总 主 编　王禄宪
本册主编　麦学诚

数学思维与技能训练

★创新思维
★技能训练
★巩固提高

小学6年级

南方出版社

数学思维与技能训练

小学6年级

本套教材主编　王禄宪
副主编　宋红军
麦学诚
本册主编　麦学诚

南方出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思维与技能训练. 小学六年级/王禄宪主编.
—海口: 南方出版社,2005.12
ISBN 7-80701-436-9

I. 数… II. 王… III. 数学课-小学-教学参考资料
IV. G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 143605 号

数学思维与技能训练
六年级
王禄宪 总主编

责任编辑: 易 凌
封面设计: 占 美
出版发行: 南方出版社
邮政编码: 570203
社 址: 海南省海口市海府一横路19号华宇大厦12楼
印 刷: 文字六〇三厂
开 本: 787×1092 1/16
印 张: 9.0
字 数: 180千字
版 次: 2006年1月第1版 2006年1月第1次印刷
书 号: ISBN 7-80701-436-9/G·606
定 价: 14.00元

前　言

广东省数学奥林匹克业余学校自1986年成立以来，在中国数学会普及工作委员会的指导下，历年来对中小学数学教师和中小学学生进行培训。我们致力于探索如何对学生进行数学的教学和训练以提高他们的数学水平，我们逐步认识到，通过数学的教学和训练，既要使学生能够运用他们掌握的数学知识解答数学问题，更要提高他们的思维能力和学习能力。要达到这样的目的，在教学和训练中，应以学生现有的数学知识为基础，在帮助学生学习、理解好同步知识（即按照课程标准同年级数学课程）的同时，加深理解、适度扩展，发展学生的思维能力，训练他们灵巧掌握运用所学的数学知识解决问题的技能，不强求他们提前学习较高年级将要学习的知识用以解决当前的问题。按照这样的理念，并汲取广大教师多年的教学经验，我们编写了这套《数学思维与技能训练》教材。这套教材从小学三年级到初中三年级每年级一册，每册均有若干专题，除了有例题讲解外，还配备适量的练习题，每册教材还配备了几个综合练习，帮助巩固在专题中获得的知识及提高综合运用的能力。书后附有练习题的答案及必要的提示。每册教材中有“*”号的例题和练习，可作为选教选学的内容。

本套教材主编：王禄宪　副主编：宋红军、麦学诚

本册主编：麦学诚　编写人员：卢伟滔、苏炬林、麦志锋、黄瑛玮

编　者

2006年1月

目　录

第1讲　各种各样的数字问题

10个阿拉伯数字(实际上是印度——阿拉伯数字)以及数的十进制,可以引出许多有趣的数字问题,尽管它们形式各异,但只要正确、灵活地运用十进制计数法,对于这些问题大都能找到一些共同的规律来解答。

【例1】将一个四位数的数字排列顺序颠倒过来,得到一个新的四位数,如果新数比原数大7992,那么所有符合这样条件的四位数中,原数最大是几?

解:设原数千位上是A,百位上是B,十位上是C,个位上是D,记作$\overline{ABCD}$,新数则记作$\overline{DCBA}$,按题意$\overline{DCBA}-\overline{ABCD}=7992$,那么$D>A$,个位上$A$减$D$,要从十位上的$B$退1,个位上减得2,就是$10+A-D=2$,$A$不能是0,最小是1,于是$D=9$。又十位上$B$退1后减$C$得9,$B$只能等于$C$,十位上的减法要从百位上的$C$退1,百位上的减法也要从千位上的$D$退1,减得7。就是说,按照前面推得的$A=1$、$D=9$,9退1减1得7,符合题意。$B=C$,$B$和$C$都可以是0~9这十个数,最大取9。所以,原数最大是1999。

【例2】红、黄、白和蓝色卡片各一张,每张上写有一个数字,小明将这四张卡片如下图放置,使它们构成一个四位数,并计算这个四位数与它的数字之和的10倍的差。结果小明发现无论白色卡片上是什么数字,计算结果都是1404,问:红、黄、蓝三张卡片上各是什么数字?

红	黄	白	蓝

解:按十进制计数法,我们把千位、百位、十位和个位上的数字分别用红、黄、白、蓝表示,这个四位数是1000×红+100×黄+10×白+蓝,而四个数字的和的10倍是10×(红+黄+白+蓝),依题意得:

1000×红+100×黄+10×白+蓝-10×(红+黄+白+蓝)=1404

也就是990×红+90×黄-9×蓝=1404

两边除以9,得:110×红+10×黄-蓝=156

红只能是1,得:10×黄-蓝=46,可以推得黄是5,蓝是4。

答:红色卡片上是1,黄色卡片上是5,蓝色卡片上是4。

【例3】用一个四位数的四个数字组成一个最大的四位数,它比原来的四位数大5706,用这四个数字组成一个最小的四位数,它比原来的四位数小657。求原来的四位数。

解:把这个四位数字从大到小排列,设为 $A \geqslant B \geqslant C \geqslant D$,那么用这四个数字组成的最大的四位数(在本题中简称最大的四位数)是 $\overline{ABCD}$,用这四个数字组成的最小的四位数(在本题中简称最小的四位数)是 $\overline{DCBA}$ 或 $\overline{CDBA}$(当 D 为 0,C 不为 0 时)。按题意,最大的四位数-原四位数=5706,原四位数-最小的四位数=657,这两式相加得:最大的四位数-最小的四位数=5706+657=6363。

当最小的四位数为 $\overline{DCBA}$ 时,可得:$\overline{ABCD}-\overline{DCBA}=6363$,从个位算起,$D$ 最小是 1,这时 $A=8$,在十位上若 $B=C$,十位上差只能是 9,因此 $B>C$,百位上 B 减 C 必够减,那么千位上 8-1=7,与千位上差是 6 不相符。

这说明只能是 $D=0$,得 $\overline{ABCD}-\overline{CDBA}=6363$,也就是 $\overline{ABC0}-\overline{C0BA}=6363$,个位上,$10-A=3$,$A=7$,千位上 $A-C=6$,$C=1$,十位上 $C-B$ 因为 C 在个位减时退 1,所以十位上是 $10-B=6$,$B=4$,就是说 $\overline{ABCD}=7410$。

由:最大的四位数-原四位数=5706,7410-原四位数=5706

得:原四位数是 7410-5706=1704。

答:原来的四位数是 1704。

【例 4】有一个四位数,各位上的数字各不相同,它和它的反序数(所谓反序数就是将原来的数字顺序倒过来排列,例如 1234 的反序数为 4321)之和为一个五位数,且这个五位数的数字排列是以当中的数字为对称的。这样的四位数最大可以是几?

解:设这个四位数是 $\overline{ABCD}$,它的反序数为 $\overline{DCBA}$,由题意得:

$$\overline{ABCD}+\overline{DCBA}=\overline{EFGFE}$$

两个四位数千位上的数相加为 $A+D$,和是五位数,万位上的 E 是 $A+D$ 时进上去的,E 只能是 1,即以当中的 G 为对称的 $\overline{EFGFE}$ 的万位上和个位上都是 1,那么 $A+D=11$,当 $\overline{ABCD}$ 最大时,为 $A=9$、$D=2$。百位上 $B+C$ 最大也只能向千位进 1,那么和的千位上是 2,即十位上也是 2,十位上已从个位进 1,那么十位上 $B+C=11$,因为四位数 $\overline{ABCD}$ 各位上的数字各不相同,$A=9$,B 最大只能是 8,这时 $C=3$。所以,$\overline{ABCD}$ 最大是 9832。

答:这样的四位数最大是 9832。

【例 5】有四个不同的数字,用它们组成最大的四位数和最小的四位数,这两个四位数之和是 11469,那么其中最小的四位数是几?

解:设这四个数字分别是 A、B、C、D,并且 $A>B>C>D$,这四个数字组成的最大的四位数是 $\overline{ABCD}$,最小的四位数是 $\overline{DCBA}$(D 不为 0)或 $\overline{CDBA}$(D 为 0),如果最小的四位数是 $\overline{DCBA}$,按题意 $\overline{ABCD}+\overline{DCBA}=11469$,当个位上的 D 与 A 的和为 9 时,千位上 A 与 D 相加的和不可能得 11,因此 D 不为 0 时,两个四位数的和不可能是 11469。当 D 为 0 时,最大的与最小的四位数的和 $\overline{ABCD}+\overline{CDBA}=11469$,也就是 $\overline{ABC0}+\overline{C0BA}=$

11469。个位上，$0+A=9$，得 $A=9$，千位上，$A+C=11$，得 $C=2$，十位上，$C+B=6$，得 $B=4$。所以，$\overline{C0BA}=2049$。

答：其中最小的四位数是 2049。

【例 6】两个自然数，差是 98，各自的各位数字之和都能被 19 整除，那么，满足要求的最小一对数的和是多少？

解：差 98 的两个数字的和是 9+8=17，两个数各自的各位数字之和能被 19 整除，如果这两个数做减法，计算中如果没有退位，差的各位数字之和也能被 19 整除，每退位 1 次，差的数字和增加 9，17+19=36，就是说，当被减数的数字和为 19，减数的数字和为 19×2=38 时，减的过程中有 4 次退位就满足题意。减数的数字和为 38，最小是 29999，这时被减数为 29999+98=30097，这对数就是最小的一对数，和是 30097+29999=60096。

答：最小的一对数的和是 60096。

【* 例 7】一个多位数的个位是 8，将个位 8 移到这个数的首位，其他数字次序不变地往后退一位，得到一个新的多位数，它是原数的 8 倍，原数最小是几？

解：设原来的多位数表示为－－－－……－－8，则新的多位数是 8－－－－……－－(－表示待求出的数字，有多少个数字还未确定)，按题意：

－－－－……－－8×8=8－－－－……－－

可以用这一式子逐个乘出横线代表的数字，直到乘得最高位是 8 为止，例如，8 乘多位数的个位，得 64，写 4 进 6，得到新的多位数个位是 4，也就是原数十位上是 4，即：－－－－……－48×8=8－－－－……－4，然后，8 乘十位上的 4 得 32，加上进上的 6，得 38，写 8 进 3，即－－－－……848×8=8－－－－……84，这一步虽然原数已出现一个 8，但因为还有进 3，不能说这时最高位是 8，这样逐位计算可得：

1012658227848×8=8101265822784，左边的多位数就是原数中最小的。

答：原数最小是 1012658227848。

【* 例 8】从 1999 到 5999 的自然数中有多少个数的数码之和能被 4 整除？试说明理由。

解：从 1999 到 5999 共有 4001 个数，其中 1999 的四个数码的和是 1+9+9+9=28，数码之和能被 4 整除。把其余的数分为①2000~2999，②3000~3999，③4000~4999，④5000~5999 四组，每组都有 1000 个数，如果把每组数的千位的数码去掉，四组数其余的三个数码都是 000~999，每个数的三个数码的和被 4 除，余数都分别是 0、1、2、3，并且每组数三个数码的和被 4 除，余数为 0 的、1 的、2 的、3 的个数都分别相同。这几个个数相加的和都是 1000。而第①组的三个数码的和除以 4 余数为 0 的，加上千位上的 2，四个数码的和除以 4，余数为 2；三个数码的和除以 4 余数为 1

的，加上千位上的2，四个数码的和除以4，余数为3；三个数码的和除以4余数为2的，加上千位上的2，四个数码的和除以4，余数为0；三个数码的和除以4余数为3的，加上千位上的2，四个数码的和除以4，余数为1。同理，第②组的三个数码的和除以4余数为0、1、2、3，加上千位上的3，四个数码的和除以4，余数分别为3、0、1、2；第③组的三个数码的和除以4余数为0、1、2、3，加上千位上的4，四个数码的和除以4，余数分别为0、1、2、3；第④组的三个数码的和除以4余数为0、1、2、3，加上千位上的5，四个数码的和除以4，余数分别为1、2、3、0。这样，四组数数码的和除以4，余数为1、2、3、0的都各有1000个，其中1999~5999的自然数中，四个数码的和能被4整除的有1+1000=1001(个)。

答：有1001个数的数码之和能被4整除。

练习1

1. 上、下两册书的页码共有687个数字，且上册比下册多5页，那么上册有多少页？

2. 由1、2、3、4这四个数字组成的四位数共有24个，将它们从小到大排列起来，第18个数是几？

3. 在1000和9999之间由四个不同的数字组成、而且个位上的数字和千位上的数字的差(以大数减小数)是2，这样的整数共有多少个？

4. 有四个互不相同的数字，用它们组成最大的四位数和最小的四位数，这两个四位数之和是11478，求其中最大的四位数。

5. 有一类自然数，它们的各数位上的数字和为2003，写出这类自然数中最小的一个数。

6. 甲数与乙数的数字和都能被14整除，甲数减乙数，差是40，甲数最小是几？

7. 有一位工人，在他的年龄的末位后面添上一个0，得到一个新数，这个新数的一半再加上他的年龄，和是一个三位数字相同的三位数，而且每位数字都是质数，这个工人的年龄是多少岁？

8. 一个三位数正好等于它各位上的数字和的18倍，这个三位自然数是几？

9. $\overline{abcd}$是一个四位数，由a、b、c、d四个数字组成的另外23个四位数的总和是109480，求$\overline{abcd}$。

10. a是一个四位数，已知a与$a+1$的各位数字之和都能被8整除，那么这样的自然数a最小是多少？

*11. a是由100个9组成的100位整数，b是由100个8组成的100位整数，那么$a\times b$的积的各位数字的和是多少？

*12. 从0、1、2、3、4、5这6个数字中任取3个，组成没有重复数字的三位数，组成的所有这些三位数之和是多少？

第2讲　分数的大小比较

在数学课里，我们知道，分母相同的两个分数，分子大的分数比较大；分子相同的两个分数，分母大的分数比较小。从这两个比较分数大小的法则出发，再结合分数的基本性质的运用，可以比较任意两个分数的大小。例如，当两个分数的分子和分母都不相同时，我们在数学课里知道，把这两个分数通分，就可以按照分母相同的两个分数的方法比较它们的大小。通分是运用分数的基本性质把两个分数化成大小和原来分数相等，而分母相同。在实际比较分数大小时，如果分子、分母都不相同，而分子的最小公倍数比较容易求出时，也可以运用分数的基本性质把两个分数化成分子相同的两个分数，再比较大小。

掌握了比较分数大小的方法，我们还可以解答很多问题。

【例1】比较$\frac{18}{89}$和$\frac{27}{145}$的大小。

解：两个分数的分子和分母都不相同，如果通分，89和145是互质数，公分母是这两个数的积，计算比较繁琐。而分子18和27的最小公倍数是54，把这两个分数化成分子都是54的分数，计算比较简便。

因为$\frac{18}{89}=\frac{54}{267}$，$\frac{27}{145}=\frac{54}{290}$，$\frac{54}{267}>\frac{54}{290}$

所以$\frac{18}{89}>\frac{27}{145}$

答：$\frac{18}{89}>\frac{27}{145}$。

【例2】在$\frac{15}{49}$、$\frac{10}{33}$、$\frac{30}{97}$、$\frac{6}{19}$、$\frac{20}{67}$中，最小的数和最大的数各是哪一个？

解：要找出最小的数和最大的数，既可以把这五个分数化成同分母的分数，也可以把这五个分数化成同分子的分数。相比较而言，化成同分子的分数，计算比较简便。

五个分数的分子的最小公倍数是60。

$\frac{15}{49}=\frac{60}{196}$，$\frac{10}{33}=\frac{60}{198}$，$\frac{30}{97}=\frac{60}{194}$，$\frac{6}{19}=\frac{60}{190}$，$\frac{20}{67}=\frac{60}{201}$，五个分子相同的分数中，分母201最大，190最小，就是说$\frac{60}{201}$最小，$\frac{60}{190}$最大。所以原来的五个分数中，最小的分数是$\frac{20}{67}$，最大的分数是$\frac{6}{19}$。

答：最小的数是$\frac{20}{67}$，最大的数是$\frac{6}{19}$。

【例 3】比较$\frac{58}{69}$和$\frac{65}{76}$的大小。

解：这两个分数的分母 69 和 76 是互质数，分子 58 和 65 也是互质数，无论是求分母的最小公倍数还是求分子的最小公倍数都比较繁琐。再细心观察，两个分数的分母和分子的差都是 11，也就是说，用 1 分别减去这两个分数，所得的差分子都是 11，两个差的分子相同，能否通过两个差的大小比较，得到原来两个分数大小比较的结果呢？

$1-\frac{58}{69}=\frac{11}{69}$，$1-\frac{65}{76}=\frac{11}{76}$，$\frac{11}{69}>\frac{11}{76}$

当被减数相同时，减数小的减得的差就大；减数大，减得的差就小。

所以$\frac{58}{69}<\frac{65}{76}$。

答：$\frac{58}{69}<\frac{65}{76}$。

请你想一想，能不能够通过比较这两个分数的倒数的大小来比较这两个分数的大小？

【例 4】比较$\frac{64}{67}$和$\frac{47}{49}$的大小。

解：把这两个分数化成同分母分数或同分子分数，计算都很繁琐。用例 3 的方法，求出 1 分别减去这两个分数的差，虽然两差的分子、分母也不相同，但把这两个差化成分子相同的分数，比用原来的分数计算，还是简便些。

$1-\frac{64}{67}=\frac{3}{67}=\frac{6}{134}$，$1-\frac{47}{49}=\frac{2}{49}=\frac{6}{147}$

因为$\frac{6}{134}>\frac{6}{147}$，所以$\frac{64}{67}<\frac{47}{49}$。

答：$\frac{64}{67}<\frac{47}{49}$。

上面四例说明，在比较分数的大小时，应该按照所给出要比较的分数的特点，灵活地运用比较分数大小的法则及分数的基本性质等知识，找出比较简便的方法。

下面我们再讨论一些运用比较分数大小的知识来解决较复杂的问题。

【例 5】在括号里填上合适的分数。

$$\frac{1}{9}<(\qquad)<(\qquad)<\frac{1}{8}$$

解:这个式子中的4个分数,是按从小到大的顺序排列的,就是要找出两个不同的分数,都要比$\frac{1}{9}$大,比$\frac{1}{8}$小,然后把其中较小的分数填在第一个括号里,较大的分数填在第二个括号里。

原来两个分数的分子都是1,不可能直接插进分子是1的两个分数,可以找出已知两个分母9和8的某一个公倍数做公分母,使两个分数的分子和分母都扩大相同的倍数后,使得在两个分子之间可以插进两个整数。

很明显,9和8的最小公倍数是72,用72的3倍即216为公分母,$\frac{1}{9}=\frac{24}{216}$,$\frac{1}{8}=\frac{27}{216}$,可以得$\frac{24}{216}<\frac{25}{216}<\frac{26}{216}<\frac{27}{216}$,于是原式可以填为:

$$\frac{1}{9}<(\frac{25}{216})<(\frac{13}{108})<\frac{1}{8}。$$

答:略。

用72的4、5…倍为公分母同样可以插入2个以上的分数。

当然,我们还可以考虑把$\frac{1}{9}$和$\frac{1}{8}$的分子都扩大来插入分数。当分子是1时,9和8之间不能插入自然数;分子都扩大2倍,同时分母也扩大2倍时,原来的分母分别成为18和16,中间只可以插入1个自然数做分母;当分子都扩大3倍或3倍以上时,中间可以插入2个或2个以上自然数作分母,即分子都是3时,有$\frac{1}{9}=\frac{3}{27}$,$\frac{1}{8}=\frac{3}{24}$,得:$\frac{3}{27}<\frac{3}{26}<\frac{3}{25}<\frac{3}{24}$,得到原式填为:$\frac{1}{9}<(\frac{3}{26})<(\frac{3}{25})<\frac{1}{8}$

【例6】把分子和分母相乘的积为660的最简真分数,按从小到大的顺序排列,第4个分数是多少?

解:按照求一个数的约数的方法,每次求出相乘的积为660的两个约数,从这些约数对中,找出互质的约数对便可以组成最简真分数,按从小到大顺序排列,可求出所求的分数。660的约数有:

1	2	3	4	5	6	10	11	12	15	20	22
660	330	220	165	132	110	66	60	55	44	33	30

按照这些约数对组成的最简真分数从小到大依次是:

$$\frac{1}{660}、\frac{3}{220}、\frac{4}{165}、\frac{5}{132}、\frac{11}{60}、\cdots$$

其中第4个分数是$\frac{5}{132}$。

答:第4个分数是$\frac{5}{132}$。

【* 例 7】在$\frac{3}{8}<\frac{\square}{18}<\frac{11}{12}$的□中可以填的自然数有哪几个?

解:题目的要求是,□里填上一个自然数后,得到的分数大于$\frac{3}{8}$而小于$\frac{11}{12}$,求出适合要求的所有的自然数。

由于□是分子,而这个分数的分母是 18,可以从分母出发来想。

要使$\frac{3}{8}<\frac{\square}{18}$,就是$\frac{27}{72}<\frac{\square\times4}{72}$,必须 $27<\square\times4$,□可填 7 或大于 7 的自然数。

要使$\frac{\square}{18}<\frac{11}{12}$,就是$\frac{\square\times2}{36}<\frac{33}{36}$,必须$\square\times2<33$,□可填 16 或小于 16 的自然数。

在 7~16 这一段的自然数为 7、8、9、10、11、12、13、14、15、16,即□可填的自然数是这 10 个。

答:略。

【* 例 8】在$\frac{2}{9}<\frac{7}{\square}<\frac{3}{8}$的□中可以填的自然数有哪几个?

解:由于□是分母,这个分数的分子是 7,可以从分子出发来想。

要使$\frac{2}{9}<\frac{7}{\square}$,就是$\frac{14}{63}<\frac{7\times2}{\square\times2}$,必须 $63>\square\times2$,□可以填 31 或小于 31 的自然数。

要使$\frac{7}{\square}<\frac{3}{8}$,就是$\frac{7\times3}{\square\times3}<\frac{21}{56}$,必须$\square\times3>56$,□可以填 19 或大于 19 的自然数。

所以,要满足$\frac{2}{9}<\frac{7}{\square}<\frac{3}{8}$的要求,□中可以填的自然数有:19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30、31 这 13 个。

答:略。

练习 2

1. 比较下面各组中两个分数的大小。

$\frac{19}{35}$和$\frac{15}{28}$　　$\frac{24}{97}$和$\frac{36}{149}$　　$\frac{148}{151}$和$\frac{130}{133}$　　$\frac{77}{79}$和$\frac{82}{85}$

2. 在$\frac{5}{17}$、$\frac{6}{19}$、$\frac{15}{46}$、$\frac{10}{33}$、$\frac{30}{101}$这五个分数中,最大的分数是哪一个?最小的分数是哪一个?

3. 把分数$\frac{12}{17}$、$\frac{20}{23}$和$\frac{15}{19}$按从小到大的顺序排列。

4. 在下面的括号里填上合适的分数：

(1) $\frac{1}{4}<(\qquad)<\frac{1}{3}$

(2) $\frac{5}{7}<(\qquad)<(\qquad)<\frac{5}{6}$

(3) $\frac{3}{4}<(\qquad)<(\qquad)<\frac{4}{5}$

5. 分母是 15 的最简分数中，比$\frac{1}{6}$大比$\frac{6}{7}$小的有哪几个？

6. 分母是 6 的比$\frac{1}{2}$大比 7 小的最简分数一共有多少个？

7. 在 $\frac{2}{9}<\frac{\square}{15}<\frac{7}{12}$的□中可以填哪几个自然数？

8. 在 $\frac{3}{7}<\frac{6}{\square}<\frac{8}{11}$的□中可以填哪几个自然数？

9. 将分母是 10 的所有最简假分数由小到大依次排列，第 100 个最简假分数的分子是几？

10. 把分子和分母相乘的积为 420 的所有最简真分数从大到小排列，第 3 个分数是几分之几？

*11. 把面积是 240 的长方形的长和宽写成真分数，这些分数从小到大排列，第 5 个分数是几分之几？

*12. 下面六个分数算式中哪一个的得数最小，它的得数是几分之几？

$$\frac{3}{5}+\frac{5}{20},\frac{3}{6}+\frac{6}{20},\frac{3}{7}+\frac{7}{20},\frac{3}{8}+\frac{8}{20},\frac{3}{9}+\frac{9}{20},\frac{3}{10}+\frac{10}{20}$$

第3讲　约分和化简

我们学过分数的基本性质：分数的分子和分母都乘上或除以同一个数(0除外)，分数的大小不变。运用分数的基本性质，如果分数的分子和分母有1以外的公约数，可以把1以外的公约数约去，使分数变得简单；如果两个算式相除写成分数的形式(即作为被除数的算式作分子，作为除数的算式作分母)，并且两个算式有公有的算式因式(可称为公因式)，把公因式约去，可以使这个分数的化简变得简便。另外，运用约分和化简的方法还能解答其他一些有趣的问题。

【例1】将$\frac{4203}{6071}$约分。

解：约分通常是从最小的质数2起由小到大依次判别各质数是否是分子分母的公约数，然后约去。但有时，分子分母的公约数是一个较大的质数，用上述的方法，判别的次数太多，并且当质数达到两位时，判别时往往要写竖式，计算相当繁琐。这个分数可以这样找1以外的公约数：当判别到3时，它是分子的约数却不是分母的约数，把分子4203分解质因数：$4203=3\times3\times467$，467是质数，假如467也是6071的约数，就约去，如果467不是6071的约数，这个分数就是最简分数。恰好$6071=467\times13$，约分后得$\frac{4203}{6071}=\frac{9}{13}$。

【例2】将$\frac{200320032003}{200420042004}$约分。

解：初看分子和分母，大于1的公约数没有显露出来，但是容易看出，分子能被2003整除，分母能被2004整除，于是原来的分数经过分解，就把大于1的公约数显露出来了。

$$\frac{200320032003}{200420042004}=\frac{2003\times100010001}{2004\times100010001}=\frac{2003}{2004}$$

有些少年朋友这样约分：$\frac{2003\cancel{20032003}}{2004\cancel{20042004}}=\frac{2003}{2004}$，虽然结果与正确答案相符，但算理说不清，不应该这样约分。

【例3】将$\frac{177777}{888885}$约分。

解：这题按一般的方法很难找出一个合适的公约数进行约分。但我们平常口

算都很熟悉，85÷17=5，那么，进一步想：885÷177 得几？8885÷1777 得几？这样会归纳到，分母是分子的 5 倍，所以：

$$\frac{177777}{888885}=\frac{1}{5}$$

【例 4】化简：$\frac{123\times123+246\times246+369\times369}{135\times135+270\times270+405\times405}$

解：这一题把两个含有乘、加混合运算的式子相除写成分数的形式，如果按照运算顺序算出两个算式的得数再约分，计算太繁琐了。仔细观察分子和分母的三个乘法都是两个相同的因数的积，而且第二个乘法的因数都正好是第一个乘法的因数的 2 倍，第三个乘法的因数都正好是第一个乘法的因数的 3 倍，因此，按下面的方法化简比较简便。

$$\frac{123\times123+246\times246+369\times369}{135\times135+270\times270+405\times405}$$

$$=\frac{123\times123\times(1\times1+2\times2+3\times3)}{135\times135\times(1\times1+2\times2+3\times3)}$$

$$=\frac{\overset{41}{\cancel{123}}\times\overset{41}{\cancel{123}}}{\underset{45}{\cancel{135}}\times\underset{45}{\cancel{135}}}=\frac{1681}{2025}$$

【例 5】一个分数的分子比分母小 2779，这个分数约分得 $\frac{2}{9}$，原来这个分数是几分之几？

解：按照分数的意义，$\frac{2}{9}$ 是把单位“1”平均分成 9 份，表示这样的 2 份，单位“1”就是这个分数的分母，它平均分成 9 份，分子是这样的 2 份，分子比分母小 9−2=7（份），每份是 2779÷7=397，原来的分数的分子是 397×2=794，分母是 397×9=3573，所以原来这个分数是 $\frac{794}{3573}$。

答：原来这个分数是 $\frac{794}{3573}$。

【例 6】分数 $\frac{97}{181}$ 的分子和分母都减去同一个数，新的分数约分后是 $\frac{2}{5}$，减去的数是多少？

解：181 减去 97 差是 84，181 和 97 都减去同一个数，差仍然是 84，新分数等于