大地测量学

上卷　第四分册

Ф. Н. 克拉索夫斯基
В. В. 达　尼　洛　夫　著

测繪出版社

大 地 測 量 学

上卷 第四分册

Ф. Н. 克拉索夫斯基 著
В. В. 达尼洛夫
馮尊湯 譯
于守义

前苏联人民委員会高等学校委員会
審定作为高等測量学校教科書

測繪出版社
1957·北京

本書系根据前苏联人民委員会測繪总局編輯出版局（РЕДБЮРО ГУГК при СНК СССР）1939年于莫斯科出版的“大地測量学”上卷第二分册（Руководство по высшей геодезии, Ч.1, Вып. 2）下半本譯出。本書作者是苏联权威大地測量学家、斯大林奖金獲得者Ф.Н.克拉索夫斯基教授和В.В.达尼洛夫教授，經前苏联人民委員会高等学校委員会審定作为高等測量学校教科書。

本書上卷分成四册出版。第四分册包括：三角網按間接观測法平差，精密導綫測量，精密与高精度水准測量，三角高程測量。

本書由馮尊湯、于守义同志翻譯，周江文、胡明城同志校訂。

大地測量学

上卷　第四分册

著　者	Ф.Н.克拉索夫斯基 В.В.达尼洛夫
譯　者	馮尊湯、于守义
出版者	測繪出版社 北京宣武門外永光寺西街3号 北京市書刊出版業營業許可証出字第081号
發行者	新華書店
印刷者	地質印刷厂 北京廣安門内教子胡同甲32号

編輯：夏文豹

印数(京)1—3,600册　　1957年8月北京第1版

开本31″×43″1/25　　1957年8月第1次印刷

字数190,000字　　印張9 3/25

定价(10)1.20元

上卷第四分册

目　录

第十四章　三角網按間接观測法平差

§ 102. 概　說

二等补充網以及三等以下的三角網，其構造往往是很复杂的：作这种網的平差，通常需要牽涉很多連系各点观測方向或角度的条件方程式。

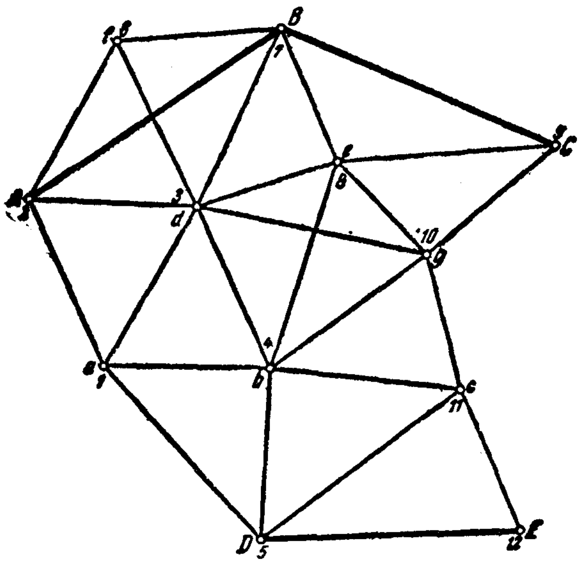

圖　293

补充網連結于許多高級固定点和边，往往使得新点的数目和插入網中的条件数目之比变成很不利——点数不多而条件数目很大。另外，在这些条件中有时有复杂的多边形条件，它們的組成和解算

都特别費事。

圖 293 所示的網中，为了决定七个新点一共观测了 52 个方向。A，B，C，D，E是固定点。作方向平差时，網內共發生 25 个条件；其中 15 个圖形条件，5 个边条件，一个固定边条件，一个基綫条件，一个坐标方位角条件及兩个坐标条件。显然，为了七个新点解算 25 个条件应当認为是不必要地繁重的工作。

补充網用条件观测法平差，是以条件方程式的联系数作未知数，一般說来是太麻煩。

現在設想，采用新点的坐标改正数作为平差中所求的未知数。

因为这些点的最后坐标值是最后方向值的函数，显然，对应于坐标的或然改正数，有完全确定的观测方向的或然改正数，反之亦然。換句話說，我們可以从新点的近似坐标出發，利用所有观测，首先求得近似坐标的改正数，然后根据它們推算各观测方向的改正数。因此，問題在于把新点的坐标改正数用观测方向及其改正数的函数来表示。这样做，我們就得到誤差方程式（不是条件方程式），其中观测值的函数——坐标改正数——用观测值及其改正数来表示。要从誤差方程式确定坐标改正数的最或然值使观测方向的改正数平方和为極小，我們应用間接观测平差法。求出間接观测量（这里是坐标改正数）以后，从誤差方程式用巳知的方法計算观测方向值（即直接观测量）的改正数。

当待定的坐标改正数的数目比較網条件方程式的数目少得多，尤其是網內有多边形条件时，这种方法就显得很有利。在圖 293 的三角網中，坐标改正数的数目等于14。因此，应用間接观测平差法，或者說，求坐标改正数，就不需解算 25 个法方程式，而是解算 14 个法方程式。当然，工作量的減少不是 14:25。誤差方程式的数目等于观测方向的数目（本例为 52），其組成工作較之組成 25 个条件方程式稍繁，但在平面上平差时，誤差方程式的組成实际只需就半数方向进行計算；求坐标改正数时組成法方程式的工作要大些。但在解算法方程式这个最繁重的阶段中，解 14 个法方程式較之解 25

个大約使工作量減少$\frac{3}{4}$。

§ 103. 誤差方程式的組成

我們假設三角網內，各固定点的坐标，固定边的坐标方位角和边長都是高斯——克呂格投影平面上的值；同样，假設各观测值（观测方向）都化算到平面上。把方向值表作成像§75中39表那样的形式是适宜的，表中最后一行列出所謂定向方向值 R。

为了用間接观測法进行平差，首先須求出新点的近似坐标；其誤差可达1公尺。但是，我們認为，应当使这些計算和所利用的資料，一部分在以后也能加以利用。

为求近似坐标，須先計算插入網各三角形的边長如下。見圖293，三角形 $\underline{DE}c$，$\underline{Db}c$，$\underline{ba}D$，$\underline{bg}c$，$\underline{bg}e$，$\underline{ab}d$，$\underline{ad}A$，$\underline{Ad}f$ 是計算所有新点坐标所必需的，每一三角形中，仅在画有短綫的兩个頂点，由方向值表中的定向方向值 R 算出其角值。这兩个角位于已定边的兩端，也就是前一三角形的兩个頂点。解算三角形的格式第一列中所写的第三个角，是由 $180°$ 减去前兩个角之和得出的。为了校核，第三个角要与由方向值表直接算出的值相比較，其差就等于三角形閉合差。为說明起見，我們把解算三角形 cbg 的格式列出：

		校　核	$\lg\dfrac{bc}{\sin g}$	$co.\lg\sin g$
g	$180°-(b+c)$	$R_{gb}-R_{gc}$	$\lg\sin g$	$\lg bc$
c	$R_{cg}-R_{cb}$	由方向值表	$\lg\sin c$	$\lg bg$
b	$R_{bc}-R_{b}$	計　算	$\lg\sin b$	$\lg gc$
$b+c$				

照这样計算边長，在二等網是用七位对数，三等網用六位对数。此后，依次計算各边的坐标差：Ec 和 Dc 边，所用 R_{Ec} 和 R_{DC} 即推算三角形 DcE 的 E,D 角时所用的同一数值；其次 cb 和 Db 边，

所用R_{cb}和R_{Db}与求Dbc三角形b，D角所用者相同，以下同此。c点的坐标共算兩次，一次由E，一次由D；其結果应相符达0.01公尺。同样，b点的坐标也算兩次，一次由c，一次由D，結果之差也应在0.01公尺以內。这样，經三角形DEc，bcD，cbg，gbe，aDb，abd，得出c，b，a，g，e，d各点的近似坐标，都算到0.01公尺。然后，取三角形daA和Afd，把A点的坐标作为未知的，算dA和aA边的坐标差，再由a和d点的坐标求出A点的坐标；最后，計算Af和df边的坐标差，由d的坐标和方才得出的A点坐标，算出f的坐标。在任何时候，須严格遵守这一規則：計算某边的坐标差时，所用R值須与解算三角形时推求相应角所用者相同。

注意在近似坐标确定以后，接着就要精密推算三角形各边的坐标方位角T'，边的兩端假設卽由近似坐标所确定。換句話說，我們在确定三角点的近似坐标时，可有相当的自由。但是，为了求誤差方程式的常数項，下面將会看到，必須有近似坐标所确定各点之間的精确坐标方位角。一般自然是用公式：

$$\operatorname{tg} T'_{1.2}=\frac{y_2^o-y_1^o}{x_2^o-x_1^o},$$

式中y_2^o，x_2^o，y_1^o，x_1^o是点2和1的近似坐标，計算須用七位对数。但是，如果我們严格地按照上面所建議的方法来解算三角形和求坐标差，那末显然，沿Ec，Dc，cb，Db，Da，ba，ad，bd，df，bg，cg，bc，gc各边，对于正方向就会有：

$$T'=R,$$

对于反方向，則

$$T'=R\pm180°,$$

R卽为計算各边坐标差时所用的同一数值。換句話說，只需把上述$\operatorname{tg} T'$公式用于不多的边，卽Af，Ad，fB，dB，dc，dg，gC，eC，Be。自然，求这些边的T'时，对于A，B，C要用它們的固定坐标。設：

$$y_2^o-y_1^o=\Delta y,$$

$$x_2^o - x_1^o = \Delta x,$$

在計算 $T'_{1.2}$ 时应有校核，即以兩法計算 $T'_{1.2}$：

$$\operatorname{tg} T'_{1.2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \operatorname{tg}(T'_{1.2} + 45°) = \frac{\Delta y + \Delta x}{\Delta x - \Delta y}.$$

如果組成方向值表，并沒有作出定向方向值 R，那末，对于每一个为坐标計算所不可少的三角形，須自表中写出其三个角，用平均分配閉合差的方法来平差角度，然后按一般的方法計算三角形的边長。按照三角形中初步平差的角度，推算各边的坐标方位角，然后計算坐标差。在每一三角形內，坐标由兩个边傳算，兩个結果間允許差 0.01 公尺。照这样求近似坐标时，計算各边坐标差所用坐标方位角值，当然等于那个边的 T' 值，只需此边不連系于兩个起始固定点以外的其他固定点。因而，像前面一样，只需計算一部分边的 T'，这些边或与多余固定点相連系或者形成多余的三角形。

这兩种求近似坐标的方法（用或者不用 R），在計算工作上实际是一样的，而兩者的特点都是精密地計算近似坐标之差，这就免除了以后沿許多边計算 T'。

与此相反，也可更粗略而迅速地推算近似坐标，这时三角形各角不相配合，并且推算坐标差所用的边長和坐标方位角都可省略計算。用这种方法以后，須按各点的近似坐标精密計算所有各边的 T'。

用 x, y 表示待定点的最或然坐标；用 x^o 和 y^o 表示近似坐标；δx 和 δy 表示近似坐标的改正数，于是：

$$x = x^o + \delta x,$$

$$y = y^o + \delta y.$$

而坐标方位角的平差值 $T_{1.2}$ 的公式为：

$$\operatorname{tg} T_{1.2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2^o - y_1^o + \delta y_2 - \delta y_1}{x_2^o - x_1^o + \delta x_2 - \delta x_1}.$$

設 δx 和 δy 的值充分地小，則有：

$$\operatorname{tg} T_{1.2} = \frac{y_2^o - y_1^o}{x_2^o - x_1^o} + \frac{\delta y_2}{x_2^o - x_1^o} - \frac{\delta y_1}{x_2^o - x_1^o} -$$

$$-\frac{(y_2^0-y_1^0)}{(x_2^0-x_1^0)^2}\delta x_2+\frac{(y_2^0-y_1^0)}{(x_2^0-x_1^0)^2}\delta x_1;$$

$$\operatorname{tg} T_{1.2}-\operatorname{tg} T'_{1.2}=\frac{\delta y_2}{s_{1.2}\cos T'_{1.2}}-\frac{\delta y_1}{s_{1.2}\cos T'_{1.2}}-$$

$$-\frac{\operatorname{tg} T'_{1.2}}{s_{1.2}\cos T_{1.2}}\delta x_2+\frac{\operatorname{tg} T'_{1.2}}{s_{1.2}\cos T'_{1.2}}\delta x_1;$$

$$(T_{1.2}-T'_{1.2})''=\frac{\cos T_{1.2}\cdot\rho''}{s_{1.2}}\delta y_2-\frac{\cos T_{1.2}\cdot\rho''}{s_{1.2}}\delta y_1-$$

$$-\frac{\sin T'_{1.2}\cos T_{1.2}}{s_{1.2}\cos T'_{1.2}}\rho''\cdot\delta x_2+\frac{\sin T'_{1.2}\cos T_{1.2}}{s_{1.2}\cos T'_{1.2}}\rho''\cdot\delta x_1.$$

$s_{1.2}$ 代表 1,2 点間之距离。显然，上式右方不必区别 $\cos T_{1.2}$ 与 $\cos T'_{1.2}$，因此：

$$(T_{1.2}-T'_{1.2})''=\frac{\cos T'_{1.2}\cdot\rho''}{s_{1.2}}\delta y_2-\frac{\cos T'_{1.2}\cdot\rho''}{s_{1.2}}\delta y_1-$$

$$-\frac{\sin T'_{1.2}\cdot\rho''}{s_{1.2}}\delta x_2+\frac{\sin T'_{1.2}\cdot\rho''}{s_{1.2}}\delta x_1.$$

坐标方位角的最或然平差值 $T_{1.2}$ 可写成：

$$T_{1.2}=N'_{1.2}+\Sigma_1+v_{1.2}+z_1.$$

这里 $N'_{1.2}$ 是已加曲率改正 $r^h_{1.2}$ 的观测方向值；Σ_1 为定向角，在十一章 §75 中已講到，把它加于点上各 N'，就得出定向方向值 R；$v_{1.2}$ 为观测方向值 $N'_{1.2}$ 的誤差；z_1 为 Σ_1 的誤差，即点 1 上各方向的共同定向誤差。

由于下面的理由，Σ 和 R 的計算通常如表 83 所示。

三角網內所有各点按表 83 組成一个总表；表內每点各有自己的一欄。

第一行內为由本測站所观测各点的名称；第二行为N'，即$N+r^h$；第三行为各相应边的 T'，其值或者是如上面所說在計算近似坐标的过程中已有的，或者是根据近似坐标按公式：

$$\operatorname{tg} T'_{1.2}=\frac{y_2^o-y_1^o}{x_2^o-x_1^o}$$

求得的。对于固定方向，此行直接写出已知的 T。第四行为同列第二、三行之差，即由站上各观测点所算得的 $\sum$，所有 $\sum$ 的平均数作为定向角 $\sum_0$，將它加于各个 N'，以求得第五行的近似定向方向値 R。第六行 l 为差数 $T'-R$ 或 $T-R$，其和应等于零。第七行为边長的四位对数；以下各行的意义下面再談。

現在很清楚，由 1 到 2 方向的誤差方程式可写成：

$$v_{1.2}=-z_1+\frac{\cos\cdot T'_{1.2}}{s_{1.2}}\rho''\cdot\delta y_2-\frac{\cos\ T'_{1.2}}{s_{1.2}}\rho''\cdot\delta y_1-$$

$$-\frac{\sin T'_{1.2}}{s_{1.2}}\rho''\cdot\delta x_2+\frac{\sin T'_{1.2}}{s_{1.2}}\rho''\cdot\delta x_1+l_{1.2}.$$

z_1 为 $\sum_0$ 的誤差，即点 1 上由定向誤差所引起的各 R 値的公共誤差；$l_{1.2}$ 即 83 表第 6 行的同一数値。

s 用公里表示。改正数 δy 和 δx 以公寸表示，并引用符号：

$$\left.\begin{aligned}&10\delta x=\xi;\ 10\delta y=\eta;\\&(a)=-20.6265\sin T';\ (b)=+20.6265\cos T',\\\text{写出：}\quad&a=\frac{(a)}{s_{\text{KM}}};\quad b=\frac{(b)}{s_{\text{KM}}}.\end{aligned}\right\}\tag{465}$$

这时誤差方程式写成：

$$-z_1+a_{1.2}\xi_2+b_{1.2}\eta_2-a_{1.2}\xi_1-b_{1.2}\eta_1+l_{1.2}=v_{1.2}.\tag{466}$$

求 (a) 和 (b) 可用 A.C 費罗連柯表，不待説，表以 T' 为引数。根据 (a)，(b) 用計算尺算出表 83 第 8，9 行的 a 和 b。

显然，对于反方向，(466) 式中的系数 a 和 b 仅仅改变符号。

就網內每一观测方向均須組成 (466) 式，包括在固定点上观测固定边的方向在內。在組成这些方程式时，須区别下列各种情形：

1) 观測方向由固定点 1 到固定点 2，这时：

$$-z_1+l_{1.2}=v_{1.2},\tag{467}$$

表83

易 万 卡 点

观测点	N'	T'或T	定向角 Σ	近似定向方向值 R	l	lg s	a	b	平差方向值
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
謝密楼	0° 0′ 0″.15	92°21′42″.75	92°21′42″.60	92°21′41.64	+1″.11				
沃林里	46 8 52.27	138 30 32.80	40.53	138 30 33.76	−0.96				
舍市渡	64 9 39.61	156 31 21.34	41.73	156 31 21.10	+0.24				
加布里	188 52 45.40	226 14 26.49	41.09	226 14 26.89	−0.40				
		Σ_0	=90°21 41.49		+0.01				

因为 $$\delta x_2=\delta x_1=0,$$
$$\delta y_2=\delta y_1=0;$$

2) 观测方向由固定点1到待定点2：

$$-z_1+a_{1.2}\,\xi_2+b_{1.2}\,\eta_2+l_{1.2}=v_{1.2};\tag{468}$$

3) 观测方向由待定点1到固定点2：

$$-z_1-a_{1.2}\,\xi_1-b_{1.2}\,\eta_1+l_{1.2}=v_{1.2};\tag{469}$$

4) 观测方向由待定点1到待定点2：

$$-z_1+a_{1.2}\,\xi_2+b_{1.2}\,\eta_2-a_{1.2}\,\xi_1-b_{1.2}\,\eta_1+l_{1.2}=v_{1.2}.\tag{470}$$

組成了誤差方程式，便可按照一般的規則作法方程式。但是各个点上观测方向改正数 v 的和应該等于零；因此，同点各观测方向所作（466）式之和应使为零。这就引起了一种可能，从总解算中很容易地把未知数 z 消去，因此把同时解算的法方程式的数目減少了三角網的点数那末多。消去了 z 的法方程式称为約化法方程式。

§ 104. 約化法方程式的組成和解算

在293圖上，三角網的各点除以字母代表外，还有号碼。

c 点的誤差方程式如下：

$$\left.\begin{aligned}
&-z_{11} && -a_{11.12}\xi_{11}-b_{11.12}\eta_{11} && +l_{11.12}=v_{11.12}\\
&-z_{11} && -a_{11.5}\,\xi_{11}-b_{11.5}\,\eta_{11} && +l_{11.5}=v_{11.5}\\
&-z_{11}+a_{11.4}\,\xi_4+b_{11.4}\,\eta_4 && -a_{11.4}\,\xi_{11}-b_{11.4}\,\eta_{11} && +l_{11.4}=v_{11.4}\\
&-z_{11}+a_{11.10}\xi_{10}+b_{11.10}\eta_{10} && -a_{11.10}\xi_{11}-b_{11.10}\eta_{11} && +l_{11.10}=v_{11.10}
\end{aligned}\right\}\tag{471}$$

（471）式提供总法方程式的一部分；为了把这一部分写得簡單些，把(471)式中未知数 ξ_4 的系数用 A 代表，η_4 的系数用 B 代表；ξ_{10}，η_{10}，ξ_{11}，η_{11} 的系数分别以 C，D，E，F 代表。

于是有：

1) $4z_{11}-[A]\xi_4-[B]\eta_4-[C]\xi_{10}-[D]\eta_{10}-[E]\xi_{11}-[F]\eta_{11}=0$

2) $-[A]z_{11}+[AA]\xi_4+[AB]\eta_4+[AC]\xi_{10}+[AD]\eta_{10}+$
$+[AE]\xi_{11}+[AF]\eta_{11}+[Al]$

3) $-[B]z_{11}+[AB]\xi_4+[BB]\eta_4+[BC]\xi_{10}+[BD]\eta_{10}+$

$$+[BE]\xi_{11}+[BF]\eta_{11}+[Bl]$$

4) $$-[C]z_{11}+[AC]\xi_4+[BC]\eta_4+[CC]\xi_{10}+[CD]\eta_{10}+ \\ +[CE]\xi_{11}+[CF]\eta_{11}+[Cl]$$

5) $$-[D]z_{11}+[AD]\xi_4+[BD]\eta_4+[CD]\xi_{10}+[DD]\eta_{10}+ \\ +[DE]\xi_{11}+[DF]\eta_{11}+[Dl]$$

6) $$-[E]z_{11}+[AE]\xi_4+[BE]\eta_4+[CE]\xi_{10}+[DE]\eta_{10}+ \\ +[EE]\xi_{11}+[EF]\eta_{11}+[El]$$

7) $$-[F]z_{11}+[AF]\xi_4+[BF]\eta_4+[CF]\xi_{10}+[DF]\eta_{10}+ \\ +[EF]\xi_{11}+[FF]\eta_{11}+[Fl]$$

七个式子中仅第一式是总法方程式系中的一个方程式，因为 z_{11} 只在 c 点的誤差方程式中出現。其余的式子应分别与其他点上相应的式子相加，自然，第二式应与 ξ_4 有自乘系数的式子相加；第七式则与 η_{11} 有自乘系数的式子相加，等等。利用第一式可从 c 点其余六个式子中消去未知数 z_{11}；显然，这样就把总法方程式的数目减少了三角網的点数那末多。消去了未知数 z_{11}，2—7式化为：

$$\left.\begin{aligned}
2)'\ &\left\{[AA]-\frac{[A]^2}{4}\right\}\xi_4+\left\{[AB]-\frac{[A][B]}{4}\right\}\eta_4+ \\
&+\left\{[AC]-\frac{[A][C]}{4}\right\}\xi_{10}+\left\{[AD]-\frac{[A][D]}{4}\right\}\eta_{10}+ \\
&+\left\{[AE]-\frac{[A][E]}{4}\right\}\xi_{11}+\left\{[AF]-\frac{[A][F]}{4}\right\}\eta_{11}+ \\
&\qquad +[Al] \\
3)'\ &\left\{[AB]-\frac{[A][B]}{4}\right\}\xi_4+\left\{[BB]-\frac{[B]^2}{4}\right\}\eta_4+ \\
&+\left\{[BC]-\frac{[B][C]}{4}\right\}\xi_{10}+\left\{[BD]-\frac{[B][D]}{4}\right\}\eta_{10}+ \\
&+\left\{[BE]-\frac{[B][E]}{4}\right\}\xi_{11}+\left\{[BF]-\frac{[B][F]}{4}\right\}\eta_{11}+
\end{aligned}\right\} \quad (472)$$

$$+[Bl]$$

$$
\begin{aligned}
7)' & \left\{[AF]-\frac{[A][F]}{4}\right\}\xi_4+\left\{[BF]-\frac{[B][F]}{4}\right\}\eta_4+ \\
& +\left\{[CF]-\frac{[C][F]}{4}\right\}\xi_{10}+\left\{[DF]-\frac{[D][F]}{4}\right\}\eta_{10}+ \\
& +\left\{[EF]-\frac{[E][F]}{4}\right\}\xi_{11}+\left\{[FF]-\frac{[F][F]}{4}\right\}\eta_{11}+ \\
& +[Fl].
\end{aligned}
$$

（472）式也是相应的約化法方程式的一部分，这里約化的意义就是消去了 z。

在（471）方程組中加入下列方程式：

$$[A]\xi_4+[B]\eta_4+[C]\xi_{10}+[D]\eta_{10}+[E]\xi_{11}+ +[F]\eta_{11}-4z_{11}=0, \quad (473)$$

此式的成立是因为 $v_{11,12}+v_{11,5}+v_{11,4}+v_{11,10}=0$。如果（473）式予以权 $-\frac{1}{4}$，（471）各式予以單位权，那末（471）各式加上（473），按照一般的規則作法方程式，就直接得出（472）式。

一般說来，（473）式中 z 的系数等于該点观測方向数 n。因此，为了作出約化法方程式，在每一个点上，組成誤差方程式之和，并令它等于零。每一誤差方程式的权为 1，而此和方程式 $\sum v$ 予以权 $-\frac{1}{n}$，n 为点上观測方向数，由此 $n+1$ 个方程式按照一般的規則作法方程式，其結果即为总法方程式中本点所提供的部分。实际計算时，在作法方程式之前要塡算 84 表，其中每点各有一欄，用于塡写該点的誤差方程式。