离散数学

刘永平　刘玉胜　编著

兵器工业出版社

离散数学

编　著　刘永平
　　　　刘玉胜

兵器工业出版社

内 容 简 介

离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科，是现代数学的一个重要分支，是计算机专业和其他一些工程专业的数学基础课程．本教材包含了数理逻辑、集合论、代数结构、图论等主要内容．

本教材在编写的过程中力求做到突出严谨、简明、系统三个特点，尤其对基础理论知识介绍得比较详细．

本教材不仅可以供高职高专计算机专业和其他工程类专业学生使用，也可以作为数学专业学生的教材．

本教材中带＊的章节为选学内容．

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/刘永平，刘玉胜编著．—北京：兵器工业出版社，2006．12

ISBN 7-80172-728-2

Ⅰ．离… Ⅱ．①刘…②刘… Ⅲ．离散数学—高等学校—教材 Ⅳ．0158

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第094103号

出版发行：兵器工业出版社　　责任编辑：林利红
发行电话：010-68962596　68962591　　封面设计：水木时代(北京)图书中心
邮　　编：100089　　责任校对：郭　芳
社　　址：北京市海淀区车道沟10号　　责任印制：赵春云
经　　销：各地新华书店　　开　　本：880×1230　1/32
印　　刷：北京广达印刷有限公司　　印　　张：12.625
版　　次：2006年12月第1版第1次印刷　　字　　数：335千字
印　　数：1—2000　　定　　价：23.80元

前　言

离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科，是现代数学的一个重要分支. 它在各学科领域，特别在计算机科学与技术领域有着广泛的应用，同时离散数学也是计算机专业的许多专业课程，如程序设计语言、数据结构、操作系统、编译技术、人工智能、数据库、算法设计与分析、理论计算机科学基础等必不可少的先行课程. 通过对离散数学的学习，不但可以掌握处理离散结构的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且可以提高抽象思维和严格的逻辑推理能力，为将来参与创新性的研究和开发工作打下坚实的基础. 作为数学专业的学生，能够系统地学习和掌握离散数学的内容，对他们学习其他数学分支及数学应用方面都有着很大的帮助. 兰州城市学院数学系于 1992 年开始为数学专科专业开设了《离散数学》课程，但现有的《离散数学》教材都是为计算机专业而编写的，一般侧重于运用数学理论解决实际问题方面的介绍，对理论部分的叙述不够系统和全面，基本概念、基本理论以文字叙述为主，不适合数学专业学生学习. 鉴于上述情况，系上决定自己组织编写教材. 根据本系的课程设置和课时安排和数学专业学生的特点，编者在编写本教材的过程中力求做到突出严谨、简明、系统三个特点.

本教材第 1 章至第 9 章由刘玉胜老师执笔，第 10 章至第 18 章由刘永平老师执笔. 其中带 * 的章节为选学内容.

在编写过程中，得到了兰州城市学院数学系各位领导的关心、支持和帮助，在此表示感谢.

对本书的不足和疏漏之处，竭诚希望读者和专家指正.

编　者

2006 年 12 月于兰州

目　录

第一编　数理逻辑

第二编　集合论

第三编　代数结构

第四编 图 论

第一编　数理逻辑

逻辑是研究推理的科学，分为形式逻辑和辩证逻辑．早在17世纪，莱布尼兹(Leibniz)就提出一种设想：能否使人们的推理不依赖于对推理过程中命题含义的思考，而用计算代替思维来完成推理过程．他希望能用数学方法来研究思维．数理逻辑就是在这种思想下产生的．用希尔伯特(Hilbert)的话来说，它(数理逻辑)是把数学上的形式化的方法应用到逻辑领域的结果．

可见，数理逻辑是用数学方法研究形式逻辑的一门科学，也就是用数学方法研究推理的科学．所谓数学方法，主要是指引进一套符号体系的方法，因此数理逻辑又叫符号逻辑．数理逻辑的内容大体上可归纳成五大部分：逻辑演算、集合论、证明论、模型论和递归论．我们介绍它们的共同基础——命题演算和谓词演算，即一般所谓古典数理逻辑．

第 1 章　命题逻辑的基本概念

1.1　命题与命题联结词

1.1.1　命题的概念

命题是一个非真即假(不可兼)的陈述句.

作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值,真值只取两个值:真或假.真值为真的命题称为真命题,真值为假的命题称为假命题.通常用"1"或"T"表示真值为真,用"0"或"F"表示真值为假.任何命题的真值都是唯一的.

综上,判断给定句子是否为命题,应该分两步:首先判定它是否为陈述句;其次判断它是否有唯一的真值.

例 1.1　下述都是命题:

(1) 今天下雨.

(2) 8 大于 12.

(3) 2 是偶数而 3 是奇数.

(4) $1 + 101 = 110$.

(5) 一个偶数可表示成两个素数之和(哥德巴赫猜想).

解　以上命题,(1) 的真值取决于今天的天气;(2) 是假;(3) 是真;(4) 表达的内容在十进制范围中真值为假,而在二进制范围中真值为真,可见这个命题的真值还与所讨论问题的范围有关;(5) 或为真或为假,只不过当今尚不知其是真命题还是假命题.

例 1.2　下述都不是命题:

(1) $x = 3$.

(2) X 大于 Y.

（3）请勿吸烟.

（4）你坐哪儿?

（5）天真蓝啊!

解　（1）和（2）不是命题，因为它的真值取决于 x 或 X 和 Y 的值；（3）是祈使句；（4）是疑问句；（5）是感叹句，它们都不是陈述句.

例 1.3　我所说的是假的.

解　显然，这个句子从表面上看，当它假时，它便真；当它真时，它便假. 不能指定它的真假，所以不是命题. 这种陈述句叫悖论.

若一个命题已不能分解成更简单的命题，则这个命题叫原子命题或本原命题. 例 1.1 中（1），（2），（4），（5）都是原子命题，但（3）不是，因为它可写成"2 是偶数"和"3 是奇数"两个命题.

命题和原子命题常用大写字母 $A,B,P,\cdots$ 表示. 如用 P 表示"4 是素数"，则记为 P：4 是素数.

例 1.4　判断下面的命题由哪些原子命题组成：

（1）$\sqrt{2}$ 是有理数是不对的.

（2）2 是偶素数.

（3）2 或 4 是素数.

（4）如果 2 是素数，则 3 也是素数.

（5）2 是素数当且仅当 3 也是素数.

解　（1）中有一个原子命题 A：$\sqrt{2}$ 是有理数.（2）、（3）、（4）和（5）中都有两个原子命题，它们都含有原子命题 B：2 是素数；（2）中的另一原子命题 C：2 是偶数；（3）中的另一原子命题 D：4 是素数；（4）和（5）中另一原子命题 E：3 也是素数.

1.1.2　命题联结词

联结词是逻辑联结词或命题联结词的简称，它是自然语言中连词的逻辑抽象. 有了联结词，便可以用它和原子命题构成复合命

题.常用联结词有以下 5 种.

1. 否定联结词 $\neg$

设 P 为命题,复合命题"非 P"(或"P 的否定")称为 P 的否定式,记为 $\neg P$,并规定 $\neg P$ 为真当且仅当 P 为假.

例 1.5　(1) 塑料不是金属.(Q)

(2) 塑料是金属.($\neg Q$)

解　对于上面的(1)句究竟算不算简单命题,有不同的看法,在有些文献中认为,简单命题中不应该含有联结词,因此它不应当算简单命题.然而也有人认为,在人们发现塑料之初,对它的性质还不够了解时,命题(1)也是一种肯定的判断,虽然这种肯定是通过否定的方式加以表达的.这个问题我们不去争论.重要的是,如果命题(1)用 Q 表示,那么命题(2)就应该用 $\neg Q$ 表示.

2. 合取联结词 $\wedge$

设 P,Q 为两命题,复合命题"P 并且 Q"(或"P 与 Q")称为 P 与 Q 的合取式,记为 $P \wedge Q$,并规定 $P \wedge Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真.

例 1.6　A:今天下雨了.

B:教室里有 100 张桌子.

解　可知 $A \wedge B$ 就是命题"今天下雨了并且教室里有 100 张桌子".

A,B 都是简单命题,通过合取词 $\wedge$,得到了复合命题 $A \wedge B$.复合命题通过 $\wedge$ 还可得到复合命题的复合命题.

日常自然用语里的联结词"和"、"与"、"并且",一般是表示两种同类有关事物的并列关系的.而在逻辑语言中仅考虑命题与命题之间的形式关系或说是逻辑内容,并不顾及日常自然用语中是否有此说法.这样"$\wedge$"同"与"、"并且"又不能等同视之.例 1.6 在日常自然用语句,因 A,B 毫无联系,然而在数理逻辑中 $A \wedge B$ 是可以讨论的.

3. 析取联结词 $\vee$

设 P,Q 为两命题，复合命题"P 或 Q"称为 P 与 Q 的析取式，记为 $P \vee Q$，并规定 $P \vee Q$ 为假当且仅当 P 与 Q 同时为假.

例 1.7 P：今天刮风.

Q：今天下雨.

解 命题"今天刮风或者下雨"可由 $P \vee Q$ 来描述.

例 1.8 A：2 小于 3.

B：雪是黑的.

解 $A \vee B$ 就是命题"2 小于 3 或者雪是黑的". 由于 2 小于 3 是真的，所以 $A \vee B$ 必取值为真，尽管"雪是黑的"这个命题取假.

同样需注意析取词用"或"的异同.

在自然语言中的"或"具有二义性，有时表示的是相容或，有时表示的是相斥或(即排斥或). 例如：

(1) 张三或者李四考了 90 分.

(2) 第一节课上数学课或者上英语课.

在(1) 中，张三和李四可能都考了 90 分，张三和李四中只要有一个考了 90 分，则命题(1) 为真，若张三和李四都考了 90 分，(1) 当然为真. 在(2) 中，第一节课不能既上数学又上英语，因此，若"第一节课上英语"和"第一节课上数学"两个命题都真，(2) 就不为真了.

这样两种用法出现了歧义，这就是自然语言的意思不确定性. 因此，在将命题进行形式化的时候，我们就需要格外注意. 例如，对于例 1.8 中的第二句，我们就不能简单地符号化为 $P \vee Q$，而应该采用另外的形式，例如可以写为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.

4. 蕴涵联结词 $\rightarrow$ (涵常简写成含)

设 P,Q 为两命题，复合命题"如果 P，则 Q"(或"P 与 Q") 称为 P 与 Q 的蕴含式，记为 $P \rightarrow Q$，并称 P 是蕴含式的前件，Q 是蕴含式的后件(或结论)，并规定 $P \rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 为真 Q 为假.

在自然语言里，特别是在数学中，Q 是 P 的必要条件有许多不同的叙述方式. 例如，“只要 P，就 Q”，“因为 P，所以 Q”，“P 仅当 Q”，“只有 Q 才 P”，“除非 Q 才 P”，“除非 Q，否则非 P” 等. 以上各种叙述方式表面看来有所不同，但都表达的是 Q 是 P 的必要条件，因而所用联结词均应符号化为 →，上述各种叙述方式都应符号化为 $P \to Q$.

例 1.9　(1) 只要 a 能被 4 整除，则 a 一定能被 2 整除；

(2) a 能被 4 整除，仅当 a 能被 2 整除；

(3) 除非 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除；

(4) 除非 a 能被 2 整除，否则 a 不能被 4 整除；

(5) 只有 a 能被 2 整除，a 才能被 4 整除；

(6) 只有 a 能被 4 整除，a 才能被 2 整除；

解　令 P：a 能被 4 整除；

Q：a 能被 2 整除.

仔细分析可知，(1) ～ (5) 五个命题均叙述的是 a 能被 2 整除是 a 能被 4 整除的必要条件，只是在叙述上有所不同，因而都符号化为 $P \to Q$. 由于 a 是给定的正整数，因而 P 与 Q 的真值是客观存在的，但是我们不知道. 可是，P 与 Q 是有内在联系的，当 P 为真(a 能被 4 整除)时，Q 必为真(a 能被 2 整除)，于是 $P \to Q$ 不会出现前件真后件假的情况，因而 $P \to Q$ 的真值为 1.

而在(6)中，将 a 能被 4 整除看成了 a 能被 2 整除的必要条件，因而应符号化为 $Q \to P$. 由于 a 能被 2 整除不保证 a 一定能被 4 整除，所以当我们不知道给定的 a 为何值时，也不能知道 $Q \to P$ 会不会出现前件为假的情况，因而也不知道 $Q \to P$ 的真值.

蕴含词可以联结两个以上意义毫不相干的命题，只要前件和后件满足 $P \to Q$ 为真的定义所规定的条件，我们便可说“$P \to Q$ 为真”. $P \to Q$ 真假的这种规定也引起了争论. 例如：

如果地球停止了转动，则大熊猫产在中国.

但应注意到，我们关心的是推理，关心能否从 P 真推出 Q 真，

关心各命题之间实际意义是否有联系.

5. 等价联结词 $\leftrightarrow$

设 P,Q 为两命题，复合命题"P 当且仅当 Q"称为 P 与 Q 的等价式，记为 $P\leftrightarrow Q$. 并规定 $P\leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真或同时为假.

例 1.10　P:$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

Q:$\triangle ABC$ 中有两个角相等.

解　命题 $P\leftrightarrow Q$ 就是"$\triangle ABC$ 是等腰三角形当且仅当 $\triangle ABC$ 中有两个角相等". 显然就这个例子而言 $P\leftrightarrow Q = 1$.

以上定义了 5 种最基本、最常用、也是最重要的联结词 $\neg$ 、$\wedge$ 、$\vee$ 、$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$，将它们组成一个集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，称为一个联结词集. 其中 $\neg$ 为一元联结词，其余的都是二元联结词. 对于这个联结词集需要作以下说明：

(1) 联结词来源于日常使用的相应的词汇，我们的规定与它们的实际含义在很大程度上是一致的，但由于自然语言的歧义性，期间并不完全一致. 在以后的使用中，以上联结词组成的复合命题的真假值一定要根据这 5 个联结词的定义去理解，而不能根据日常语言的意义去理解.

(2) 在今后我们主要关心的是命题间的真假值的关系，而不讨论命题的内容.

(3) 由联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的一个联结词联结一个或两个原子命题组成的复合命题是最简单的复合命题，可以称它们为基本的复合命题，为帮助读者记忆，将基本复合命题的取值情况列表，见表 1-1.

(4) 多次使用联结词集中的联结词，可以组成更复杂的复合命题. 求复合命题的真值时，除依据表 1-1 外，还规定联结词的优先顺序. 将括号也算在内，本书规定的联结词优先顺序为：()、$\neg$ 、$\wedge$ 、$\vee$ 、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$，对于同一优先级的联结词，先出现者先运算.

表 1-1　基本复合命题的真值

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

(5) 从例 1.9 可以看出，今后我们关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而不关心命题的内容.

例 1.11　令 P：北京比天津人口多.

Q：$2+2=4$.

R：乌鸦是白色的.

求下列复合命题的真值：

(1)$((\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \to R$.

(2)$(Q \vee R) \to (P \to \neg R)$.

(3)$(\neg P \vee R) \leftrightarrow (P \wedge \neg R)$.

解　P,Q,R 的真值分别为 1,1,0，容易算出(1),(2),(3) 的真值分别为 1,1,0.

1.2　命题公式及其赋值

1.2.1　命题公式的定义

为了对命题作逻辑演算，采用数学手法将命题符号化(形式化)是十分重要的. 通常，如果 P 表示真值未指定的任意命题，我们就称 P 为命题变项(或命题变元)；如果 P 表示真值已指定的命题，我们就称 P 为命题常项(或命题常元).

命题与命题变项含义是不同的，命题指具体的陈述句，是有确定的真值，而命题变项的真值不定，只当将某个具体命题代入命题变项时，命题变项化为命题，方可确定其真值. 命题与命题变项像