数学

王诚祥　马家祚　主编

高考专题复习系列丛书

名师专题

直线与圆锥曲线

解题方法与技巧

如何

求曲线方程

如何

研究直线和圆锥曲线的位置关系

如何

解解析几何综合题

河海大学出版社

MINGSHI ZHUANTI

MINGSHI ZHUANTI

名师专题

直线与圆锥曲线

解题方法与技巧

责任编辑 代江滨　　策划编辑 代江滨　　责任校对 刘凌波　　封面设计 黄　炜

函数与导数　解题方法与技巧

不等式　解题方法与技巧

数列　解题方法与技巧

排列组合和概率　解题方法与技巧

直线、平面、简单几何体　解题方法与技巧

直线与圆锥曲线　解题方法与技巧

ISBN 7-5630-2282-1

9 787563 022823 >

ISBN 7-5630-2282-1

O · 130 定价：9.00 元

直线与圆锥曲线

解题方法与技巧

主　编

王诚祥　马家祚

副主编

魏丽光

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

直线与圆锥曲线/王诚祥，马家祚主编. —南京：河海大学出版社，2006.8

(名师专题)

ISBN 7-5630-2282-1

Ⅰ.直... Ⅱ.①王... ②马... Ⅲ.几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 094034 号

书　　名 / 直线与圆锥曲线
书　　号 / ISBN 7-5630-2282-1/O·130
责任编辑 / 代江滨
策划编辑 / 代江滨
责任校对 / 刘凌波
封面设计 / 黄　炜
出　　版 / 河海大学出版社
地　　址 / 南京市西康路 1 号(邮编：210098)
电　　话 / (025)83737852(总编室)　(025)83722833(发行部)
经　　销 / 江苏省新华书店
印　　刷 / 南京捷迅印务有限公司
开　　本 / 850 毫米×1168 毫米　1/32　5.625 印张　110 千字
版　　次 / 2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 9.00 元

前　　言

解析几何是通过建立坐标系，用代数的方法研究几何问题，它是中学数学的重要组成部分，也是高考的重点、热点和难点.

解析几何内容的学习，特别要注意以下五点：

(1) 坐标法是解析几何的基本思想和基本方法，通过建立坐标系，点对应着坐标，曲线对应着方程，通过对方程的研究，实现几何问题的代数化，这就是坐标法的本质；

(2) 曲线和方程是解析几何中的两个基本概念，求曲线的方程和根据方程研究曲线的性质是解析几何的基本内容；

(3) 解析几何综合性强，内容丰富，数形结合思想、函数和方程的思想是解析几何中最重要的数学思想；

(4) 解析几何的技巧来自几何和代数两个方面，图形(曲线)的几何性质(如多边形、圆的几何性质，圆锥曲线的定义及其几何性质)，函数和方程的知识(如一元二次方程根的讨论，韦达定理)等贯穿解题过程的始终，对有关的知识、技能和技巧，要牢固掌握，灵活应用；

(5) 解析几何对运算能力要求较高，解析几何中的运算，要有"目标意识"和"整体意识"，"设而不求"、"整体置换"等是常用的方法和技巧.

纵观近年来的各地高考试卷，解析几何试题有以下特点：

(1) 题型稳定，各地高考解析几何试题一般稳定在1～2个选择题，1个填空题和1个解答题，选择题、填空题主要考查圆锥曲线的有关概念和性质，解答题则主要考查直线和圆锥曲线的位置关系；

(2) 知识覆盖面广，常与函数、不等式、数列等知识相结合，突出对解析几何中基本思想方法如方程思想、函数思想、参数思想、转化思想的考查；

(3) 能力立意，常考常新，与平面向量知识相结合，重点考查直线和圆锥曲线的位置关系；

(4) 难度较高，解答题常处在压轴题或倒数第二题的位置上.

根据以上分析，本书将这部分内容分为四讲进行复习. 为了切实提高本书的实效，编者在选材和编排上都作了一些努力：

(1) 内容选择，紧扣高考"脉搏".

从题型的确定，到例题、习题的编选，完全顺从高考的最新动态，其中的例题、习题精选自近年的高考题，各市各校的模拟试题以及根据编者对高考的理解，适应复习需要所编拟的原创题.

(2) 体例安排，突出思路方法.

在例题的解答中，前有"分析"，后有"说明". 在分析中，帮助读者理清解题思路，教给读者分析问题的方法；在说明中，总结解题方法，揭示解题规律，指出注意事项，以便读者举一反三，触类旁通，切实掌握各种题型的解法.

(3) 表现手法，符合思维规律.

逻辑的严谨性和思维的抽象性，给同学们的数学学习造成了很大的困难，不少同学对数学的基础知识，基本的技能技巧和思想方法等知识体系不够清晰，也不能灵活运用，为此，本书每一讲都列出了本讲的知识和方法精要，同时，采用了让题目"说话"的策略. 把解题的理论和解题的实践相结合，让基础知识、技能技巧和思想方法融于题目之中，再通过精当的点评加以归纳总结，使那些抽象的数学思想方法变为看得见、学得会、用得上的东西.

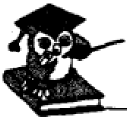
为了提高本书的使用效果，我们希望读者能与编者配合，变

被动阅读为主动学习. 在阅读例题之前,先自己试着思考,然后再看分析与解答. 在研读解读以后再想想有哪些收获,仔细推敲题后的说明. 我们恳切地希望本书能成为你数学学习的良师益友.

书中的不当之处,敬请读者批评指正.

编 者

2006 年 6 月



目　录

第一讲 直线和圆

§1 直线和简单的线性规划

一、知识精要

(1) 理解直线的倾斜角、斜率的概念，掌握过两点的直线的斜率公式，掌握直线方程的点斜式、两点式、一般式，掌握两条直线平行与垂直的条件，并能根据直线方程判定两条直线的位置关系，会求两相交直线的夹角(到角)和交点，掌握点到直线的距离公式及两平行线间的距离公式.

(2) 理解二元一次不等式(组)表示的平面区域问题，理解线性规划的各类概念，理解简单线性规划问题的基本思想方法，提高解决实际问题的能力.

二、重要方法技巧

(1) 直线方程是解析几何的基础，题目类型主要是求直线方程以及与之有关的斜率、倾斜角、截距、点等特征量，方法主要是直接法、待定系数法、轨迹法. 用点斜式求直线方程，要注意考虑斜率不存在的情形，要注意"数形结合"，灵活应用平面几何性质，灵活应用直线系方程优化解题思路.

(2) 两条不重合的直线的位置关系有平行和相交两种情形，垂直是相交的特殊情形，根据直线方程判定两直线平行或垂直的位置关系时，要注意斜率不存在的情形；求两条相交直线所成的角，要分清是"到角"还是"夹角".

(3) 对称问题主要是关于一点 P 的中心对称和关于直线 l 的轴对称：两点 M 和 M' 关于点 P 中心对称$\Leftrightarrow$线段 MM' 的中点为

P；两点 MM' 关于直线 l 轴对称$\Leftrightarrow$直线 l 是线段 MM' 的垂直平分线. 求对称曲线的常用方法是：待定系数法、轨迹法.

(4) 简单的线性规划问题，其约束条件是平面上的多边形闭区域，或者是向某一方向无限延展的半闭区域，而目标函数一般在边界的顶点处或一条边上取得最值. 对实际问题中的最优整数解问题，一般可用平移求解和微调目标函数求解，前者主要依据精细的几何作图，后者主要依据代数推理.

三、例题

例 1 设 l_1 的倾斜角为 α，l_1 绕它上面一点 P 按逆时针方向旋转 α 得到直线 l_2，l_2 的纵截距为 -2，l_2 绕点 P 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 得到 l_3：$x+2y-1=0$，求 l_1 的方程.

解：根据题意 $l_1 \perp l_3$，$\therefore k_1=\tan\alpha=-\frac{1}{k_3}=2$，

$\therefore k_2=\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$，$\therefore l_2$：$y=-\frac{4}{3}x-2$，

由 $\begin{cases} y=-\frac{4}{3}x-2 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$ 解得 $P(-3,2)$，$\therefore l_1$ 的方程为：

$y-2=2(x+3)$，即 $2x-y+8=0$.

说明 破题的关键主要是依据直线的倾斜角和斜率的概念，以及两直线垂直的条件，如同数学的其他内容一样，解析几何的学习，要注意对概念的理解和掌握.

例 2 菱形的一条边所在直线方程是 $x+2y+1=0$，对角线相交于点 $M(2,1)$，有一个锐角是 $45°$，求另外三边所在直线方程.

解：设与 $x+2y+1=0$ 平行的一边所在直线方程是 $x+2y+m=0$，$\because$ 菱形对角线交点到各边的距离相等，$\therefore \frac{|2+2\times1+1|}{\sqrt{5}}=\frac{|2+2\times1+m|}{\sqrt{5}}$ 解得 $m=-9$，

设邻边所在直线斜率为 k，则

$\left|\dfrac{k-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}k}\right|=1$，解得 $k=\dfrac{1}{3}$ 或 $k=-3$. 若 $k=\dfrac{1}{3}$，设直线方程为 $x-3y+n=0$，由 $\dfrac{|2-3\times1+n|}{\sqrt{10}}=\sqrt{5}$ 得 $n=\pm5\sqrt{2}+1$；若 $k=-3$，设直线方程为 $3x+y+n=0$，由 $\dfrac{|3\times2+1+n|}{\sqrt{10}}=\sqrt{5}$，解得 $n=-7\pm5\sqrt{2}$. ∴ 另外三边所在直线方程为：$x-3y\pm5\sqrt{2}+1=0$，$x+2y-9=0$ 或 $3x+y-7\pm5\sqrt{2}=0$，$x+2y-9=0$.

说明 (1) 菱形的一个锐角为 45°，注意到有两种情形，所以用夹角公式；(2) 解题中应用了菱形的中心（对角线的交点）到各边的距离相等这一几何性质.

例3 已知直线 l：$(a-1)x+y+a+1=0$，定点 $A(3,4)$. 问 a 为何值时，A 点到直线 l 的距离最大？

分析 解几何中的最值问题，一般有两种方法，一是代数方法（如函数、方程、不等式方法），二是几何方法（数形结合），下面给出了本题的两种解法.

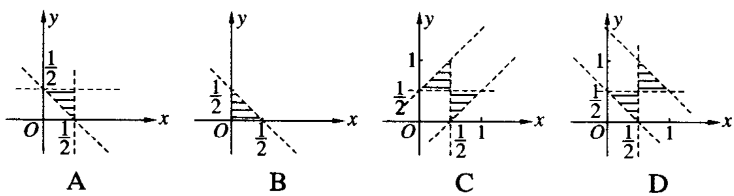
解法1：设点 $A(3,4)$ 到直线 l：$(a-1)x+y+(a+1)=0$ 的距离为 d，则 $d^2=\dfrac{[3(a-1)+4+a+1]^2}{(a-1)^2+1}=\dfrac{4(4a^2+4a+1)}{a^2-2a+2}$ 令 $t=\dfrac{d^2}{4}=\dfrac{4a^2+4a+1}{a^2-2a+2}$，则 $(t-4)a^2-2(t+2)a+(2t-1)=0$，$\Delta=4(t+2)^2-4(t-4)(2t-1)=4(-t^2+13t)\geqslant0$ 得 $0\leqslant t\leqslant13$ 当 $t=13$ 时，$9a^2-30a+25=0$ 得 $a=\dfrac{5}{3}$，此时 $d_{\max}=2\sqrt{13}$.

解法2：直线 l 即为 $a(x+1)-(x-y-1)=0$，由 $\begin{cases}x+1=0\\x-y-1=0\end{cases}$，得直线 l 过定点 $P(-1,-2)$，当 $AP\perp l$ 时点 A 到

直线 l 的距离最大，由 $k_{AP}\cdot k_l=\frac{6}{4}\cdot(1-a)=-1$，得 $a=\frac{5}{3}$.

说明 (1) 解法1用函数方法求出 d 的最值及 a 的值，解法2数形结合用几何方法求出 a 的值，显然解法2比解法1要简捷明了，因此学习解析几何一定要注意数形结合，从几何图形中寻求简捷的解题思路；(2) 直线 l: $a(x+1)-(x-y-1)=0$ 实际上是经过直线 $x+1=0$ 和 $x-y-1=0$ 交点的直线系. 一般地，经过曲线 c_1: $f_1(x,y)=0$ 和曲线 c_2: $f_2(x,y)=0$ 的交点的曲线系可写成 $f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$(不包括曲线 c_2: $f_2(x,y)=0$).

例4 (2005年浙江高考题)设集合 $A=\{(x,y)\mid x,y,1-x-y$ 是△ABC 的三边长$\}$，则 A 所表示的平面区域(不含边界的阴影部分)是



解法1：直接法，关键是将集合 A 中对元素的限制条件用不等式组表示，进而确定不等式组表示的平面区域.

∵ $x,y,1-x-y$ 是△ABC 的三边，∴ $x>0,y>0,1-x-y>0$ 且 $|x-y|<1-x-y<x+y$，化简得

$$\begin{cases}0<x<\frac{1}{2}\\0<y<\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}<x+y<1\end{cases}$$ ，故选 A.

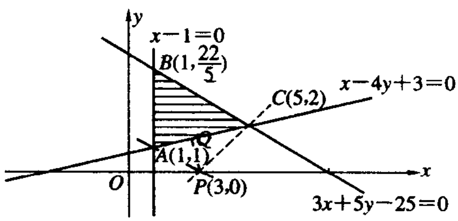
解法2：排除法，考虑极端情况，在B中取 $x=0,y=0$；在C中 $x=\frac{1}{2},y=1$；在D中取 $x=\frac{1}{2},y=1$，显然以上3种情形都不满足

集合 A 的条件,故选 A.

说明 直线 l: $Ax+By+C=0(A>0)$将坐标平面分为两个半平面,直线 l 外的点的坐标代入方程左边,其符号规律是:同侧同号,异侧异号,判定符号的方法:(1) A 方法:设 $A>0$,则若 $P(x,y)$在直线 l 的左侧,则 $Ax+By+C<0$;反之,$P(x,y)$在直线 l 的右侧,则 $Ax+By+C>0$.(2) 特殊点法:一般用原点$O(0,0)$或 $P(1,0)$,$Q(0,1)$等确定所在区域的符号.

例 5 已知 x,y 满足$\begin{cases}x-4y+3\leqslant 0\\3x+5y-25\leqslant 0\\x\geqslant 1\end{cases}$:(1) 求 $z=\dfrac{y}{x-3}$的取值范围;(2) 求 $z=(x-3)^2+y^2$ 的最小值;(3) 若使 $z=ax+4y$ 取得最小值的解不只一个,求 a 的值.

分析 先根据约束条件画出可行域(关于 x,y 的二元函数的定义域),再根据目标函数的几何意义求解.



解:不等式组所表示的平面区域如上图所示。

(1) 令 $P(3,0)$,$Q(x,y)$,则 $z=\dfrac{y}{x-3}=k_{PQ}$. $\because$ $k_{PC}=1$,$k_{PA}=-\dfrac{1}{2}$,$\therefore$ $z\in(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.

(2) $z=(x-3)^2+y^2$,过 P 作 $PQ\perp$直线 AC,Q 为垂足.显然 Q 在线段 AC 上,$\therefore$ $z_{\min}=|PQ|^2=\left(\dfrac{3+3}{\sqrt{17}}\right)^2=\dfrac{36}{17}$.

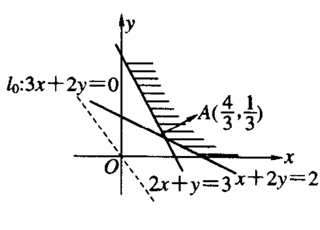
(3) $z=ax+4y$ 即 $y=-\dfrac{a}{4}x+\dfrac{z}{4}$,其中$\dfrac{z}{4}$为其在 y 轴上的截

距，根据题意，直线 $y=-\frac{a}{4}x+\frac{z}{4}$ 在取得 $\frac{z}{4}$ 的最小值时应与直线 $x-4y+3=0$ 重合，故 $a=-1$.

说明 (1) 线性规划的思想方法乃是数形结合，因此在明确了目标函数的可行域(即定义域)后，注意从目标函数的几何意义出发求解其最值；(2) 线性目标函数的最值一般于可行域的某一个顶点处取得，但若目标函数的最值点不只一个，则一般目标函数和可行域的某一边界所在直线平行；(3) 线性规划的图解法中，要特别注意约束条件和目标函数的斜率，以确定它们的相对倾斜程度.

例 6 某人承揽一项业务：需做文字标牌 2 个，绘画标牌 3 个，现有两种规格的材料，甲种规格每张 3 m^2，可做文字标牌 1 个，绘画标牌 2 个；乙种规格每张 2 m^2，可做文字标牌 2 个，绘画标牌 1 个，问两种规格的材料各用多少张才能使总的用料面积最小?

解：设用甲种规格材料 x 张，乙种规格材料 y 张，则可做文字标牌 $x+2y$ 个，绘画标牌 $2x+y$ 个，由题意可得 $\begin{cases}x+2y\geqslant 2\\2x+y\geqslant 3\\x\in N, y\in N\end{cases}$，目标函数为 $t=3x+2y$. 作出可行域如图阴影所示.



作一组与直线 l_0：$3x+2y=0$ 平行的直线 l：$3x+2y=t$，当直线 l 通过 $2x+y=3$ 与直线 $x+2y=2$ 的交点 $A\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ 时，t 取得最小值 $\frac{14}{3}$，

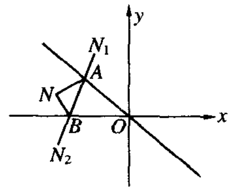
$\because$ $x\in N, y\in N$，$\therefore$ 点 $A\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ 不是最优解. 如何求最优整解? 方法 1：微移直线 l，经过可行域内整点 $B(1,1)$，使 $t=3x+2y$ 取得最小值 5，$\therefore$ 最优解为 $B(1,1)$.

方法 2：微调目标函数，取 $z=3x+2y=5$，得 $B(1,1)$ 在可行域内，

$\therefore$ 最优解为点 $B(1,1)$，即两种规格的材料各一张.

说明 (1) 线性规划问题即是求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值问题，它主要应用在两类问题上，一是在人力、物力、资金等一定的条件下，如何使用它们来完成最多的任务，二是给定一项任务，如何合理安排和规划，能以最少的人力、物力、资金等来完成该项任务，常见的题型有：物资调运问题、产品安排问题和下料问题；(2) 求线性规划的最优整解，常有两种基本方法，一种是微移目标函数求解，再有微调目标函数值求解，前者主要依据几何作图，后者则依据代数推理.

例 7 已知点 $N(-3,1)$，点 A、B 分别在直线 $x+y=0$ 和 $y=0$ 上，则 $\triangle ABN$ 周长的最小值为________.



解：点 $N(-3,1)$ 关于直线 $x+y=0$ 的对称点 $N_1(-1,3)$，关于直线 $y=0$ 的对称点 $N_2(-3,-1)$，$|NA|+|NB|+|AB|=|N_1A|+|AB|+|N_2B|\geqslant|N_1N_2|=2\sqrt{5}$，即 $\triangle ABC$ 周长的最小值为 $2\sqrt{5}$.

说明 本题根据平面几何知识，应用轴对称方法求得 $\triangle NAB$ 周长的最小值，解析几何中的对称一般有中心对称和轴对称两类：(1) 点 $M(x,y)$ 关于 $O'(a,b)$ 的中心对称点 $M'(2a-x,2b-y)$；(2) 点 $M(x,y)$ 关于 x 轴，y 轴，直线 $y=x$，直线 $y=-x$ 的对称点分别为 $(x,-y)$、$(-x,y)$，(y,x)，$(-y,-x)$，点 $M(x,y)$ 关于直线 l：$Ax+By+C=0$ 的对称点 $M'(x_0,y_0)$，一般可根据直线 l 垂直平分线段 MM'，列出方程组 $\begin{cases}B(x-x_0)-A(y-y_0)=0\\A(x+x_0)+B(y+y_0)+2C=0\end{cases}$，解得 $M(x_0,y_0)$.

例 8 (2005 年广东高考题) 在平面直角坐标系中，已知矩形 $ABCD$ 的长为 2，宽为 1，AB、AD 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，A

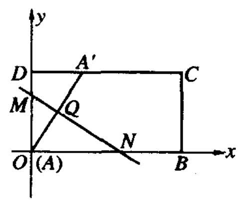
点与坐标原点重合(如图所示),将矩形折叠,使 A 点落在线段 DC 上.

(1) 若折痕所在的直线斜率为 k,试写出折痕所在直线的方程;

(2) 若折痕平分矩形 $ABCD$ 的面积,求折痕所在直线斜率 k 的值;

(3) 求折痕长的最大值.

分析 (1) 设 A 的对称点为 A',折痕为 MN,则 $A'\in BD$,且 MN 垂直平分线段 AA',据此写出折痕 MN 所在直线方程;(2) 折痕 MN 平分矩形 $ABCD$ 的面积 $\Leftrightarrow MN$ 过矩形 $ABCD$ 的中心;(3) 建立目标函数,求函数的最大值,从而求出折痕长的最大值.



解:(1) 设 A 点关于折痕 MN 的对称点为 A',则 AA':$y=-\dfrac{x}{k}$,令 $y=1$ 得 $A'(-k,1)\,(-2\leqslant k<0)$,$\therefore$ AA' 中点 $Q\left(-\dfrac{k}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,$MN$:$y-\dfrac{1}{2}=k\left(x+\dfrac{k}{2}\right)$ 即 $y=kx+\dfrac{k^2+1}{2}\,(-2\leqslant k<0)$;又若 $k=0$,则 MN:$y=\dfrac{1}{2}=0x+\dfrac{0^2+1}{2}$,$\therefore$ 折痕所在直线方程为 $y=kx+\dfrac{k^2+1}{2}\,(-2\leqslant k\leqslant 0)$.

(2) MN 平分矩形 $ABCD$ 的面积 $\Leftrightarrow MN$ 过矩形的中心 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$,$\therefore$ $\dfrac{1}{2}=k+\dfrac{k^2+1}{2}$,解得 $k=-2$ 或 $k=0$.

(3) ① 当 $k=0$ 时折痕长为 2. ② 当 $k\neq0$ 时,折痕 MN 所在直线与两坐标轴的交点为 $R\left(0,\dfrac{k^2+1}{2}\right)$,$T\left(-\dfrac{k^2+1}{2k},0\right)$,令 $y=RT^2=\left(\dfrac{k^2+1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{k^2+1}{2k}\right)^2=\dfrac{(k^2+1)^3}{4k^2}$.

$$y'=\frac{3(k^2+1)^2\cdot 2k\cdot 4k^2-(k^2+1)^3\cdot 8k}{16k^4}$$