普通中学四年一貫制課本

几何和三角

北京师范大学数学系教材编写組

科学技术出版社

普通中学四年一貫制課本

几何和三角

（下　册）

北京师范大学数学系
教　材　編　写　組

科学技术出版社
1959年・北京

編者的話

在党的总路綫光輝照躍下，出現了社会主义建設全面大躍进的高潮，我国的教育事業也正汹涌澎湃地向前迈进。全国普通中学都已进行或正在进行教育改革，徹底摆脫过去在中学数学教学中严重存在的脫离無产阶級政治，脫离生产实际、厚古薄今、水平很低的落后狀态，試圖將普通教育(中学)改为四年，这就要求我們急速地編出这一套教科書：坚决地貫徹毛主席的教育方針，做到厚今薄古，紧密地与生产实际相結合，能够反映出祖国大躍进的形势，使学生在四年內除学完过去六年所学的数学課程外，还要获得一些近代的有用的数学知識。

为了滿足这种需要，我們北京师大数学系在党的領导下，由二、三、四年級同学与部分教师及先到校的工农新同学等100多人，組成了教材編写組，大家破除迷信，解放思想，在毛主席教育与生产劳动相結合的方針指导下，發揮了集体的力量，采取了人人动手的羣众編書的方法，所有参加編写工作的同志，个个干勁冲天，为了尽快地写出为無产阶級的政治服务，为生产服务的教材，大家日以繼夜地工作着，深入到生产实踐中去。总支領导我們在半个月的时間里，先后訪問了一百多个工厂、农業合作社、大、中、小学，科学院，国家机关，商店及建筑工地等單位，所到之处也都得到了各單位的党組織的关怀和支持，特别是石景山鋼鉄厂、国棉二厂、北京城市規划局、地質勘探处測量队的同志們，給了我們很大的帮助。

我們所編写的教材，其中有算术、代数、几何与三角、解

析几何与微积分初步等。短时期内完成这样的工作，在过去是不可想象的，可是今天我們在党的領导下，鼓足了革命干劲，作了大胆的尝試。但由于我們自己的知識还不足，对生产实际的了解还很少，加上时間急促，因此在教材中还一定存在不少問题，特别在联系生产实际的問题上很是很不够的，离要求还很远。我們殷切地希望用这套教材的教师和同学們，踴躍地提出批評和改进的意見来，讓我們共同研究和討論，使我国能早日有一套完善地、最好地貫徹毛主席教育方針的普通中学教材。

北京师范大学数学系教材編写組

1958年9月

目　次

第五章　相似多边形

§ 62　綫段的長度

綫段数量表示的近似值求法　在日常生活及生产实践当中，經常需要度量某些物件的長度、寬度、高度……。

例如我們用千分卡尺量一个圓柱形机器零件的直徑，如果量的結果是50个單位長，我們就用50这个数来表示这个零件直徑的長度。如果長度的單位是毫米，我們就說这个零件的直徑是50毫米。

一般来講，取定一条綫段作为長度單位，来量一条已知綫段，就能夠得到一个用来表示已知綫段長度的数。我們称这个数为已知綫段的量数。

用長度單位 l 去量已知綫段 a，会出现以下兩种情况之一。

一、剛好量完而沒有剩余，这时显然量数为整数。

二、截取到某一次以后，剩下一段比長度單位还要短的綫段。

例如用長度單位 l 去量已知綫段 a 截取了三次，剩下比 l 还短的一段。这时我們知道綫段 a 的量数必在3、4之間。为了得到綫段的更精确的量数，我們把單位長度分成10个等分，用其中的一分去量剩余的那一部分，量的結果可能正好量完，也可能又剩下一段比單位長度的 $\frac{1}{10}$ 还短的綫段。例如我們量了3次后剩下一

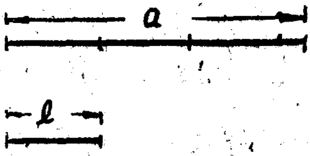

图 1

段，則此时我們知道 a 的量数必在3.3和3.4之間。

我們再把單位綫段分成100等分，用一分去量剩下的一段，又有二种可能，一种是剛好量完，另一种是剩下比$\frac{1}{100}$的單位長度还短的一段。我們再把 l 分为1000，10000，……等分，如此繼續下去，有二种可能。

（1）依上面那样做了有限次以后量尽了，这时綫段 a 的量数可用整数和小数表示。

（2）永远也量不完(是存在的)。但实际应用当中只求近似值就行了。

所以当我們分單位綫段时，次数愈多則綫段 a 的量数就愈精确。

§63 綫段的比、比例綫段

兩条綫段的比就是用一長度單位去量它們所得量数之比。

兩条綫段的比和所取的長度單位無关。例如兩条綫段 a、b，我們用米尺去量它們，設量数分别为2、3，則此二綫段之比为$\frac{2}{3}$。若用市尺去量它們，則量数分别为6、9，則此二綫段之比为$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$。

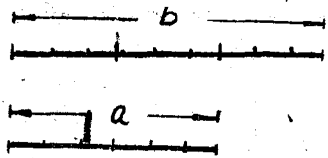

图2

如果綫段 a、b 的比等于綫段 c 和 d 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，我們就說这四条綫段 a、b、c、d 成比例。a、d 叫比例外項。b、c 叫**比例內項**。綫段 d 叫綫段 a、b、c 的**第四比例項**。

如果綫段 a、b、c 之間有 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 的关系，那么綫段 b 叫做綫段 a 和 c 的**比例中項**。

綫段的比和由綫段組成的比例具有数的比和由数組成的比例的性質：下面一些性質是我們以后常常要应用到的。

(1)如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $ad=bc$。

(2)如果 $ad=bc$，那末 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

(3)如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$(反比定理)。

(4)如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$(更比定理)。

(5)如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$(合比定理)。

(6)如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$(分比定理)。

(7)如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那末 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$(合分比定理)。

(8)如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{l}{f}=\cdots\cdots$，那末

$$\frac{a+c+l+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{l}{f}=\cdots\cdots\text{(等比定理)。}$$

§ 64 相似多边形定义

在生活和生产实踐中，我們随时随地都会遇到各样的相似圖形，例如我国国旗上的大小五角星。

这一节我們只介紹相似多边形。

在两个边数相同的多边形中，如果各角順次对应相等，則两对相等的角所夾的边就是对应边。

在两个边数相同的多边形中，如果(1)各角对应相等，

并且（2）对应边成比例，这两个多边形就叫做相似多边形。

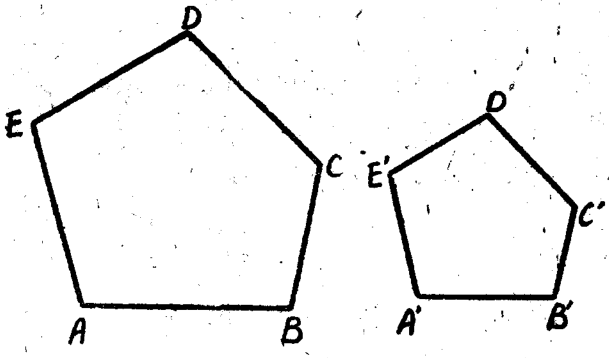

图3

例如，在五边形 $ABCDE$ 和 $A'B'C'D'E'$（圖3）中，（1）$\angle A=\angle A'$，$\angle B\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$\angle D=\angle D'$，$\angle E=\angle E$；并且（2）$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{EA}{E'A'}$；它們就是相似多边形。

二个边数相同的多边形，如果我們只知道各角对应相等或对应边成比例的两个条件中的一个，还不能断定他們必定是相似多边形。

例如，圖 4 中 矩形和正方形，它們的角对应相等，但它們的各边并不成比例，所以它們不是相似多边形；又如圖中正方形和菱形，它們的各边成比例，但是它們的各角并不对应相等，所以它們也不是相似多边形。

相似三角形是相似多边形的一种特殊情形，但它在这門几何三角課程中却占非常重要的地位。因为一方面相似三角形在实践中是应用最广泛的，另一方面它也是进一步研究相

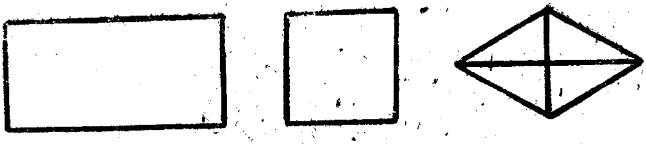

图4

似多边形的基础，所以我們有必要先对相似三角形作詳細的討論。

从相似多边形的定义，我們知道如果要証明两个三角形相似，应該証明：

（1）它們的各角对应相等；

（2）它們的对应边成比例。

但是实际上，两个三角形只要滿足某一些条件就可以判定它們是相似的。下面我們就討論两个三角形滿足哪些条件就可以断定它們相似。

§65 定 理

定理 平行于三角形的一边而和其他两边相交的直綫，截原三角形所得的三角形和原三角形相似。

已知：在三角形 ABC 中，$DE \parallel BC$。

求証：$\triangle ADE \sim \triangle ABC$。

証明：（1）証 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 的各角对应相等。

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 中，

$$\angle A = \angle A,$$

$\angle ADE = \angle B$，$\angle AED = \angle C$（平行綫的同位角），

$\therefore$ $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 的各角对应相等。

（2）証 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 的对应边成比例。

首先把 AB 分成 10 等分，过 AB 上各分点分别作平行

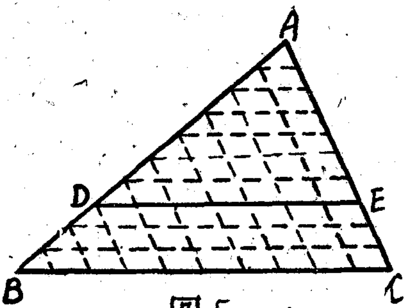

图5

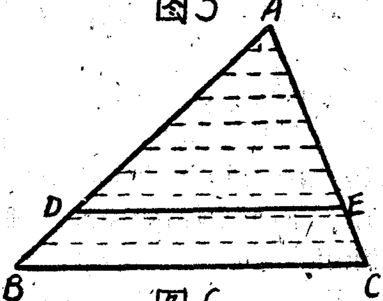

图6

于 BC 的直綫，这时 AC 被这些平行綫分成 10 等分，幷可能有两种情况出現：

(i) AD 恰好含有 $\frac{1}{10}AB$ 的 m 倍 $(m<10)$，如圖5；这时 $\frac{AD}{AB}=\frac{m}{10}$。

而 AE 也必含 $\frac{1}{10}AC$ 的 m 倍，所以 $\frac{AE}{AC}=\frac{m}{10}$。

因此
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$

同样的道理我們过 AB 上的各分点分别作平行于 AC 的

直綫，則 BC 被这些平行綫分成 10 等分而 DE 被分成 m 等分(圖 5)。

所以 $\frac{DE}{BC}=\frac{m}{10}$　　$\therefore$　$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

(ii′) AD 含有 $\frac{1}{10}AB$ 的 m 倍和一个小于 $\frac{1}{10}AB$ 的小綫段。則 AE 也含有 $\frac{1}{10}AC$ 的 m 倍和一个小于 $\frac{1}{10}AC$ 的小綫段。

所以 $\frac{AD}{AB}$ 和 $\frac{AE}{AC}$ 的每一个比的近似值，精确到 $\frac{1}{10}$ 时，得到 $\frac{AD}{AB}=\frac{m}{10}$，$\frac{AE}{AC}=\frac{m}{10}$.

其次，同上面作法一样，把 AB 分成 100、1000、……等分，这样継續下去。会出现以下兩种情况之一：

(i)分到第 K 次时即 10^k 等分 AB 时，AD 含有 $\frac{1}{10^k}AB$ 的整数倍，这时跟上面証法一样，我們可以証明 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

(ii)無論分多少次，AD 都不会恰被等分。这时我們用近似值表示 $\frac{AD}{AB}$ 及 $\frac{AE}{AC}$ 的比，同上面的証法一样，我們可以証明無論精确到什么程度，只要精确度相同，$\frac{AD}{AB}$ 和 $\frac{AE}{AC}$ 的比的近似值总是相等的。

所以 $\frac{AD}{AB}$ 和 $\frac{AE}{AC}$ 可以用同一無限小数来表示，因此

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}.$$

用相同的方法，可以証明$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

总之，無論在什么情况下，都得到$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

由(1)、(2)的証明知道$\triangle ADE\sim\triangle ABC$.

推論，平行于三角形的一边而和其他兩边相交的直綫分这兩边成比例綫段。

§66 三角形相似的判定定理

定理 在兩个三角形中，如果我們知道以下三种情形之一成立，則兩三角形相似：

(1)一个三角形的兩个角和另一个三角形的兩个角对应相等；

(2)一个三角形的一个角和另一个三角形的一个角相等，并且夾这兩个角的边成比例；

(3)一个三角形的三条边和另一三角形的三条边成比例。

因为証明方法彼此类似，这里只証第三种情形，其余二种情形讀者自行証明。

已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

求証：$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

証明：在AB上截取綫段AD，使$AD=A'B'$，并且作$DE\parallel BC$交AC于E，那末

$\triangle ABC\sim\triangle ADE$.

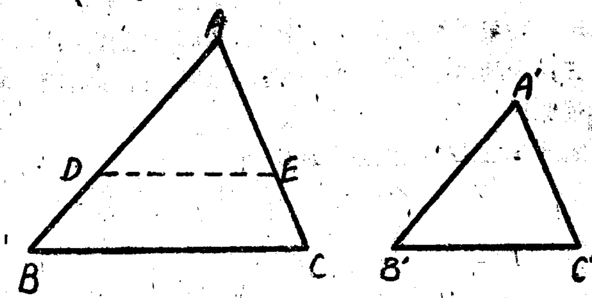

图 7

$$\because \quad \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE},$$

但 $\quad AD=A'B'$(作圖).

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}.$$

$$\because \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\text{(已知)},$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{DE}=\frac{BC}{B'C'}, \quad \frac{AC}{AE}=\frac{AC}{A'C'};$$

$$\therefore \quad DE=B'C', \quad AE=A'C'.$$

在$\triangle ADE$和$\triangle A'B'C'$中

$$AD=A'B',\ DE=B'C',\ AE=A'C'.$$

$$\therefore \quad \triangle ADE\cong\triangle A'B'C'.$$

$$\therefore \quad \triangle ADE\sim\triangle A'B'C'.$$

根据以上各定理我們断定:

(1)一个直角三角形的一个銳角和另一个直角三角形的一个銳角相等，則这兩个直角三角形相似.

(2)一个直角三角形的兩条直角边和另一个直角三角形

的两条直角边成比例，则这两个直角三角形相似。

定理　如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边成比例，那末这两个直角三角形相似。

已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$\angle C$和$\angle C'$是直角，

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

求証：$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.

証明：在CB上截取綫段CD使$CD=C'B'$，并且作$DE\parallel BA$交AC于E，那末

$$\triangle ABC\sim\triangle EDC,$$

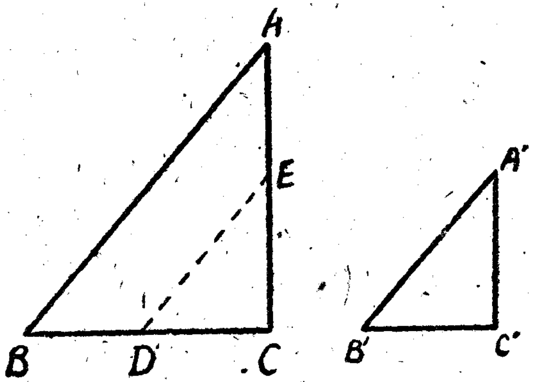

图8

$$\frac{AB}{ED}=\frac{BC}{DC},$$

但　　$$DC=B'C',$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{ED}=\frac{BC}{B'C'}.$$

$$又 \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'},$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{ED}=\frac{AB}{A'B'}.$$

$$\therefore \quad ED=A'B'.$$

在直角三角形 EDC 和 $A'B'C'$ 中

$$ED=A'B', \qquad DC=B'C';$$

$$\therefore \quad \triangle EDC\cong\triangle A'B'C'.$$

$$\therefore \quad \triangle ABC\sim\triangle A'B'C'.$$

讀者要注意　对一般三角形来說，两个三角形两双对应边成比例，一对角相等时，两三角形不一定相似。

定理　在两个相似三角形中，对应高、对应中綫、对应角的平分綫、外接圓半徑、內切圓半徑和对应边成比例。

只証对应高的情形，其余情形讀者自証。

已知：$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$，$AD$ 和 $A'D'$ 是对应高。

求証：$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}.$

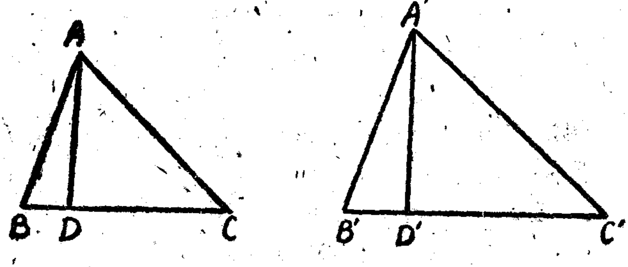

图 9

証明： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'},\ \angle B=\angle B'.$$

在直角三角形 ABD 和 $A'B'D'$ 中，

$$\angle B=\angle B',$$

$$\therefore \quad \triangle ABD \sim \triangle A'B'D'.$$

$$\therefore \quad \frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}.$$

定理　如果一个角的兩边被若干条平行綫所截，那末这兩边被这些平行綫分为成比例的綫段。

已知： $CC' \parallel DD' \parallel EE'$，它們分別交$\angle AOB$的兩边于 C、D、E 和 C'、D'、E'.

求証： $\frac{OC}{OC'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}$.

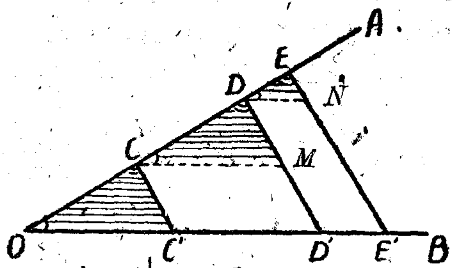

图10

証明：作和 OB 平行的直綫 CM、DN，分別交 DD'、EE' 于 M、N.

在 $\triangle COC'$、$\triangle DCM$ 和 $\triangle EDN$ 中，

$$\angle COC'=\angle DCM=\angle EDN.$$

$\angle C'CO=\angle MDC=\angle NED$（平行綫的同位角）；