



丛书主编 任志鸿

高中总复习

导学大课堂

文科数学

- 8000名一线特高级教师倾心打造,持续创新,畅销10年
- 与读者建立了足够心理默契与情感依恋的图书品牌
- CCTV 助学读物知名上线品牌,“希望之星”指定教辅

◀上册▶

华文出版社



高中总复习

导学大课堂

丛书主编 任志鸿

本册主编 赵景义 李克峰

副主编 李安泽 吴宝 刘敏 杨在敏

文科数学

◀上册▶

图书在版编目(CIP)数据

高中总复习导学大课堂.文科数学.上册/任志鸿主编.

—北京:华文出版社,2006.4

(志鸿导学系列丛书)

ISBN 7 - 5075 - 2015 - 3

I. 高... II. 任... III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 034471 号

装帧设计:邢 丽

责任编辑:方明亮 赵连荣

策 划:尹马文

华 文 出 版 社 出 版

(邮编:100055 北京市宣武区广安门外大街 305 号 8 区 5 号楼)

网址:<http://www.hwcbs.com.cn>

网络实名:华文出版社

电子信箱:hwcbs@263.net

电话:010-63370154

山东滨州汇泉印务有限公司印刷

山东世纪天鸿书业有限公司总发行

890×1240 16 开本 印张:199 字数:8279 千字

2006 年 4 月第 1 版 2006 年 4 月第 1 次印刷

全套定价:321.00 元

(如有印装质量问题请与承印厂调换)

阅读地图

THE MAP OF READING

复习准备

感受高考 知识清单
真题演练 梳理考点
洞悉奥秘 构建网络
把握动向 厚积薄发

高考热身

基础过关
能力提升
循序渐进
步步为营

复习进行

三点剖析 各个击破
突出重点 典题例证
突破难点 类题演练
透析疑点 变式探究

走进考场

瞄准高考
实战演习
新题靓题
轻巧夺冠





紧跟课堂 同步**导学**
结构**合理** 功能齐备
宏观把握 **精细**加工

新的学年，新的开端：导学系列，昂首阔步，再谱新篇。

《导学大课堂》系列丛书在我们大家的共同见证下，已经走过一度风雨春秋。她如同一棵破芽的幼笋，稚嫩之中却有着逐云而上的气势，且已经获得广大师生的初步认同，我们倍感欣慰。但我们不敢有丝毫懈怠。为了您——我们的朋友，我们努力着。

我们为您呈现的这套《导学大课堂》系列丛书秉承“紧跟课堂、同步导学”的教学理念，从创意、内容及形式各方面在去年基础上做了较大的改进，目的是突出实用性，更加适应您的需要。

结构合理 Reasonable

我们已经从整体上、宏观上进行了科学安排与把握，从大局的、长远的角度做出周密的设计，使整个图书系列结构合理，优势互补、功能齐备、系统完整。

内容创新 Creative

新版的《导学大课堂》系列丛书从服务于实际的教学过程出发，按照“课前预习，课堂互动，课后练习”的教学模式，力邀数百位名师鼎力打造。

形式新颖 New

新版的《导学大课堂》不仅从内容方面为您提供最高效、最实用的辅助工具，也从形式上做了大胆创新和尝试，力求给您以耳目一新之感。

您的满意是对我们最高的奖赏，您的批评是对我们最好的鞭策。



用智慧和爱心铸造中国教辅第一品牌！



高考梦工场,导学大课堂。

不同的授课方式,就有不同的效果。不同的思维模式,就有不同的教学辅导书。好的授课方式能使你轻松乐学,如沐春风。科学的思维模式,能使你左右逢源,事半功倍。基于这种思考,我们深入研究了最新的课改方向和高考动态,吸收了最先进的教研成果,汇集了实力派名师全力打造,倾心推出了《导学大课堂》系列丛书。

本丛书采用大单元、小课时的编写模式,设置“课前导引、课堂导学、课后导练”三大板块。充分体现“导学”的思想,即“情境导学”设置学生熟悉的情境,以激发其自主学习的兴趣和动力;“问题导学”使“教材内容问题化,基本知识能力化”以学案方式将教材内容设置成一系列的问题,引导学生自主探究并在解决问题的过程中体验到成功的喜悦和学习的快乐。“案例导学”通过经典案例的剖析来突破重点难点,深入浅出,打通思维通道,掌握学习要领。目的是让学生学习,学会考试。

新的高考越来越倾向于“重视基础,能力立意”。“重视基础”,意思就是从最基本的知识出发。从近几年的高考试题中不难发现,即使是着重体现区分度的中、高档题和“翘尾巴”的压轴题,究其本,溯其源,也都能在课本中找到它的“根”;所谓“能力立意”,意思是说题目不是基础知识的简单堆砌,而是其精心而又巧妙的组装,通过这种组装,题目就给人一种新颖、陌生感。这不但高等学府选拔人才的需要,也是莘莘学子将来从事各种工作,研究和解决生活、社会问题的需要。因此,一方面瞄准高考,有效地帮助学生提高成绩,以便升入理想的大学继续深造;另一方面,从根本上提高学生的综合素质,为将来的持续发展奠定基础。

本丛书具有以下特点:

● **科学设计,全程优化** 在宏观上对高考全程复习进行了科学安排,与课堂教学同步,堂堂达标、单元过关。这样不仅适合学生的认知特点和复习规律,符合大多数地方教学的实际,尤其适合教师指导下课堂教学使用。

● **问题立意,激活思维** 学生解决问题的过程就是思考的过程、学习的过程和认识提高的过程。我们通过对教材知识的挖掘和梳理,将知识设置一个个问题,这些问题以本学科为核心,将触角广泛地伸向其他学科和现实社会。学生在一个个问题的探究过程中,激活了思维,挖掘出自己潜藏的智能,并从思维的深度改变了传统学习方式,从而在根本提高了学习的效率。

● **源于基础,构建网络** 新的高考注重在知识的交汇点上命题。在深入挖掘学科知识点的基础上,梳理各部分知识间的内在联系,使零散、孤立的知识交汇,编制成具有系统性、条理性的网络结构,使学生能够在解决问题时迅速地检索、提取和应用。

● **循序渐进,逐级提升** 遵循由浅入深、由易到难、由简到繁的原则,例题和习题都设置了科学、合理的梯度与坡度,能够兼顾不同层次和水平的学生,既要让一般学力水平的学生吃饱、吃好,又能使学有余力的学生跳跳脚够得着。

● **一种思想,万千气象** 各科既遵循统一的指导思想和编写理念,又根据各学科的特点和创编者的个性,在栏目设置、体例设计、布局谋篇上形成各自独特的风格,使各科分册呈现出异彩纷呈、百花争妍的态势,又自然和谐地组成一个有机的整体。

导学大课堂,高考的梦工场,期待你、我、他的共同参与!

编者
2006年4月



CONTENTS

目录

第一章 集合与简易逻辑	1
1.1 集合的概念与运算	1
1.2 逻辑联结词、四种命题及反证法	4
1.3 充要条件	8
第二章 函数	12
2.1 函数的概念	12
2.2 函数的表示	15
2.3 函数的单调性	18
2.4 函数的奇偶性	21
2.5 反函数	25
2.6 二次函数	28
2.7 指数与指数函数	32
2.8 对数与对数函数	35
2.9 函数的图象	38
2.10 函数的最值	42
2.11 函数的应用	46
第三章 数列	50
3.1 数列的概念	50
3.2 等差数列	53
3.3 等比数列	57
3.4 数列的应用	60
第四章 三角函数	65
4.1 任意角的三角函数	65
4.2 同角三角函数的基本关系与诱导公式	68
4.3 两角和与差的正弦、余弦、正切	72
4.4 二倍角的正弦、余弦、正切	75
4.5 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质	78
4.6 三角函数的应用	82
第五章 平面向量	87
5.1 向量的概念、向量的加法与减法、实数与向量的积	87
5.2 向量的数量积	90
5.3 两点间距离公式、线段的定比分点与图形的平移	93



5.4 解斜三角形	96
第六章 不等式	100
6.1 不等式的性质	100
6.2 不等式的证明	103
6.3 不等式的解法(一)	107
6.4 不等式的解法(二)	110
第七章 直线和圆的方程	113
7.1 直线的方程	113
7.2 两直线的位置关系	117
7.3 简单的线性规划	120
7.4 圆的方程	124
7.5 直线与圆的位置关系	128
第八章 圆锥曲线方程	132
8.1 椭圆	132
8.2 双曲线	136
8.3 抛物线	140
8.4 直线与圆锥曲线的位置关系	143
8.5 轨迹问题	148
第九章 直线、平面、简单几何体	152
9.1 平面、空间两条直线	152
9.2 直线与平面平行	156
9.3 直线与平面垂直	160
9.4 两个平面平行	163
9.5 两个平面垂直	167
9.6 空间向量及其坐标运算(B)	171
9.7 空间角	175
9.8 空间距离	179
9.9 棱柱与棱锥	183
9.10 球	188
第十章 排列、组合和二项式定理	192
10.1 分类计数原理、分步计数原理	192
10.2 排列	195





CONTENTS 目录

10.3 组合	198
10.4 二项式定理	201
第十一章 概率	205
11.1 随机事件的概率	205
11.2 互斥事件有一个发生的概率	208
11.3 相互独立事件同时发生的概率	211
第十二章 统计	215
12.1 抽样方法与总体分布的估计	215
12.2 总体期望值和方差的估计	218
第十三章 导数	222
13.1 导数的概念与运算	222
13.2 导数的应用	225
综合能力检测	228
参考答案	231





第一章 集合与简易逻辑

1.1 集合的概念与运算



感受高考

★★★★



考什么?

1. 集合中的元素有三个明显的特征:
(1) _____; (2) _____; (3) _____.
2. 元素与集合的关系: _____.
3. 集合与集合之间有三种关系:
(1) 子集(包含与被包含)定义: $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 任取 $x \in A \Rightarrow$ _____.
(2) 真子集定义: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 B 中至少有一元素 _____.
(3) 相等两集合: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 _____.
4. 集合的运算及交、并、补集.

怎么考?



1. [2007 全国高考卷 I, 文, 理] 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ()

- A. $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$
- B. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$
- C. $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$
- D. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

解析: $\because S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I, \therefore \complement_I (S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \emptyset$,
即 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$.

答案: C



考试要求

★★★★

1. 已知集合, 会判断某一个元素是否属于这个集合.
2. 已知两个集合, 会求这两个集合的交(并)集.
3. 已知一个集合, 会求这个集合的补集.
4. 已知两个集合 A, B , 会判断集合 A 是否是集合 B 的子集.



三点剖析

一、用集合的概念解题

【例1】设集合 $A = \{1, 3, x\}$, $B = \{1, x^2\}$ 且 $A \cup B = \{1, 3, x\}$, 求满足条件的实数 x 有多少个.

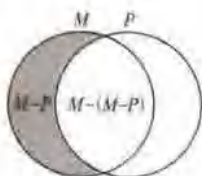
思维导引: 根据条件 $A \cup B = A$ 和 $B \subseteq A$, 结合集合的“三性”, 找出相等元素列出方程就可求出 x 的值.

解: 由 $A \cup B = \{1, 3, x\} = A \Rightarrow B \subseteq A$, $\therefore x^2 = 3$ 或 $x^2 = x$. 解得 $x = \pm\sqrt{3}$ 或 $x = 0$ 与 $x = 1$. 当 $x = 1$ 时, 与集合中元素的互异性矛盾, 所以满足条件的实数 x 有 3 个.

友情提示: 集合中元素具有确定性、互异性和无序性, 特别是互异性排除不具备条件的解是解题常用之方法. 集合运算性质应予重视 (如 $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$), 这是解题的关键.

二、用韦恩图解题

【例2】设 M, P 是两个非空集合, 定义 M 与 P 的差集为 $M - P = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin P\}$, 则 $M - (M - P)$ 等于 ()



- A. P B. $M \cap P$
C. $M \cup P$ D. M

思维导引: 将题中的 $M - P$ 用我们熟悉的交、并、补运算来表示, 根据差集定义, “ $x \in M$ 且 $x \notin P$ ”等价于 “ $x \in M \cap \complement_U P$ ”.

解析: 设全集为 U , 则 $M - P = M \cap \complement_U P$. 于是有 $M - (M - P) = M - (M \cap \complement_U P) = M \cap \complement_U (M \cap \complement_U P)$. 由韦恩图可得 $M - (M - P) = M \cap P$, 故选 B.

答案: B.

友情提示: 这是一道新定义的集合运算迁移题. 由于给出的新定义, 以及所解决的问题中的集合都是抽象的



各个击破

类题演练 1

已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 1\}$, 那么集合 $M \cap N$ 为 ()

- A. $x = 3, y = -1$ B. $\{3, -1\}$
C. $\{3, -1\}$ D. $\{(3, -1)\}$

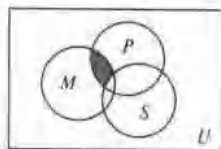
变式提升 1

2005 黄冈模拟 设 $A = \{-4, 2a - 1, a^2\}$, $B = \{9, a - 5, 1 - a\}$, 已知 $A \cap B = \{9\}$, 求实数 a 的值.

类题演练 2

如图, U 是全集, M, P, S 是 U 的 3 个子集, 则阴影部分所表示的集合是 ()

- A. $(M \cap P) \cap S$
B. $(M \cap P) \cup S$
C. $(M \cap P) \cap \complement_U S$
D. $(M \cap P) \cup \complement_U S$



变式提升 2

已知全集 $U = \{x | x \text{ 取不大于 } 30 \text{ 的质数}\}$, A, B 是 U 的两个子集, 且 $A \cap (\complement_U B) = \{5, 13, 23\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{11, 19, 29\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{3, 7\}$, 求 A 和 B .

集合,这时若类比于实数的运算,则得出错误结论,而用图示法,则有助于对新定义的理解.

三、集合中开、交、补的运算

【例】设全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{|2a - 1|, 2\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 求实数 a 的值.

思路导引: $\complement_U A = \{5\}$, 它说明了两层含义, 即 $5 \in U$ 且 $5 \notin A$, 这样解题的思路和方法就很明显了.

解: $\because \complement_U A = \{5\}, \therefore 5 \in U$ 且 $5 \notin A$.

$$\therefore a^2 + 2a - 3 = 5.$$

解得 $a = 2$ 或 $a = -4$.

当 $a = 2$ 时, $|2a - 1| = 3 \neq 5$;

当 $a = -4$ 时, $|2a - 1| = 9 \neq 5$, 但 $9 \in U, \therefore a = 2$.

友情提示: 由题设条件求得 $a = 2$ 或 $a = -4$ 后, 验证其是否符合隐含条件 $A \subseteq U$ 是必要的, 否则会把 $a = -4$ 也误认为是本题的答案. 集合是一种数学语言, 如果不能从这种语言中破译出它的全部意义, 就会出现失误.

类题演练

若集合 $M = \{y | y = 2^{-x}\}$, $N = \{y | y = (x - 1)^2\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

- A. $\{y | y > 1\}$ B. $\{y | y \geq 1\}$ C. $\{y | y > 0\}$ D. $\{y | y \geq 0\}$

变式提升

已知集合 $A = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = ax + 2, y \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的值.



基础达标

1 若集合 $M = \{y | y = x^{-1}\}$, $P = \{y | y = \sqrt{x-1}\}$, 那么 $M \cap P$ 等于 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$
C. $(0, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

2 设集合 $A = \{x | x \leq 2\sqrt{3}\}$, $a = \sqrt{11}$, 则 ()

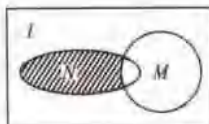
- A. $a \subseteq A$ B. $a \notin A$
C. $\{a\} \in A$ D. $\{a\} \subseteq A$

3 设 M, N, P 的三个集合, 则 $M \cap P = N \cap P$ 是 " $M = N$ " 的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分又不必要条件

4 设满足 $y \geq |x - 1|$ 的点 (x, y) 的集合为 A , 满足 $y \leq -|x| + 2$ 的点 (x, y) 的集合为 B , 则 $A \cap B$ 所表示图形的面积是

5 设全集 I 是实数集 $\mathbf{R}$, $M = \{x | x^2 > 4\}$ 与 $N = \{x | \frac{2}{x-1} \geq 1\}$ 都是 I 的子集 (如右上图所示), 则阴影部分所表示的集合为



6 设集合 $A = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{x | x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 若 $a \in A, b \in B$, 试判断 $a + b$ 与集合 A, B, C 的关系.



- 7 已知 $A = \{x | x^2 + (m+2)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

- 8 设集合 $A = \{(x, y) | 2x + y = 1, x, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | a^2x + 2y = a, x, y \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的值.

若集合 B 中每个元素都有原象, 则集合 B 中的元素个数是_____个.

- 11 **2004 东北三校第一次联考** 已知集合 $A = \{x | (\frac{1}{2})^{x^2-x-6} < 1\}$, $B = \{x | \log_2(x+a) < 1\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.



综合训练

- 9 **2006 四川成都一诊, 文 12** 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 + px + q < 0\}$ 满足 $A \cap B = \{x | -1 \leq x < 2\}$, 则 p 与 q 的关系为 _____ ()
 A. $p - q = 0$ B. $p + q = 0$
 C. $p + q = -5$ D. $2p + q = -4$
- 10 **2004 西城检测** 设集合 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 k 映射到 B 中的元素 $|k|$, 则在映射 f 下, -2 的象是_____;



拓展探究

- 12 已知集合 $A = \{x | 2^{x^2-4x+2} = 1\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, $C = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, $A \cap C = C$, 求实数 a 及 m 的值或范围.

1.2 逻辑联结词、四种命题及反证法



复习准备



感受高考



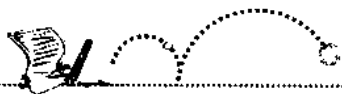
考什么?

1. _____ 叫命题.
 2. 逻辑联结词有 _____, 可与集合的“并”“交”“补”沟通理解.

怎么考?



- 1 **2004 湖北高考, 理 15** 设 A, B 为两个集合, 下列四个命题:
 ① $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \in B$; ② $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$; ③ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \supseteq B$; ④ $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \in B$.



3. 不含逻辑联结词的命题叫_____；
由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫_____。复合命题有三种形式：_____。

4. 判断复合命题的真假(真值表)

5. 四种命题的形式。

6. 反证法就是依据于_____。

其中真命题的序号是_____。(把符合要求的命题序号都填上)

解析：对①，设 $A=\{2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ ，满足 $A \subseteq B$ ，但 $3 \in A$ 且 $3 \in B$ ，排除①；

对②，根据①中 $A \cap B = \{3,4\} \neq \emptyset$ ，排除②；

对③，设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3\}$ ， $\therefore A \subseteq B \Leftrightarrow A \supseteq B$ ，排除③；由子集的定义知④正确。

答案：④



1. 已知命题，会判断真假。
2. 已知命题，能写出此命题的四种命题，并会判断真假。
3. 已知命题，会用逆否命题来判断原命题的真假。



一、理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义

【例1】分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题：

(1) $x=2$ 或 $x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根；

(2) π 是大于 3 的无理数；

(3) 直角不等于 90° 。

思路导引：先找出复合命题中的“非”“且”“或”，若没有，则自己填进逻辑联结词即可。

解：(1) 这个命题是 p 或 q 的形式。其中 p : $x=2$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根， q : $x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根。

(2) 这个命题是 p 且 q 的形式。其中 p : π 大于 3， q : π 是无理数。

(3) 这个命题是非 p 形式，其中 p : 直角等于 90° 。

友情提示：有的复合命题字面上没有出现逻辑联结词，要从它的结构本质上分析，填进有关逻辑联结词就变得一目了然了。如命题(2)没合逻辑联结词，但它含有两层意义：一是 π 大于 3；二是 π 是无理数。这两层意义

类题演练 1

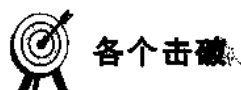
分别指出由下列命题构成的“ p 或 q ”“ p 且 q ”“非 p ”形式的复合命题的真假。

(1) p : 1 是奇数， q : 1 是质数；

(2) p : $0 \in \emptyset$ ， q : $\{x | x^2-3x-5 < 0\} \subseteq \mathbb{R}$ 。

变式提升 1

已知两个命题， p : 方程 $x^2+1=0$ 的两根为复数， q : 方程 $x^2+1=0$ 的两根相等。试写出这组命题构成的“ p 或 q ”“ p 且 q ”“非 p ”形式的复合命题，并判断它们的真假。



可以用逻辑联结词“且”连结.对于含有“不”字的命题,一般都可以看作非 p 命题.

二、利用四种命题的关系判断一个命题的真假

【例1】写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题,并判断其真假.

- (1)全等三角形一定相似;
(2)末位数字是零的自然数能被5整除.

思路导引:解此题关键是分清原命题的条件和结论.命题(1)的题设是全等三角形,结论是相似三角形.命题(2)的题设是自然数的末位数字是零,结论是自然数能被5整除.

解:(1)逆命题:若两个三角形相似,则一定全等.逆命题为假.

否命题:若两个三角形不全等,则一定不相似.否命题为假.

逆否命题:若两个三角形不相似,则一定不全等.逆否命题为真.

(2)逆命题:若一个自然数能被5整除,则末位数字是零.逆命题为假.

否命题:若一个自然数的末位数字不是零,则不能被5整除.否命题为假.

逆否命题:若一个自然数不能被5整除,则末位数字不是零.逆否命题为真.

友情提示:逆命题是将条件与结论对调,否命题是对条件的否定和对结论的否定,逆否命题即将条件和结论对调又对其进行否定.

三、运用反证法证明

【例2】设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 中的 a, b, c 均为整数,且 $f(0), f(1)$ 均为奇数,求证:方程 $f(x) = 0$ 无整数根.

思路导引:用反证法证明数学问题,首先要反设,即假设结论的反面成立.本题的反设为:假设方程有整数根.

证明:设方程 $f(x) = 0$ 有一个整数根 k , 则 $ak^2 + bk = -c$. ①

又 $f(0) = c, f(1) = a + b + c$ 均为奇数,所以 $a + b$ 是偶数.

当 k 为偶数时, $-c = ak^2 + bk$ 为偶数,与已知 $f(0) = c$ 是奇数矛盾.

类题演练

写出下列命题的否定形式及命题的否命题,并分别判断它们的真假.

- (1)面积相等的三角形是全等三角形;
(2)有些质数是奇数.

变式提升

判断下列命题的真假,并写出它们的逆命题、否命题、逆否命题并判断其真假.

- (1)若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$;
(2)若在二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, $b^2 - 4ac < 0$, 则该函数的图象与 x 轴有交点.

类题演练

已知 x 为实数, $a = x^2 + \frac{1}{2}, b = 2 - x, c = x^2 - x + 1$, 用反证法证明 a, b, c 中至少有一个不小于1.

变式提升

若下列三个关于 x 的方程: (1) $x^2 - ax + 4 = 0$,

当 k 为奇数时, 设 $k=2n+1 (n \in \mathbb{Z})$, 则 $-c=ak^2+bk=(2n+1)(2na+a+b)$ 为偶数, 也与已知 $f(0)=c$ 是奇数矛盾.

所以方程 $f(x)=0$ 无整数根.

友情提示 关于反证法证明命题“若 p 则 q ”的步骤:(1)否定欲证结论, 假设它的反面成立;(2)进行正确推理, 推出矛盾;(3)矛盾的出现说明结论的反面不成立, 从而得出原结论成立.

$$(2) x^2 + (a-1)x + 16 = 0.$$

(3) $x^2 + 2ax + 3a + 10 = 0$ 中至少有一个方程有实根, 求实数 a 的取值范围.



基础达标

1. 给出两个命题: $p: |x|=x$ 的充要条件是 x 为正实数; q : 存在反函数的函数一定是单调函数, 则下列复合命题中真命题是...
 A. p 且 q B. p 或 q
 C. 非 p 且 q D. 非 p 或 q
2. 对命题 $p: A \cap B = \emptyset$, 命题 $q: A \cup B = A$, 下列说法正确的是...
 A. p 且 q 为假 B. p 或 q 为假
 C. 非 p 为真 D. 非 p 为假
3. 已知命题 p, q , 则“命题 p 或 q 为真”是“命题 p 且 q 为真”的...
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
4. “ $\tan \alpha \neq \tan \beta$ ”的_____条件是“ $\alpha \neq \beta$ ”.
5. 命题 p 的逆命题 q , 命题 q 的逆否命题 r , 命题 p 的逆否命题为 s , 则 r 是 s 的_____命题.
6. 判断下列命题的真假:
 (1) 命题“若 $ab=0$, 则 $b=0$ ”的否命题;
 (2) 命题“若 $a \neq 0$, 且 $b \neq 0$, 则 $ab \neq 0$ ”的逆否命题;
 (3) 命题“若 $a=0$ 或 $b=0$, 则 $a^2+b^2=0$ ”的逆否命题.

7. 写出命题“已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 若关于 x 的不等式 $x^2+ax+b \leq 0$ 有非空解集, 则 $a^2 \geq 4b$ ”的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断它们的真假.

8. 已知非零实数 a, b, c 两两不相等, 求证: 若 $2b=a+c$, 则 $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ 不成立.