D. 2
6. 已知 α, β 均为锐角,若 $p: \sin(\alpha + \beta), q: \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$,则 p 是 q 的 ()
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 对于不重合的两个平面 α 与 β ,给定下列条件: ()
 ① 存在平面 γ ,使得 α, β 都垂直于 γ ;
 ② 存在平面 γ ,使得 α, β 都平行于 γ ;
 ③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等;
 ④ 存在为面直线 l, m ,使得 $l \perp \alpha, m \perp \beta, m \parallel \alpha$ 。
 其中,可以判定 α 与 β 平行的条件是

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

8. 若 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中含 $\frac{1}{x}$ 项的系数与含 $\frac{1}{x^2}$ 项的系数之比为 -5 ,则 n 等于 ()
 A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

9. 若动点 (x, y) 在曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 上变化,则 $x^2 + 2y$ 的最大值为 ()
 A. $\frac{b^2}{3} + 4 (0 < b < 4)$ B. $\frac{b^2}{3} + 4 (0 < b < 2)$
 C. $\frac{b^2}{3} + 4 (b \geq 4)$ D. $2b$

10. 如图,在体积为1的三棱锥 $A-BCD$ 侧棱 AB, AC, AD 上分别取点 E, F, G ,使 $AE:EB = AF:FC = AG:GD = 2:1$,记 O 为三平面 BCG, CDE, DBF 的交点,则三棱锥 $O-BCD$ 的体积等于 ()
 A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{7}$ D. $\frac{1}{4}$



第二部分(非选择题,共100分)

填空题:本大题共5小题,每小题4分,共24分。把答案填写在答题卡相应位置上。

11. 集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 2\}$,则 $A \cap B =$.
12. 曲线 $y = x^3$ 在点 $(a, a^3) (a \neq 0)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x = a$ 所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{6}$,则 $a =$.
13. 已知 α, β 均为锐角,且 $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$,则 $\tan \alpha =$.
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n + 1}{2^n + 3^n} =$.
15. 某轻轨列车有4节车厢,现有6位乘客准备乘坐,设每位乘客进入每节车厢是等可能的,则这6位乘客进入各节车厢的人数恰好为0,1,2,3的概率为 .

18. 连接抛物线上任意四点组成的四边形可能是 ()

- (填写所有正确选项的序号).
- ① 菱形 ② 有3条边相等的四边形 ③ 梯形
 ④ 平行四边形 ⑤ 有一组对角相等的四边形
 三、解答题:本大题共6小题,共76分,解答时应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分13分)

若函数 $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{4 \sin(\frac{\pi}{2} + x)} - x \sin \frac{x}{2} \cos$

$(\pi - \frac{x}{2})$ 的最大值为2,试确定常数 a 的值。

18. (本小题满分13分)

在一次购物抽奖活动中,假设某10张券中有一等奖券1张,可获价值50元的奖品;有二等奖券3张,每张可获价值10元的奖品;其余6张没有奖。某顾客从此10张券中任抽2张,求:

- (1)该顾客中奖的概率;
 (2)该顾客获得的奖品总价值 ξ (元)的概率分布列和期望 $E\xi$ 。



19. (本小题满分 13 分)

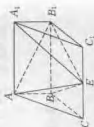
已知 $a \in \mathbf{R}$, 讨论函数 $f(x) = e^x (x^2 + ax + a + 1)$ 的极值点的个数.

20. (本小题满分 13 分)

如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp$ 侧面 BB_1C_1C , E 为棱 CC_1 上异于 C, C_1 的一点, $EA \perp EB_1$. 已知 $AB = \sqrt{2}$, $BB_1 = 2$, $BC = 1$, $\angle BCC_1 = \frac{\pi}{3}$.

求:

- (I) 异面直线 AB 与 EB_1 的距离;
- (II) 二面角 $A - EB_1 - A_1$ 的平面角的正切值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点, 而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点.

(I) 求双曲线 C_2 的方程;

(II) 若直线 $l: y = kx + \sqrt{2}$ 与椭圆 C_1 及双曲线 C_2 都有两个不同的交点, 且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $OA \cdot OB < 8$ (其中 O 为原点), 求 k 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 + n}\right) a_n + \frac{1}{2^n}$ ($n \geq 1$).

(I) 用数学归纳法证明: $a_n \geq 2$ ($n \geq 2$);

(II) 已知不等式 $\ln(1+x) < x$ 对 $x > 0$ 成立, 证明: $a_n < 2^n$ ($n \geq 1$), 其中无理数 $e = 2.71828\ldots$.



数学

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = \frac{1-i}{1+i}$ 在复平面内 z 所对应的点在 ()
A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限
2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在是函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续的 ()
A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
3. 袋中有 80 个红球,20 个白球,若从袋中任取 10 个球,则其中恰有 6 个红球的概率为 ()
A. $\frac{C_4^6 \cdot C_{80}^4}{C_{100}^{10}}$ B. $\frac{C_{80}^6 \cdot C_{20}^4}{C_{100}^{10}}$
C. $\frac{C_4^6 \cdot C_5^4}{C_{10}^{10}}$ D. $\frac{C_4^6 \cdot C_5^4}{C_{10}^{10}}$

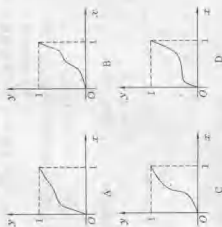
4. 已知 m, n 是两条不重合的直线, α, β, γ 是三个两两不重合的平面,给出下列四个命题:
①若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
②若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$
③若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \parallel n$, 则 $\alpha \parallel \beta$
④若 m, n 是异面直线, $m \subset \alpha, m \perp \beta, n \subset \beta, n \perp \alpha$, 则 $\alpha \perp \beta$
其中真命题是 ()
A. ①和② B. ①和③
C. ②和③ D. ①和④

5. 函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数是 ()
A. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
B. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
C. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
D. $y = -\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
6. 若 $\log_a \frac{1+a}{1-a} < 0$, 则 a 的取值范围是 ()
A. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(\frac{1}{2}, 1)$ D. $(0, \frac{1}{2})$
7. 在 $\mathbb{R}$ 上定义运算 $\otimes, \oplus, \odot, \div$ 如下: 若不等式 $(x - a) \otimes (x + a) < 0$ 对任意实数 x 成立, 则 ()
A. $-1 < a < 1$ B. $0 < a < 2$
C. $-\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$
8. 若钝角三角形内角的度数成等差数列, 且最大边长与最小边长的比值为 m , 则 m 的取值范围是 ()
A. $(1, 2)$ B. $(2, +\infty)$
C. $(3, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$
9. 若直线 $2x - y + c = 0$ 按向量 $a = (1, -1)$ 平移后与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切, 则 c 的值为 ()
A. 8 或 -2 B. 6 或 -4
C. 4 或 -6 D. 2 或 -8
10. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数, 实数 $x_1 \neq x_2$, $\lambda \neq -1$, $\alpha = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $\beta = \frac{x_2 + \lambda x_1}{1 + \lambda}$. 若 $|f(x_1) - f(x_2)| < |f(\alpha) - f(\beta)|$, 则 ()
A. $\lambda < 0$ B. $\lambda = 0$
C. $0 < \lambda < 1$ D. $\lambda \geq 1$
11. 已知双曲线的中心在两点, 离心率为 $\sqrt{3}$, 若它的一条准线与渐近线 $y = kx$ 的准线重合, 则该双曲线与渐近线

物线 $y^2 = 4x$ 的交点到原点的距离是 ()
A. $2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ B. $\sqrt{21}$
C. $18 + 12\sqrt{2}$ D. 21



12. 给定函数 $y = f(x)$ 的图象在下列图中, 并且对任意 $a_1 \in (0, 1)$, 由关系式 $a_{n+1} = f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} > a_n (n \in \mathbb{N}^+)$, 则该函数的图象是 ()



第 II 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分。将正确答案填在横线上。

13. $(x^3 - 2x^2 + 1)^6$ 的展开式中常数项是 _____。
14. 如图, 正方体的棱长为 1, C, D 分别是两条棱的中点, A, B, M 是顶点, 那么 M 到截面 ABCD 的距离是 _____。
15. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 组成没有重复数字的八位数, 要求 1 与 2 相邻, 3 与 4 相邻, 5 与 6 相邻, 则与 8 不相邻, 这样的八位数共有 _____ 个。(用数字作答)
16. ω 是正实数, 设 $S_n = [n f(x) + \cos[2\omega(x + \frac{n}{2})]]$ 是奇函数, 若对每个实数 a , $S_n \cap (a, a+1)$ 的元素不超过 2 个, 且有 a 使 $S_n \cap (a, a+1)$ 含 2 个元素, 则 ω 的取值范围是 _____。



18. (本小题满分 12 分)

如图, 在直径为 1 的圆 O 中, 作一关于圆心对称, 邻边互相垂直的十字形, 其中 $y > x > 0$.

- (I) 将十字形的面积表示为 θ 的函数;
- (II) θ 为何值时, 十字形的面积最大? 最大面积是多少?



三、解答题:本大题共 6 小题,共 74 分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分) 已知三棱锥 P-ABC 中, E, F 分别是 AC, AB 的中点, $\triangle ABC, \triangle PEF$ 都是正三角形, $PF \perp AB$. (I) 证明: $PC \perp$ 平面 PAB.
- (II) 求二面角 P-AB-C 的平面角的余弦值;