经济数学基础

概率统计

（第3版）

隋亚莉 李鸿儒 编著

清华大学出版社

经济数学基础

概率统计

（第3版）

隋亚莉 李鸿儒 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

全书共分为 8 章：第 1 章为事件及其概率的概念与计算；第 2,3 章为随机变量及其分布；第 4 章为随机变量的数字特征；第 5 章为极限定理；第 6 章为数理统计的基本概念；第 7,8 章为统计推断的基本方法. 每章后附有习题，书末附有习题答案. 阅读本书只需具备微积分的数学基础.

本书可作为高等学校经济学、管理学等各专业“概率论与数理统计”课程教材.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/隋亚莉，李鸿儒编著. —3 版. —北京：清华大学出版社，2007. 1
(经济数学基础)
ISBN 978-7-302-14211-9

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①隋…②李… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 147503 号

责任编辑：刘 颖 王海燕
责任校对：王淑云
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社 **地 址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn **邮 编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175 **邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015 **客户服务**：010-62776969
印 装 者：清华大学印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：185×230 **印 张**：12 **字 数**：234 千字
版 次：2007 年 1 月第 3 版 **印 次**：2007 年 1 月第 1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：16.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103 产品编号：021796-01

编委会

主　编　韩玉良

编　委（按姓氏笔画为序）

于永胜　李鸿儒　陈卫星　郭　林

崔书英　隋亚莉　魏　平

序

“经济数学基础”是高等学校经济类和管理类专业的核心课程之一.该课程不仅为后继课程提供必备的数学工具，而且是培养经济管理类大学生数学素养和理性思维能力的最重要途径.作为山东省高等学校面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的项目，中国煤炭经济学院和烟台大学的部分教师组成课题组，详细研究了国内外一些有关的资料，根据经济管理专业的特点和教学大纲的要求，并结合自己的教学经验，编写了这套“经济数学基础”教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率统计》和《数学实验》.经过一年多的试用，在充分听取校内外专家意见的基础上，课题组对教材进行了全面的修改和完善，使之达到较高的水平.这套教材有以下特点：

第一，在加强基础知识的同时，注意把数学知识与解决经济问题结合起来.在教材各部分都安排了经济应用的内容，同时在例题、习题中增加了相当数量的经济应用问题，这有助于培养学生应用数学知识解决实际问题，特别是经济问题的能力.

第二，增加了数学实验的内容.其中一部分是与教学内容相关的演示与实验，借助于这些演示和实验，可以帮助学生更直观地理解和掌握所学的知识；另一部分是提供一些研究型问题（其中有相当一部分是经济方面的），让学生参与运用所学的数学知识建立模型，再通过上机实验来解决实际问题.应该说，这是对传统教学方法和教学过程较大的改革.

第三，为了解决低年级大学生普遍感到高等数学课抽象难学，不易掌握的问题，对一些重要的概念和定理尽可能从实际问题出发，从几何、物理或经济的直观背景提出问题，然后再进行分析和论证，最后得到结论.对一些比较难的定理，则注重运

用从特殊到一般的归纳推理方式．这样由浅入深使学生易于接受和掌握，同时在学习中领略了数学概念、数学理论的发现和发展过程，这对培养学生创造性思维能力是有帮助的．

相信这套教材的出版，对经济和管理类专业大学生的学习及综合素质的提高，定会起到积极的作用．

郭大钧

于山东大学南院

2000 年 6 月 16 日

第3版前言

进入21世纪以来，随着现代技术的发展及市场经济对人才的需求，我国人才培养的规模和策略都发生了很大的变化，相应的教育理念和模式也都在不断的调整之中，作为传统教育科目的数学受到了很大的冲击，改革与探索势在必行. 为此，我们于1998年承担了山东省高等学校面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的项目，编写了一套适合于财经类专业使用的"经济数学基础"系列教材. 这套教材包括《微积分》、《线性代数》、《概率统计》和《数学实验》及其相应的学习指导书共7部，于2000年8月出版，2004年8月修订再版. 这套系列教材曾获得2001年山东省优秀教学成果奖. 此次就是在原有教材的基础上，结合我们几年来的使用情况，听取一线教师及专家的意见后，进一步修订而成.

从教学实际出发，我们的观点是，适合的才可能成为最好的，因此在编写这套教材的过程中，我们始终注意把握财经类专业对数学的需求和财经类专业学生的特点. 数学思想是数学的灵魂，因此在介绍基本概念、基本理论和基本方法时，除了结合它们的产生背景、几何应用、经济应用给学生直观的了解之外，我们始终注意从数学理论的发现、发展直至应用等多角度来讲述，让数学思想贯穿始终，使学生从总体上把握对数学观念、数学思维、数学语言、数学方法的宏观认识，让学生感受到数学的美妙和严谨，提高其科技文化素质. "没有留下翅膀的痕迹，我已飞过天空"，泰戈尔的这行诗句或许可以用来形容素质教育的一种境界.

高等教育的发展改变了原有的教学环境和对象，为了适应学生个性化的教学要求，很多学校都实行了分层次教学. 在这一点上本套教材通过辅助教材的配合较好地实现了这项功能. 在

保证教材必要的系统性和严谨性的同时，在强调理论或应用方面，部分内容有较大的选择余地和拓展空间，但并不影响阅读的连贯性；通过对典型例题的讲解，教会学生如何思考问题和分析问题的方法；习题的选配也按题型与难度分成不同层次，可以适当选择. 书中带“*”号内容为选学内容。

在处理传统教学与现代技术方面，我们增加了与教材紧密结合的数学实验的内容，通过实验，推进了数学与计算机的相互结合，培养学生运用数学理论和方法建立数学模型，进而提高数值处理和数值计算的能力. 同时应用计算机展示了数学中抽象性、严谨性的一面，培养了学生的应用能力和创新精神.

在本书的修订过程中，多年使用过本套教材的广大师生给我们提出了宝贵的意见和建议，对此表示诚挚的谢意！可以说，这套书是在使用实践中完善的. 本书的出版是我们多年探索与实践的结果，然而对数学教学的研究和探索永远没有止境，恳请广大读者继续提出宝贵意见. 最后感谢清华大学出版社对本书的再版给予的大力支持.

作　者
2006年7月

目录

第 1 章 随机事件与概率

客观世界发生的现象一般可以分成两大类：一类是**确定性现象**，另一类是**随机现象**.

确定性现象是指在相同的条件下重复试验，总是出现某一个确定结果的现象；只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的. 例如，上抛的均匀硬币必然下落；作匀速直线运动的物体，如无外力作用，必然保持其匀速直线运动状态；在标准大气压下，加热到 100℃的水必然沸腾等，这些现象都是确定性现象.

随机现象是指在相同条件下重复试验，可能发生多种不确定结果的现象；在每次试验之前，哪一个结果发生是无法预言的. 例如，抛一枚均匀硬币，可能正面朝上，也可能反面朝上；向一目标射击，可能击中，也可能不击中；测量某个物理量，由于许多偶然因素的影响，各次测量结果不一定相同等，这些现象都是随机现象.

表面看来，随机现象似乎无规律可循，就个别试验而言，到底产生哪一种结果是不确定的，但就大量重复试验而言，随机现象必然呈现出一种规律性. 例如，抛一枚均匀硬币，当投掷次数很大时，出现正面和反面的次数几乎各占一半；测量一个长度 a，测量几次可能结果各不相同，看不出什么规律性，但测量次数很多时，就会发现各次测量值的大小呈现一种规律性：测量值分布在 a 左右基本呈现对称性，且越靠近 a，数值越密集，越远离 a，数值越稀少. 像这种通过大量重复试验或观察呈现出来的规律性，称为随机现象的**统计规律性. 概率论与数理统计就是从数量角度研究随机现象统计规律的一门数学学科.**

概率论与数理统计的历史已有 300 多年，最早由法国数学家帕斯卡和费马等就机会游戏中的一些问题的研究建立了概率论的一些基本概念，如事件、概率、数学期望等. 在其后 200 年间，极限定理成了概率论研究的中心课题，这个时期先后作出重要贡献的数学家有伯努利、拉普拉斯、泊松和高斯等. 直到 20 世纪初，由于新的更有力的数学方法的引入，一些古典问题得到较好解决，建筑在公理、定义和定理基础上的严格的数学理论才建立起来，使概率论成为一个严谨独立的数学分支.

数理统计以概率论为理论基础，又为概率论应用提供了有力工具. 近几十年来，概率论与数理统计已广泛应用于物理学、生物学、工程技术、保险业、农业、医学、经济学及军事科学等诸多领域，有些还形成了边缘学科. 概率论与数理统计的理论和方法渗入各基础学科、工程技术学科和社会学科已成为近代科学发展的明显特征之一.

1.1 随机事件

为了研究随机现象的内在规律性,必然要对客观事物进行观察、测定和实验,统称之为**随机试验**,简称**试验**,并规定概率论里所研究的试验具有下列特点:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的结果具多种可能性,而且在试验之前可以明确试验的全部可能结果;

(3) 试验之前不能准确预言该次试验将出现哪一种结果.

1. 样本空间

对于一个随机试验,首先关心的是试验全部可能出现的结果,虽然每次试验出现哪一个结果预先不知道.随机试验的一个可能出现的结果(不能再分解),称为一个**样本点**,一般用字母 ω 表示.可能出现的结果的全体,称为**样本空间**,用 Ω 表示.显然,样本空间 Ω 是全体样本点 ω 的集合.在具体问题中,给定样本空间是对随机现象进行数学描述的第一步.

例 1.1 投掷一枚硬币,可能出现正面或反面.记 ω_1 为"出现正面"、ω_2 为"出现反面",则样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 1.2 从甲、乙、丙、丁四人中选出组长和副组长各一名.以"甲乙"表示"甲被选为组长,乙被选为副组长",则选举的全部可能结果共有 12 种:$\Omega=\{$甲乙,甲丙,甲丁,乙甲,乙丙,乙丁,丙甲,丙乙,丙丁,丁甲,丁乙,丁丙$\}$.

例 1.3 记录某个电话交换台在一段时间内的呼叫次数.每天这段时间接到的呼叫次数是随机的,如果次数很大,为数学上的方便起见,可以认为呼叫次数没有上限,则样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$是一个无穷集合.

例 1.4 考察某人在公共汽车站等候每隔 5 分钟经过一辆的公共汽车的候车时间,可取 $\Omega=[0,5]$.这个样本空间是实数轴上的一个区间,其中任意一点都是一个样本点.

2. 事件

随机试验中,可能发生也可能不发生的随机试验的结果,称为**随机事件**,简称**事件**.一般用大写拉丁字母 A,B,C 等表示.

为了说明事件的数学表示方法,再看例 1.2.

从甲、乙、丙、丁四人中选出组长和副组长各一名,则可能出现的结果是:

甲乙, 甲丙, 甲丁

乙甲, 乙丙, 乙丁

丙甲， 丙乙， 丙丁

丁甲， 丁乙， 丁丙

在这个问题中，这12个样本点是我们关心的事件；但还可以研究另外一些事件，如：$A=\{$甲当选$\}$；$B=\{$甲、乙都当选$\}$；$C=\{$丙当选组长$\}$等.

事件A,B,C与前面几个事件的不同之处在于前面12个事件由单个样本点构成；而事件A,B,C都是由若干个样本点构成的.例如，事件A发生必须且只须下列样本点之一出现：甲乙，甲丙，甲丁，乙甲，丙甲，丁甲.但它们都是样本空间的某个子集.

我们将**样本空间的某个子集，称为事件**；称某事件发生当且仅当它所包含的某一个样本点出现.由一个样本点构成的子集，称为**基本事件**；由多个样本点构成的子集，称为**复合事件**.

样本空间Ω和空集$\varnothing$作为Ω的子集也看作事件.由于Ω包含所有样本点，而在每次试验中必有Ω中的一个样本点出现，即事件Ω必然发生，所以称Ω为**必然事件**；又因在$\varnothing$中不含任何一个样本点，故在每一次试验中$\varnothing$都不会发生，所以称$\varnothing$为**不可能事件**.

必然事件和不可能事件应该说不是随机事件，但为研究方便，将它们作为随机事件的两个极端来处理.

3. 事件间的关系及运算

在同一问题中，我们常常需要考察多个事件及其之间的联系.将事件表示成样本空间的子集，就可方便地运用集合间的关系及运算来讨论事件间的关系及运算.下面讨论的事件均属于同一个样本空间Ω中.

1）事件的包含与相等

若事件A发生必然导致事件B发生，即属于A的样本点都属于B，则称事件B**包含**事件A.记作$A\subset B$或$B\supset A$.

若$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与B**相等**.记作$A=B$.

2）事件的和

事件A与B至少有一个发生，即"A或B"，这一事件，称为事件A与B的**和**（并）.它是由属于A或B的所有样本点构成的集合.记作$A+B$或$A\cup B$.

3）事件的积

事件A与B同时发生，即"A且B"，这一事件，称为事件A与B的**积**（交）.它由既属于A又属于B的所有公共样本点构成.记作AB或$A\cap B$.

事件的和与积可以推广到有限个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$及可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的情形.n个事件的和$A_1+A_2+\cdots+A_n$表示事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$至少发生一个，n个事件的积$A_1A_2\cdots A_n$表示n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生；可列个事件的和$A_1+A_2+\cdots$与积$A_1A_2\cdots$分别表示一列事件$A_1,A_2,\cdots$至少有一个发生和同时发生.

4）事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生这个事件，称为事件 A 与 B 的差. 它是由属于 A 但不属于 B 的样本点构成的集合. 记作 $A-B$.

5）互不相容事件

如果事件 **A 与 B 不能同时发生**，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B **互不相容**（也称**互斥**）. 互不相容事件 A 与 B 没有公共样本点.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则称这 n 个事件互不相容.

6）对立事件

事件 A 不发生这一事件称为事件 A 的对立事件，它由样本空间中所有不属于 A 的样本点构成. 记作 $\overline{A}$.

7）完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant n\ \ i\neq j)$；

(2) $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$.

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个**完备事件组**. 显然，全部的基本事件构成一个完备事件组；任何事件 A 与 $\overline{A}$ 也构成完备事件组.

事件间的关系和运算可用图形表示，见图 1.1.

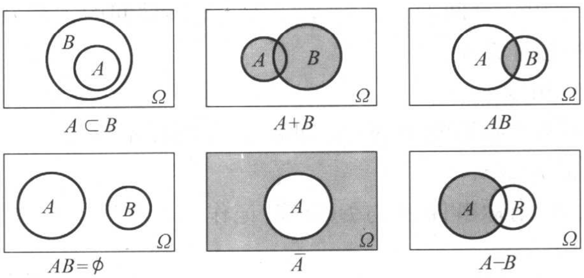

图 1.1

例 1.5 一名射手连续向一目标射击 3 次，事件 A_i 表示该射手第 $i(i=1,2,3)$ 次击中目标. 试用 A_i 表示下列事件：

(1) 第 1 次击中而第 2 次未击中目标；

(2) 三次都击中目标；

(3) 前两次击中目标，第 3 次未击中目标；

(4) 后两次射击至少有一次击中目标；

(5) 三次射击中至少有一次击中目标；

(6) 三次射击中恰有两次击中目标；

(7) 三次射击中至少两次击中目标；

(8) 三次射击中至多有一次击中目标；

(9) 三次射击中至多两次击中目标；

(10) 前两次射击至少有一次未击中目标；

(11) 前两次射击都未击中目标.

解 (1) $A_1-A_2=A_1\overline{A}_2=A_1-A_1A_2$；

(2) $A_1A_2A_3$；

(3) $A_1A_2\overline{A}_3$；

(4) A_2+A_3；

(5) $A_1+A_2+A_3$；

(6) $A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$；

(7) $A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$；

(8) $\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3}$ 或 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(9) $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1A_2A_3}$；

(10) $\overline{A}_1+\overline{A}_2=\overline{A_1A_2}$；

(11) $\overline{A}_1\overline{A}_2=\overline{A_1+A_2}$.

关于事件的运算，有下列基本关系式：

(1) $A+B=B+A, AB=BA$； (交换律)

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$； (结合律)

$(AB)C=A(BC)$；

(3) $(A+B)C=AC+BC$； (分配律)

(4) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$， (对偶律)

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A}_i, \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A}_i;$$

(5) $\varnothing\subset A\subset\Omega$；

(6) 若 $A\subset B$，则 $A+B=B, AB=A$；

(7) $A+\varnothing=A, A+\Omega=\Omega, A\varnothing=\varnothing, A\Omega=A$；

(8) $A+B=A+\overline{A}B=B+A\overline{B}=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$；

(9) $\overline{A}=\Omega-A, \overline{\overline{A}}=A, A-B=A\overline{B}$.

例 1.6 化简下列各式：

(1) $(A+B)(A+\overline{B})$；

(2) $\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3}$.

解 (1) $(A+B)(A+\overline{B})=AA+A\overline{B}+BA+B\overline{B}=A+A(\overline{B}+B)+\varnothing=A$.

$$(2)\ \overline{\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3}=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2}\ \overline{\overline{A}_1\overline{A}_3}\ \overline{\overline{A}_2\overline{A}_3}=(\overline{\overline{A}}_1+\overline{\overline{A}}_2)(\overline{\overline{A}}_1+\overline{\overline{A}}_3)(\overline{\overline{A}}_2+\overline{\overline{A}}_3)$$
$$=(A_1+A_2)(A_1+A_3)(A_2+A_3)$$
$$=(A_1+A_1A_3+A_2A_1+A_2A_3)(A_2+A_3)$$
$$=(A_1+A_2A_3)(A_2+A_3)=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3.$$

1.2 随机事件的概率

一个随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生,但通过长期的观察及对问题性质的分析发现,随机事件在一次试验中发生的可能性是有大小之分的,这是一种内在的客观规律性.随机事件的概率就是用来从数量上描述随机事件出现的可能性大小的一个数量指标.它是概率论中最基本的概念之一.

1. 概率的统计定义

人们对概率的认识可以从直观的大量重复试验中获得.

设随机事件 A 在 n 次重复试验中出现了 r 次,称比值 r/n 为这 n 次试验中事件 A 出现的**频率**.记作 $f_n(A)=r/n$.

显然,频率具有下列性质:

(1) 对任意事件 A,$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 对任意有限个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$,有

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

历史上,曾有不少人做过大量投掷硬币的试验,观察“正面向上”这一事件出现的规律.从表1.1的试验记录中可以发现:试验次数较少时频率是不稳定的,当试验次数不断增大时,频率稳定地在数值0.5附近摆动.

表 1.1

实验者	掷硬币次数/次	出现正面次数/次	频率
德摩根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

类似的试验还有:人们发现英语中各个字母被使用的频率相对稳定,表1.2就是一份统计表.其他各种文字也都有类似的规律.在生产生活中也经常遇到同样的例子.如: