

大學用書

李代數與表現理論之導引

J. E. Humphrey 著

張 瑞 吉 譯

國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

大學用書

李代數與表現理論之導引

J. E. Humphrey 著

張 瑞 吉 譯

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

國立編譯館主編
黎明文化事業公司出版

版權所有

翻印必究

310(69-64)

李代數與表現理論之導引

著 者：J. E. Humphrey

翻 譯 者：張 瑞 吉

出 版 者：黎明文化事業股份有限公司

地 址：臺北市信義路二段二一三號十一樓
行政院新聞局出版事業登記臺業字第一八五號

總發行所：

臺北市長安東路一段五十六號

門市部：

臺北市信義路二段二一三號綜合書城

臺北市長安東路一段五十六號

臺北市重慶南路一段四十九號

臺北市林森南路一〇七號文化大樓

高雄五福四路九十五號

郵政劃撥帳戶一八〇六一號

印刷者：永裕印刷廠

地 址：臺北市西昌街一六八號

中華民國七十年八月初版

定 價：新 臺 幣 一 八 〇 元

◀如有缺頁、倒裝請寄回換書▶

序 言

本書的主要內容是介紹讀者有關特徵數為 0 的代數封閉體上的半單李代數的經典理論，特別是表現理論。閱讀本書所需的預備知識為線性代數（包括固有值，雙線性形式，歐氏空間以及向量空間的張量積）和一些抽象代數的方法。一般說來，一個聰明而且用功的大學部學生要瞭解前四章的內容是不很難的，不過若想唸懂後三章則須有較好的程度。

除了在物理以及數學的許多部門上的用途之外，半單李代數本身就具有吸引力因為它有某種程度和完整的基本結果。自從十年前 Jacobson 的經典之作出版以來，此理論已改良許多，即使是古典部分也有很多改進的地方。我盡力地將他們編在此書裏並使這些內容較為非專家們所接受。對於專家來說，以下幾點是要特別注意的：

(1) 在討論半單李代數的情形下，爲了要以環面子代數取代較古典的 Cartan 子代數我特別強調線性變換的 Jordan-Chevalley 分解。

(2) Cartan 子代數的共軛定理的證明是採用基礎的李代數方法（根據 D. J. Winter 和 G. D. Mostow 的證明）而避免用代數幾何。

(3) 同構定理先是用基礎的方法證明（定理 14.2），其後又可由 Serre 定理（18.3）推論而得。Serre 定理提供一個用生成元及關係來呈現李代數的想法。

(4) 從一開始，在課文及習題裏就強調 A, B, C, D 型單代數。

(5) 根系（第三章）以及一些權論是以公理化的方法處理的。

(6) 在 23 節和 24 節裏我介紹 Weyl 的特徵標公式。整個過程是基於 Harish-Chandra 的特徵標理論而與 Freudenthal 的重複數公式 (22.3) 是不相關的。這是取自 D. N. Verma 博士論文以及 I. N. Bernštein, I. M. Gel'fand, S. L. Gel'fand 的最近成果。

(7) 在第七章我根據 R. Steinberg 的講義介紹 Chevalley 羣論的基本造法。

我省略一些標準的題材（其中大部分我認為是屬於更深的課程）例如，雙對同調，Levi 和 Mal'cev 定理，Ado 和 Iwasawa 定理，非代數封閉體上的分類，質特徵數的李代數，這些題材可在參考文獻的一些書及文章裏，特別是 Jacobson [1], [2], Winter [1], Seligman [1] 找得到。我希望讀者能繼續探討這些題材。

J. E. Humphrey

記 號

$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 分別代表整數，非負整數，有理數，實數，以及複數。

$\mathbb{L}$ 表示向量空間的直和

$A \rtimes B$ 表示羣 A 與羣 B 的半直積，其中以 B 為正規子羣

Card = Cardinality

char = characteristic

det = 行列式值

dim = 維數

Ker = 核

Im = 像

Tr = 跡

目 錄

序 言	1
第一章 基本概念	1
1. 定義與範例	1
1.1 李代數的觀念	1
1.2 線性李代數	2
1.3 導子李代數	6
1.4 抽象李代數	7
2. 理想與同態	9
2.1 理想	9
2.2 同態與表現	12
2.3 自同構	13
3. 可解李代數與冪零李代數	17
3.1 可解性	17
3.2 冪零性	18
3.3 Engel 定理的證明	20
第二章 半單李代數	23
4. Lie 定理與 Cartan 定理	23
4.1 Lie 定理	23
4.2 Jordan-Chevalley 分解	26

2 李代數與表現理論之導引

4.3 Cartan 準則	29
5. Killing 形式	33
5.1 半單性的判斷準則	33
5.2 L 的單理想	35
5.3 內導子	36
5.4 抽象的 Jordan 分解	36
6. 表現的完全可約性	38
6.1 模	38
6.2 表現的 Casimir 元素	41
6.3 Weyl 定理	43
6.4 Jordan 分解的保存	44
7. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ 的表現	48
7.1 權與極大向量	48
7.2 既約模的分類	48
8. 根空間分解	52
8.1 極大環面子代數與根	52
8.2 H 的中心化子	54
8.3 正交性質	56
8.4 整數性質	58
8.5 有理性質, 總結	59
第三章 根 系	63
9. 公理化	63
9.1 歐氏空間中的鏡射	63
9.2 根系	64
9.3 範例	65

9.4 根對	67
10. 單根與 Weyl 羣	71
10.1 基底與 Weyl 室	71
10.2 有關單根的引理	74
10.3 Weyl 羣	75
10.4 既約的根系	78
11. 分類	82
11.1 Φ 的 Cartan 矩陣	82
11.2 Coxeter 圖與 Dynkin 圖示	83
11.3 既約成分	85
11.4 分類定理	85
12. 根系與自同構的建構	94
12.1 $A - G$ 型的建構	94
12.2 Φ 的自同構	97
13. 權的抽象理論	99
13.1 權	99
13.2 制固權	101
13.3 權 δ	104
13.4 飽和權集	104
第四章 同構與共軌定理	109
14. 同構定理	109
14.1 簡化成單純的情形	109
14.2 同構定理	110
14.3 自同構	114
15. Cartan 子代數	116

4 李代數與表現理論之導引

15.1 L 關於 adx 的分解	117
15.2 Engel 子代數	118
15.3 Cartan 子代數	119
15.4 函子的性質	121
16. 共軛定理	122
16.1 羣 $\mathcal{S}(L)$	122
16.2 CSA 的共軛性 (可解的情形)	123
16.3 Borel 子代數	125
16.4 Borel 子代數的共軛性	126
16.5 自同構羣	130
第五章 存在定理	133
17. 泛包絡代數	133
17.1 張量與對稱代數	133
17.2 $u(L)$ 的建構	135
17.3 PBW 定理與其影響	137
17.4 PBW 定理的證明	139
17.5 自由李代數	142
18. 生成元和關係	143
18.1 L 所滿足的關係	144
18.2 由 (S1)–(S3) 推論而得的結果	145
18.3 Serre 定理	148
18.4 應用: 存在與唯一定理	151
19. 單代數	153
19.1 半單性的判斷準則	153
19.2 古典代數	154

19.3 G_2 型代數	155
第六章 表現理論	161
20. 權與極大向量	161
20.1 權空間	161
20.2 標準循環模	162
20.3 存在與唯一定理	164
21. 有限維模	168
21.1 有限維的必要條件	168
21.2 有限維的充分條件	169
21.3 權鏈與權圖	172
21.4 $V(\lambda)$ 的生成(衍生)元與關係	173
22. 重複數公式	177
22.1 一個泛 Casimir 元素	177
22.2 權空間上的跡	179
22.3 Freudenthal 公式	182
22.4 範例	185
22.5 形式特徵標	187
23. 特徵標	190
23.1 不變的多項式函數	190
23.2 標準循環模與特徵標	193
23.3 Horish-Chandra 標定理	195
附錄	199
24. Weyl, Kostant 及 Steinberg 等公式	203
24.1 H^* 上的一些函數	203
24.2 Kostant 的重複數公式	205

24.3 Weyl 公式	208
24.4 Steinberg 公式	211
第七章 Chevalley 代數與羣	215
25. L 的 Chevalley 基底	215
25.1 根對	215
25.2 Chevalley 基底的存在性	217
25.3 唯一性的問題	219
25.4 簡化成質數體	220
25.5 (正則型) Chevalley 羣的建構	221
26. Kostant 定理	225
26.1 一個組合引理	225
26.2 特別情形: $sl(2, F)$	226
26.3 關於交換的引理	228
26.4 Kostant 定理的證明	230
27. 容許格子	232
27.1 容許格子的存在性	232
27.2 容許格子的穩定化子	235
27.3 容許格子的種類	237
27.4 任意體上的討論	239
27.5 相關結果的縱覽	240
索引	243
符號索引	253
參考文獻	256

第一章 基本概念

在這一章裡 $\mathbf{F}$ 表代表任意（可交換）體。

1. 定義與範例

1.1. 李代數的觀念

李代數是在線性變換的向量空間中賦上一個新的運算：

$[x, y] = xy - yx$ （其中右端的運算是通常的運算）之後的自然產物，新運算在一般的情形下，既沒有可交換性也沒有結合性。我們可以抽象地用幾個公理描述這個系統。

定義：設 L 為體 $\mathbf{F}$ 上的向量空間，而 $L \times L \rightarrow L$ 為 L 中的一個運算，記為 $(x, y) \rightarrow [xy]$ 並稱為 x 與 y 的括弧或換位元素。再設這個括弧運算滿足下列公理：

(L1) 括弧運算為雙線性。

(L2) $[xx] = 0$ 對所有 $x \in L$ 。

(L3) $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0$ ($x, y, z \in L$)

則稱 L 為 $\mathbf{F}$ 上的李代數。

公理 (L3) 稱為 **Jacobi 恆等式**。注意，將 (L1) 和 (L2) 應用到 $[x+y, x+y]$ 上面去會得到反交換性：(L2') $[xy] = -[yx]$ （反之，若 $\text{char } \mathbf{F} \neq 2$ ，則顯然可由 (L2') 導出 (L2)。）

如果 $\mathbf{F}$ 上的兩個李代數 L, L' 之間存在一向量空間同構 $\phi: L \rightarrow L'$ 具有如下的性質：對所有的 $x, y \in L$ 滿足

$$\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)]$$

則稱 L 和 L' 是同構（ ϕ 稱為李代數 L 與 L' 之間的一個同構）。同理，我們也可以很容易地介紹（李）子代數這個觀念：設 K 是 L 的一個子空間。如果對任意 $x, y \in K$ ，總有 $[xy] \in K$ ，則稱 K 是 L 的一個子代數；當然， K 在括弧運算下自成一個李代數。注意，任意非零元素 $x \in L$ 定義一個一維子代數 $\mathbf{F}_x$ ，其運算依 $(L2)$ 是自明的。

在此書中我們幾乎只考慮有限維的向量空間的李代數。除非另有例外的敘述我們總是做這樣的假設。然而我們急須指出在研究表現理論時（五至七章）某些 $\mathbf{F}$ 上的無限維向量及結合代數扮演一個極重要的角色。在看一些具體的例子之前我們也提醒讀者一下，即使只假定 L 為交換環上的一個模，李代數的公理還是有意義的，不過在此我們將不討論這觀點。

1.2. 線性李代數

設 V 為 $\mathbf{F}$ 上的有限維向量空間，以 $\text{End } V$ 表示 V 上的一切線性變換 $V \rightarrow V$ 所組成的集合。 $\text{End } V$ 可看成是 $\mathbf{F}$ 上的一個 n^2 維向量空間（ $n = \dim V$ ），同時 $\text{End } V$ 對於通常的乘法（映射的合成）形成一個環。定義一個新運算 $[xy] = xy - yx$ ，稱為 x 和 y 的括弧。在此運算下 $\text{End } V$ 成為 $\mathbf{F}$ 上的李代數：公理 $(L1)$ 及 $(L2)$ 立刻可檢驗出，然而 $(L3)$ 需要一個簡單的計算（希望讀者自證之）。為了要區分這個新的代數結構和老的結合結構，我們記具有新結構的李代數 $\text{End}(V)$ 為 $gl(V)$ 並且稱為一般線性李代數（因其與一般線性羣 $GL(V)$ 有很密切的關係， $GL(V)$ 為 V 上一切可逆自同構形成的集合）。當 V 為無限維時我們還是採用記號 $gl(V)$ 而不另作說明。

李代數 $gl(V)$ 的任意子代數都稱為線性李代數。若讀者認為矩陣比線性變換更適意的話則可固定 V 的一組基底，藉以認同 $gl(V)$ 和 $\mathbf{F}$ 上的一切 $n \times n$ 矩陣所成的集合記為 $gl(n, \mathbf{F})$ 。這樣的做法是無害的，而且對於明確的計算是很方便的。為參考之故，我們寫下 $gl(n, \mathbf{F})$ 的標準基底矩陣 e_{ij} , $1 \leq i, j \leq l$, (在 (i, j) 位置為 1 其他為 0) 的乘法表。因為 $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, 所以

$$(*) \quad [e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{ki}e_{jl}$$

注意上式的係數為 ± 1 或 0？特別的是這些係數都落在 $\mathbf{F}$ 的質體內。

我們現在就舉幾個例子看看，這些例子將是此書中整個理論的中心。他們分成四大族 $A_l, B_l, C_l, D_l (l \geq 1)$ 而統稱為古典代數（因為他們與古典線性李羣相對應）。

A_l : 設 $\dim V = l + 1$ 。以 $sl(V)$ 或 $sl(l+1, \mathbf{F})$ 表示從 V 映至 V 的所有跡為 0 的線性變換組成的集合。記住，一矩陣的跡是指它的對角線上所有成分的和；它與 V 的基底的選取無關，因此上面的說法是沒有問題的。）因為 $Tr(xy) = Tr(yx)$ 及 $Tr(x+y) = Tr(x) + Tr(y)$ 所以 $sl(V)$ 為 $gl(V)$ 的子代數，稱為特殊線性代數因為它與特殊線性羣 $SL(V)$ ，即從 V 映至 V 的一切行列式為 1 的線性變換組成的羣；有所關連。那麼 $sl(V)$ 的維數為何呢？一方面 $sl(V)$ 為 $gl(V)$ 的真子代數因此其維數最多是 $(l+1)^2 - 1$ 。他方面，我們能寫出 $(l+1)^2 - 1$ 個跡為 0 而且是線性獨立的矩陣：取一切的 $e_{ij} (i \neq j)$ 以及一切的 $h_i = e_{i1} - e_{i+1, i+1} (1 \leq i \leq l)$ ，總數正好是 $l + (l+1)^2 - (l+1)$ 。我們將把這一組基底看成是 $sl(l+1, \mathbf{F})$ 的標準基底。

C_l : 設 $\dim V = 2l$ ，其基底為 $(v_1, \dots, v_{2l})$ 。藉矩陣

$$s = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$$

在 V 上定義一個非退化斜對稱形式 f 。（若 V 有一非退化雙線性形式

f 滿足 $f(v, w) = -f(w, v)$ 則不難證明 V 的維數是偶數。) 以 $sp(V)$ 或 $sp(2l, \mathbf{F})$ 表示所有線性映射 $x: V \rightarrow V$ 而且滿足條件

$$f(x(v), w) = -f(v, x(w)), v, w \in V$$

組成的集合, 而且稱其為耦對代數。讀者易證 $sp(V)$ 在括弧運算下是封閉的。若以矩陣表示, 則

$$x = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} (m, n, p, q \in gl(l, \mathbf{F})) \text{ 爲耦對的條件}$$

是 $sx = -x^t s$ ($x^t = x$ 的轉置), 即 $n^t = n$, $p^t = p$ 而 $m^t = -q$ (最後的條件使 $Tr(x) = 0$ 。) 現在可很容易地算出 $sp(2l, \mathbf{F})$ 的一組基底。取對角矩陣 $e_{ii} - e_{l+i, l+i} (1 \leq i \leq l)$, 共有 l 個。加上 $e_{ij} - e_{l+j, l+i} (1 \leq i \neq j \leq l)$, 共有 $l^2 - l$ 個。對於 n 我們取矩陣 $e_{i, l+i} (1 \leq i \leq l)$ 以及 $e_{i, l+j} + e_{j, l+i} (1 \leq i < j \leq l)$, 共有 $l + \frac{1}{2}l(l-1)$ 個, 同理, p 也可如法炮製。全部加起來我們就得 $\dim sp(2l, \mathbf{F}) = 2l^2 + l$

B_l : 設 $\dim V = 2l + 1$ 爲奇數, 取 f 爲 V 上的非退化對稱雙線性形式其矩陣表示爲

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$$

正交代數 $o(V)$ 或 $o(2l+1, \mathbf{F})$ 是由所有的線性映射 $x: V \rightarrow V$ 且滿足條件

$$f(x(v), w) = -f(v, x(w)), v, w \in V$$

(與 C_e 的條件相同) 者組成。若我們將 x 作與 s 相同的分割

$$x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix}$$

則條件 $sx = -x^t s$ 與以下的條件組等價:

$$a = 0, c_1 = -b_2^t, c_2 = -b_1^t, q = -m^t, n^t = -n, p^t = -p.$$

(正如 C_l 的情形, 這證明了 $Tr(x) = 0$) 至於基底, 可先取 l 個對角矩陣 $e_{ii} - e_{l+i, l+i} (2 \leq i \leq l+1)$, 加上 $2l$ 個只牽涉到第一列與第一行的矩陣: $e_{1, l+i+1} - e_{i+1, 1}$, 和 $e_{1, i+1} - e_{l+i+1, 1} (1 \leq i \leq l)$ 。對 n 取 $e_{i+1, l+j+1} - e_{j+1, l+i+1} (1 \leq i < j \leq l)$, 而且對 p 取 $e_{i+l+1, j+1} - e_{j+l+1, i+1} (1 \leq j < i \leq l)$ 。基底元素的總個數為 $2l^2 + l$ (注意: 這也是 C_l 的維數)。

D_l : 我們將在此造另一個正交代數。除了 $\dim V = 2l$ 是偶數而且 s 有較簡單的形式外

$$\begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}$$

整個造法完全和 B_l 一樣。我們讓讀者自己去造基底並且證明 $\dim o(2l, \mathbf{F}) = 2l^2$ (習題 8)。

在這一小節裏我們再提出 $gl(n, \mathbf{F})$ 的另外幾個子代數做為結束。這幾個子代數將為我們扮演着很重要的配角。令 $t(n, \mathbf{F})$ 為由一切上三角矩陣 $(a_{ij}), a_{ij} = 0$ 如果 $i > j$ 所組成的集合。令 $n(n, \mathbf{F})$ 為嚴格上三角矩陣 $(a_{ij} = 0$ 如果 $i \geq j$)。最後令 $d(n, \mathbf{F})$ 為由所有的對角矩陣組成的集合。顯然可驗證出這當中的任何一個在括弧運算下是封閉的。同時也該注意到

$$t(n, \mathbf{F}) = d(n, \mathbf{F}) + n(n, \mathbf{F})$$

(向量空間的直和), 以及

$$[d(n, \mathbf{F}), n(n, \mathbf{F})] = n(n, \mathbf{F}),$$

因此

$$[t(n, \mathbf{F}), t(n, \mathbf{F})] = n(n, \mathbf{F}),$$

參考習題 5。(若 H, K 為 L 的子代數, $[H, K]$ 表示 L 中一切的換位元素 $[xy]$, $x \in H$ 及 $y \in K$, 生成的子空間。)

1.3. 導子李代數

一些由線性變換組成的李代數可以很自然地看成是代數的導子組成的。為此, 我先定義 $\mathbf{F}$ 代數。所謂的 $\mathbf{F}$ 代數 (不必有結合性) 是指 $\mathbf{F}$ 上的一個向量空間 $\mathcal{A}$ 具有一雙線性運算

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(a, b) \longrightarrow ab$$

(如果 $\mathcal{A}$ 是李代數, 我們就用括弧來表示運算)。其次定義導子。所謂 $\mathcal{A}$ 的導子是指一線性變換

$$\delta: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

滿足條件

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b.$$

易於驗證 $\mathcal{A}$ 的所有導子組成的集合 $Der \mathcal{A}$ 為 $End \mathcal{A}$ 的子空間。讀者也應證明兩個導子的換位元素 $[\delta, \delta']$ 還是導子 (然而通常的乘積則不一定是, 參考習題 11)。所以 $Der \mathcal{A}$ 為 $gl(\mathcal{A})$ 的子代數。

因為在上面所敘述的定義下, 李代數就是一個 $\mathbf{F}$ 代數, 所以 $Der L$ 是有定義的。某些導子的產生是很自然的。譬如說, 令 $x \in L$ 則

$$y \longrightarrow [xy]$$

為 L 的一個自同態, 我們記之為 adx 。實際上, $adx \in Der L$, 這是因為我們能夠將 Jacobi 恒等式 (利用 (L2')) 重新寫成:

$$[x[yz]] = [[xy]z] + [y[xz]].$$

這種形式的導子稱為內導子, 其他的都稱為外導子。當然很可能 $adx = 0$ 而 $x \neq 0$: 例如在任何一個一維李代數裏就發生了這種情形。映