高等教育教材

# 应用概率统计

YINGYONG GAILV TONGJI

何良材　田玉芳　编　著
段虞荣　主　审

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

# 应用概率统计

高等教育教材

# 应用概率统计

何良材　田玉芳　编　著
段虞荣　主　审

重庆大学出版社

## 内容提要

本书为高等教育(非数学专业)本、专科(含成人教育)使用教材. 内容分3篇共10章. 主要介绍概率论与数理统计的基本概念、定理及方法,注重概念的引入实质、定理的实用价值、方法的做法步骤. 文字叙述上力求深入浅出,形数结合,重点突出,难点剖透. 强调概率统计的思想与方法是本书的显著特点.

**图书在版编目(CIP)数据**

应用概率统计/何良材,田玉芳编著. —重庆:重庆大学出版社,2006.11

ISBN 7-5624-3830-7

Ⅰ.应... Ⅱ.何... Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第110447号

高等教育教材

**应用概率统计**

何良材 田玉芳 编 著

段虞荣 主 审

责任编辑:曾令维 穆安民 版式设计:曾令维

责任校对:谢 芳 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn(市场营销部)

全国新华书店经销

重庆现代彩色书报印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:14.75 字数:368千

2006年11月第1版 2006年11月第1次印刷

印数:1—3 000

ISBN 7-5624-3830-7 定价:19.00元

# 前言

本书是遵照国家教育部有关高等教育非数学专业《概率统计》课程教学大纲要求，集编著者20多年对该课程教学的实践经验，并结合当前教育实际和社会需要编写而成.

本书分3篇共10章：第1篇概率论（含第1章随机事件及其概率，第2章随机变量及其分布，第3章随机变量的数字特征，*第4章极限定理）；第2篇数理统计（含第5章数理统计基本概念，第6章参数估计与实例，第7章假设检验与实例，*第8章方差分析与实例，第9章回归分析与实例，*第10章质量控制与实例）；第3篇附录（含常用概率统计数值表、概念思考题与范例剖析、习题解答）.

本书供高等院校非数学专业本科（含成教）各专业使用. 教学时数为56学时. 去掉*号内容可作为专科及高职教育有关专业使用.

本书显著的特点是：对基本理念法则充分阐明其来源背景，实质意义，做法步骤，应用去向，力图构筑以"掌握基本知识、方法和使用技能，强化实际应用"为重点，注重培养学生抽象思维、观察综合、应用计算、技能及分析解决问题的基本素质和创新能力；同时文字叙述上力求浅出深入，形数结合，重点突出，难点剖透.

针对当前的教育实际，为方便教与学，我们将习题解答编入附录，作为参考，希望读者正确对待. 并告诫学生千万不可不做作业，照抄了事.

本书由知名数学家段虞荣教授审阅，重庆大学何中市教授（博士生导师），王代先、侯勇之、李新、王新质副教授等对本书提出许多中肯有益的修正意见，作者在此谨向他们深表谢意.

限于作者水平，不妥与错误在所难免，恳求读者不吝赐教.

**编著者**
何良材（教授）
田玉芳（副教授）
2006年9月于重庆大学

# 目录

## 第1篇 概率论

第 3 篇 附 录

# 第 1 篇

# 概 率 论

# 第1章 随机事件及其概率

在自然界和人类社会中，人们经常可能遇到两类不同的现象：一类是在一定条件下必然发生（或必然不发生）某一确定结果的现象. 例如：上抛一枚硬币，必然下落；水温在0 ℃时必然不沸腾，这类现象称为确定性（或必然）现象. 微积分学、矩阵方法等就是研究这类确定性现象规律性的数学学科. 概率统计将目光投向客观世界中另一类现象：非确定性现象——随机现象. 什么叫随机现象？在一定条件下可能出现多种结果，但事先又不能肯定出现哪种结果的现象. 例如，上抛一枚硬币，就可能出现正面朝上，也可能出现反面朝上，但在抛硬币之前，又不能预先肯定到底出现哪一面朝上. 又如，为了了解产品质量，从一批某种产品中任查一件，它可能是正品，也可能是次品，事先无法确定. 称这类现象为随机（或偶然）现象. 概率统计就是研究这类随机现象的统计规律性的数学学科. 对于随机现象，由于人们事先无法肯定它将出现哪一种结果，从表面上看似乎难以捉摸，其结果纯属偶然. 其实并非这样，前人的实践证明：在相同条件下，只要对随机现象进行大量的重复试验（或观测），就会发现各种结果出现的可能性又呈现出某种规律性，并称之为统计规律性.

为使读者对随机现象统计规律性有一个直观的理解，这里不妨来考查一个实例.

某一熟练技术工人，在相同的条件下（比如采用同种原材料、同一机床、同一工艺过程等），按照零件设计的标准尺寸长度 $a$ 加工，生产这种零件. 很明显，零件长度是什么结果是不能事先预测的，纯属不确定型随机现象. 如果仅加工生产一个或两个这样的少数零件，其长度似乎看不出有什么规律；但若大量重复加工生产这种零件，比如 $n$ 个. 经过统计观察，其长度比 $a$ 小的个数和比 $a$ 大的个数大致相等（即具有对称性或均等性，记为 $m_{左} \approx m_{右}$）. 同时这 $n$ 个零件的长度偏离 $a$ 近的个数“多”，偏离 $a$ 远的个数“少”，偏离 $a$ 特别远的个数“极少”（即具有密集性——近密远疏）. 也就是说：这 $n$ 个零件中，正品是多数，次品是少数，废品是极少数. 且当加工零件个数 $n$ 越大时，上述两个特性——对称性、密集性就越明显. 这种统计规律就是著名的正态分布，即中间大、两头小的分布. 当然随机现象的统计规律不只是具有这两个特性的规律，还有许多其他的一些规律，这里只是举例说明随机现象有规律可循的这个事实罢了.

概率统计就是揭示与研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

概率统计的理论与方法在应用上十分广泛，目前它已几乎遍及所有科学技术领域，工农业生产和国民经济的各行各个部门之中. 例如，使用概率统计方法可以进行气象预报、水文预报、地震预报、矿产探测、人口预测、经济预测以及产品的抽样验收；在研制新产品时，用试验设计和数据处理可寻找出最佳生产方案；企业面临扩建、新建、承包三种出路选择时，或某种产品面临大、中、小三种不同生产批量的投产选择时，采用概率统计中的比较期望益损法，均可确定出最佳选择出路，或最佳批量投产；在自动控制中可以给出数学模型，以便通过计算机来控制工业生产；在可靠性工程中使用概率统计方法可以给出器件或装置的使用可靠度及平均寿命的估计；在通讯工程中可以提高信号的抗干扰性和分辨率等.

## 1.1 随机事件

为了研究随机现象,就需要对客观事物进行观察,观察的过程叫试验.在概率论中,把在相同条件下可以重复实现,每次结果不一定相同,试验之前所有可能结果完全已知,但又无法肯定到底会出现哪个具体结果的试验,称为随机试验.

随机试验的每一个可能发生但又不能再细分的结果,称为该试验的一个基本事件,记为$\omega_1,\omega_2,\cdots$.

某试验的全体基本事件所组成的集合,称为该试验的样本空间(或基本事件空间),记为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

**定义 1.1** 样本空间$\Omega$的子集,称为该随机试验的一个随机事件,简称事件,常用大写字母$A,B,C,\cdots$表示,记为$A\subset\Omega,B\subset\Omega,C\subset\Omega,\cdots$.

**例 1** 掷一枚硬币,观察其正面和反面的出现情况,由于该试验的可能结果有两个:正面朝上,记为$\omega_1$;或反面朝上,记为$\omega_2$,因此,该试验有两个基本事件:$\omega_1,\omega_2$;样本空间:

$$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$$

**例 2** 10 件同类产品,分别标有 1,2,…,10 的数字,从中任抽一件观察其标号,由于试验的可能结果有 10 个,分别记为$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}$,因此,该试验有 10 个基本事件:$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}$.样本空间:

$$\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}$$

$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8,\omega_{10}\}$是$\Omega_2$的子集,表示“出现偶数号产品”这一事件.

$B=\{\omega_3,\omega_6,\omega_9\}$是$\Omega_2$的子集,表示“出现产品的号数能被 3 整除”这一事件.

$C=\{\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$是$\Omega_2$的子集,表示“出现的号数大于 2,小于 6”这一事件.

**例 3** 圆形车轮上均匀地刻上区间$[0,3)$上的诸数字,当车轮停定时,观察车轮与地面触点的刻度$x$.由于该试验的可能结果有无穷多个,因此该试验有无穷多个基本事件,即样本空间:$\Omega_3=\{x|0\leqslant x<3\}$.$A=\{x|1\leqslant x<2\}$是$\Omega_3$的子集,表示“触点刻度$x$落入区间$[1,2)$内”这一事件.

由事件定义可知,事件$A$是由基本事件组成.通常,当事件$A$中的一个基本事件出现时,就说事件$A$发生,否则就说$A$不发生,记为$\bar{A}$.对于上面的例 2,如试验结果是“产品标号为 4 出现”,就说$A$发生,也可说$C$发生.

在每次试验中,必定要出现的结果称为必然事件.由于样本空间$\Omega$作为一个事件,也是一个必然事件,因此,通常把必然事件仍记为$\Omega$.

在每次试验中,必然不发生的结果,称为不可能事件,通常把它记为$\varnothing$.

概率论中研究的是随机事件,但为了讨论问题的方便起见,一般将必然事件和不可能事件看成随机事件的两个极端情况.

## 1.2 事件的概率

由于概率统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科,因此,只知道试验中可能出现哪些事件是不够的,还必须对事件的发生作量的描述,即研究随机事件发生的可能性的大小问

题，这就是事件的概率.

当多次作某一随机试验时，常常会察觉到某些事件发生的可能性要大一些，而另一些事件发生的可能性要小一些. 比如例 2 中，任取一件为偶数标号的产品就比能被 3 整除的标号的产品发生的可能性要大一些；而标号为 3 的产品就比能被 3 整除的标号的产品发生的可能性要小一些. 又比如，一批产品中若优质品很多，则从中任取一件恰为优质品的可能性就比较大；而当优质品很少时，取到优质品的可能性就比较小. 这就是说，事件发生的可能性大小是事件本身所固有的一种客观属性. 为了研究事件发生可能性的大小，就需要用一个数能把这种可能性大小表达出来，这种表示事件发生可能性大小的数值叫做事件的概率，通常将事件 $A$ 的概率用符号 $P(A)$ 来表示.

那么，对于一个给定的事件 $A$，其概率 $P(A)$ 到底是一个什么数呢？这个数又如何去求出呢？在概率论的发展史上，人们曾对不同的问题，从不同的角度给出了概率的定义和计算概率的方法. 在此，主要介绍概率的统计定义和古典定义.

### 1.2.1　统计概率

随机事件就个别试验而言具有偶然性的一面，但在大量重复试验中却又具有规律性的一面，从以下引例可以看到这一点.

**引例 1**　历史上有不少人试验过，连续投掷一枚均匀硬币，几个著名的试验结果见表1.1：设 $A$ 表示硬币“正面朝上”这一事件.

事件 $A$ 在 $n$ 次试验中出现 $m_A$ 次，则比值 $f_n(A)=\frac{m_A}{n}$ 称为事件 $A$ 在这 $n$ 次试验中出现的频率.

可以看出，硬币出现“正面朝上”即事件 $A$ 的频率可以认为接近于 0.5，且投掷次数越多，频率越接近于 0.5.

**表 1.1**

| 实验者 | 掷币次数 $n$ | 出现“正面朝上”的次数 $m_A$（频数） | 频率 $f_n(A)=\frac{m_A}{n}$ |
|---|---|---|---|
| 德·摩根 | 2 048 | 1 061 | 0.518 1 |
| 浦　丰 | 4 040 | 2 048 | 0.501 9 |
| 皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |
| 维　尼 | 30 000 | 14 994 | 0.499 8 |

**引例 2**　某厂质检部门，抽检某种产品的质量，其结果见表 1.2：设 $B$ 表示“正品”这一事件.

**表 1.2**

| 抽检总数 $n$ | 10 | 100 | 150 | 600 | 900 | 1 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 正品数 $m_B$ | 7 | 88 | 131 | 548 | 820 | 1 091 |
| 正品率 $f_n(B)=\frac{m_B}{n}$ | 0.7 | 0.88 | 0.873 | 0.913 | 0.911 | 0.909 |

可以认为:正品率接近于0.9,且抽检总数越大,正品率越接近于0.9.

频率反映了一个事件发生的频繁程度,从而在一定程度上刻画了这个事件发生的可能性大小.经验表明,每次试验的频率不尽相同,即频率具有波动性的一面.但在相同条件下重复进行同一试验,当试验的次数 $n$ 很大时,事件 $A$ 发生的频率又总是在一个固定值 $p$ 上下摆动.一般而言,重复试验的次数 $n$ 越大,波动的振幅就越小,即频率又具有稳定性的一面.因此,事件 $A$ 发生的可能性大小,即事件发生的概率,就可以用这个稳定常数值来描述.由此有:

**定义** 1.2(概率的统计定义) 如果在 $n$ 次重复试验中,当 $n$ 充分大时,事件 $A$ 在这 $n$ 次试验中出现的频率稳定在某个固定常数 $p$ 附近,则称此常数 $p$ 为事件 $A$ 出现的统计概率,简称概率,记为

$$P(A)=p$$

由于这个定义是以统计角度为出发点而抽象出来,因此人们常称它为概率的统计定义,并且,这个定义适合于一切类型的随机试验.

在上面两引例中,可以认为 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.9$.

提醒读者注意:事件 $A$ 的频率 $f_n(A)$ 与概率 $P(A)$ 是有区别的.频率是个试验值,具有波动性,它回答的是 $n$ 次试验中事件 $A$ 发生的可能性大小,因此它只能是事件 $A$ 发生可能性大小的一种近似度量.而概率是个理论值,它是由事件的本质所决定的,只能取唯一值,它回答的是一次试验中事件 $A$ 发生的可能性大小,因此,它能精确地度量事件 $A$ 发生的可能性的大小.又由于概率的统计定义只是描述性的,一般不能用来计算事件的概率,通常只能在 $n$ 充分大时,以事件出现的频率作为事件概率的近似值,即

$$P(A)\approx f_n(A)$$

由于 $0\leqslant m_A\leqslant n$,故频率 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$,从而有 $f_n(A)\geqslant 0$,$f_n(\Omega)=1$,故概率有下列性质:

$$P(A)\geqslant 0 \quad (A\text{ 为任何事件})$$

$$P(\Omega)=1 \quad (\Omega\text{ 为必然事件})$$

### 1.2.2 古典概率

对于像本章例1、例2那两个较简单的随机试验,可以直接算出有关事件的概率.此二例的特点是基本事件个数有限,且每个基本事件出现的机会又是相同的.

一般地,若随机试验满足下面两个条件:

(1)基本事件的个数是有限的,即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

(2)每个基本事件发生的可能性相同,即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$$

这种随机现象是概率论早期研究的对象,称为古典型随机试验.古典型随机试验所描述的数学模型称为古典概型.

**定义** 1.3(概率的古典定义) 在古典概型中,如果基本事件的总数为 $n$,而事件 $A$ 又由其中 $m_A$ 个基本事件组成,则定义事件 $A$ 的概率为

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\left(\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}\right) \tag{1.1}$$

这叫概率的古典定义,由它所定义的概率,称为古典概率.可见,对古典概型的问题,只要求出

基本事件总数 $n$ 和事件 $A$ 所包含的基本事件数 $m_A$，由公式(1.1)就可直接计算出事件 $A$ 的概率了.

**例 4**　一盒灯泡共 50 个，已知其中有 2 个次品，求灯泡的次品率(即从中任取一个是次品的概率).

**解**　对 50 个灯泡任意抽取时，每一个都有相同的出现机会，即一共有 50 种等可能性的结果，$n=50$. 若设 $A$ 表示“任取一灯泡是次品”事件，则 $A$ 发生的可能结果有两个，即 $m_A=2$，由古典概率定义：

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}=0.04$$

**例 5**　在 8 位数的电话号码中，求 8 个数字都不相同的概率.

**解**　8 位数的电话号码与数字顺序有关，故为排列问题. 基本事件总数

$$n=10\times10\times\cdots\times10=10^8$$

设 $B$ 表示“8 位数的电话号码中，8 个数字都不相同”事件，从 $0,1,2,\cdots,9$ 这 10 个数字中任取 8 个不同的数字，可以排成 $P_{10}^8$ 个不同的 8 位数电话号码，即事件 $B$ 包含基本事件个数是

$$m_B=P_{10}^8$$

由古典概率定义，有

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{P_{10}^8}{10^8}$$
$$=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{10^8}$$
$$=0.018\ 144$$

**例 6**　一批产品共 200 个，其中有 6 个废品，求

(1)这批产品的废品率；

(2)任取 3 个恰有 1 个废品的概率；

(3)任取 3 个全为正品的概率.

**解**　(1)设 $A$ 表示“任取一件是废品”事件，有 $m_A=C_6^1=6$，此时基本事件总数 $n=C_{200}^1=200$. 由古典概率定义

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{6}{200}=0.03$$

即这批产品的废品率为 0.03.

(2)由题意，从 200 个产品中任取 3 个是一次试验，因是一次取 3 个，又与顺序无关，故为组合问题，基本事件总数为

$$n=C_{200}^3$$

设 $B$ 表示“任取 3 个恰有 1 个废品”事件. 为保证事件 $B$ 的发生，须且只须先从 194 个正品中任取 2 个，再从 6 个废品中取 1 个组成一个基本事件，则 $B$ 所包含的基本事件数 $m_B=C_{194}^2\cdot C_6^1$，于是

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{C_{194}^2\cdot C_6^1}{C_{200}^3}$$

$$=\frac{\frac{194\times 193}{1\times 2}\times 6}{\frac{200\times 199\times 198}{1\times 2\times 3}}$$

$$=0.085\ 5$$

(3)设 $C$ 表示"任取3个全为正品"事件,则 $C$ 所包含的基本事件数 $m_C=C_{194}^3$,由(2)$n=C_{200}^3$,有

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{C_{194}^3}{C_{200}^3}=0.912\ 2$$

## 1.3 事件的关系和运算

从古典概率的计算中可以看到,事件有的比较简单(如基本事件),有些则比较复杂. 为了计算复杂事件的概率,常常需要研究和分析事件间的关系并对其进行必要的运算. 下面介绍几个事件关系的基本概念和几种基本的运算.

1)包含　如果事件 $A$ 发生,必然导致事件 $B$ 发生,则称事件 $B$ 包含事件 $A$(或称 $A$ 是 $B$ 的子事件),记为 $A\subset B$. 也将 $A$ 叫做 $B$ 的子事件.

例如,一件产品合格是指直径和长度都合格,且记

$A_1$:产品合格,$A_2$:直径合格,$A_3$:长度合格;

$\overline{A}_1$:产品不合格,$\overline{A}_2$:直径不合格,$\overline{A}_3$:长度不合格.

则有 $A_1\subset A_2$,$\overline{A}_2\subset\overline{A}_1$.

2)相等　如果 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等或等价,记为 $A=B$.

3)并　两事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生所构成的事件称为 $A$ 与 $B$ 的并(或和),记为 $A\cup B$.

例如,$\overline{A}_2\cup\overline{A}_3=\overline{A}_1$

类似地,$n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生所构成的事件,称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$的并,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,或$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 同样,$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个发生"这一事件.

4)交　两事件 $A$ 与 $B$ 同时发生所构成的事件,称为 $A$ 与 $B$ 的交(或积),记为 $A\cap B$ 或 $AB$.

例如,$A_2\cap A_3=A_1$

类似地,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生"这一事件. 同样,可以定义$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5)互斥　事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 $A$ 与 $B$ 互斥. 如产品合格 $A_1$与产品不合格$\overline{A}_1$ 为互斥事件.

类似地,对 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$互不相容或两两互斥.

6)互逆　如两事件 $A$ 与 $B$ 不同时发生,但又必须有一个发生,即 $AB=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$,则称事件 $A$ 与 $B$ 互逆(或对立)或称 $B$ 是 $A$(或 $A$ 是 $B$)的对立事件,记为 $B=\overline{A}$(或 $A=\overline{B}$).

显然,若两事件互逆,则必然互斥. 但若两事件互斥,则不一定互逆. 并有

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$（德·摩根原理）

以后将互斥事件的并 $A \cup B$，专记为 $A + B$.

7）差　事件 $A$ 发生，但事件 $B$ 不发生所构成的事件称为事件 $A$ 与 $B$ 的差，记为 $A - B$，显然

$$A - B = A\overline{B}$$

事件间的几种主要关系，可用图1.1表示.

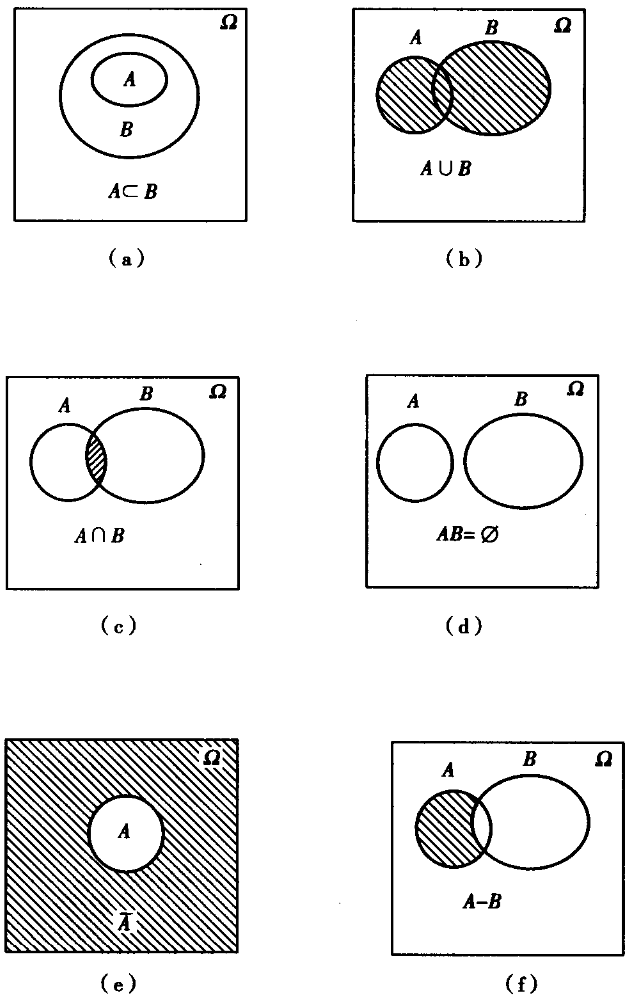


图1.1

**例7**　向预定目标发射三发炮弹，以 $A_1, A_2, A_3$ 分别表示事件"第一、二、三发炮弹击中目标". 试用 $A_1, A_2, A_3$ 表示下列各事件：

（1）三炮同时击中；

（2）至少有一炮击中；

（3）只有第一炮击中；

（4）只有一炮击中；