北京市高中数学补充教材

不等式

SHUXUE

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京市高中数学补充教材

不等式

SHUXUE

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心 编

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

北京市高中数学补充教材

BUDENGSHI

不 等 式

北京教育科学研究院基础教育教学研究中心　编

首都师范大学出版社出版发行

地　　址　北京西三环北路 105 号

邮　　编　100037

电　　话　68418523（总编室）　68982468（发行部）

网　　址　www.cnup.cnu.cn

E-mail　cnup@mail.cnu.edu.cn

北京飞达印刷有限责任公司印刷

全国新华书店发行

版　　次　2006 年 6 月第 1 版

印　　次　2006 年 6 月第 1 次印刷

开　　本　890mm×1240 mm　1/32

印　　张　3.125

字　　数　100 千

定　　价　4.00 元

前　言

高中数学是义务教育后普通高中的一门主要课程，应使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习所必需的基础知识、基本技能、基本思想和方法，培养实践能力和创新精神。

为全面提高我市高中数学学科的教学质量，全面推进素质教育，经北京市教委领导批准，北京教科院基教研中心中学数学教研室组织编写了这套高中数学补充教材，供高中数学教师和学生在教与学时参考使用。

这套补充教材力求体现课程改革的精神和要求，以《全日制普通高级中学数学教学大纲》为依据，针对高中数学的重点或难点章节及专题选编内容，既注重知识的系统性、深刻性，又加强了选择性，并适当充实了一些必要的内容，以体现高考改革的要求。教师可根据学生的实际情况和教学需要，在必修课、选修课或课外活动中选择使用。

《北京市高中数学补充教材》主编曹福海，副主编郭立昌、刘美伦。《不等式》一册的编者有：明知白、蒋佩锦、王人伟、刘美伦（兼统稿）。

在编写过程中，我们进行了多次研究讨论，吸收了许多教师宝贵的教学经验，力求既有利于教师教，又有利于学生学。由于我们水平有限，定会有许多不足之处，衷心期望使用本册教材的教师与学生提出宝贵意见。

编　者

2003 年 3 月

目　录

第一章　不等式的性质

1.1　不等式的概念

初中我们已经学过了“$>$”、“$<$”、“$\neq$”这些不等号，并且知道，用不等号表示的不等关系的式子叫做**不等式**．例如：

$$x^2<0, \quad ①$$

$$2x+2<x+4, \quad ②$$

$$\frac{x-1}{x+2}>1, \quad ③$$

$$|x|+1>\frac{1}{2}, \quad ④$$

$$\lg x<\lg 2x. \quad ⑤$$

我们还见到过符号“$\geqslant$”、“$\leqslant$”．其中“$\geqslant$”表示“大于或等于”，即“不小于”；“$\leqslant$”表示“不于或等于”，即“不大于”．并且知道，$3\geqslant 2$，$2\geqslant 2$，$4\leqslant 5$ 都是真命题．一般来说，只要断定 $a>b$，$a=b$ 中有一个成立，就可以断定 $a\geqslant b$ 成立．

不等式成立总是要依赖一定条件的，由此可以把不等式分成三类．

对于不等式 $f(x)>g(x)$[或 $f(x)<g(x)$]，设使 $f(x)$，$g(x)$ 有意义的 x 的取值集合分别为 F，G，又记 $D=F\cap G$，并且 $D\neq\varnothing$．

如果使 $f(x)>g(x)$[或 $f(x)<g(x)$] 成立的 x 的取值集合正好是 D，那么称 $f(x)>g(x)$[或 $f(x)<g(x)$] 为**绝对不等式**．例如上面例中的④、⑤．$5>4$，$-\frac{1}{2}<-\frac{1}{4}$ 等也是绝对不等式．

如果使 $f(x)>g(x)$[或($f(x)<g(x)$]成立的 x 的取值集合是空集，那么称 $f(x)>g(x)$[或 $f(x)<g(x)$]为**矛盾不等式**. 例如上面例中的①. $2>3$，$\frac{1}{2}<-5$ 等也是矛盾不等式.

如果使 $f(x)>g(x)$[或 $f(x)<g(x)$]成立的 x 的取值集合是 D 的非空真子集，那么称 $f(x)>g(x)$[或 $f(x)<g(x)$]为**条件不等式**. 例如上面例中的②、③.

判断不等式是否成立的基础是两个实数比较大小. 请回忆两个实数比较大小的方法.

在初中，我们运用的是几何方法. 由于实数与数轴上的点是一一对应的，因此在数轴上不同的两点中，可以由点的位置关系来判定它们表示的实数的大小. 例如，在图 1-1 中，点 A 表示实数 a，点 B 表示实数 b，点 A 在点 B 右边，那么 $a>b$.

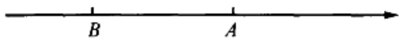

图 1-1

两个实数 a，b 比较大小的代数方法是什么呢？它的根据是什么呢？

再看图 1-1，$a>b$ 表示 a 减去 b 所得的差是一个大于 0 的数(正数)，即

如果 $a>b$，那么 $a-b>0$. 其逆命题也正确.

同样，如果 $a<b$，那么 $a-b<0$；如果 $a=b$，那么 $a-b=0$. 它们的逆命题都正确.

这样，就得到了：

$$\boxed{\begin{array}{l} a>b \Leftrightarrow a-b>0; \\ a=b \Leftrightarrow a-b=0; \\ a<b \Leftrightarrow a-b<0. \end{array}}$$

由此可见，要比较两个实数的大小，只要先取其差，再考查所得差的正、负就可以了. 这种方法称为“取差问号”法，它把实数的大小顺序与实数的运算、符号联系到了一起.

例 1 比较 $(2x+5)(2x-1)$ 与 $4(x+1)^2$ 的大小.

解：因为 $(2x+5)(2x-1)-4(x+1)^2$

$=(4x^2+8x-5)-(4x^2+8x+4)$

$=-9<0$，

所以 $(2x+5)(2x-1)<4(x+1)^2$.

例 2 比较 $(4a+3)(2a-5)$ 与 $(4a+5)(2a-3)$ 的大小.

解：因为 $(4a+3)(2a-5)-(4a+5)(2a-3)$

$=(8a^2-14a-15)-(8a^2-2a-15)$

$=-12a$，

又当 $a>0$ 时，$-12a<0$；$a=0$ 时，$-12a=0$；$a<0$ 时，$-12a>0$.

所以，当 $a>0$ 时，$(4a+3)(2a-5)<(4a+5)(2a-3)$；

当 $a=0$ 时，$(4a+3)(2a-5)=(4a+5)(2a-3)$；

当 $a<0$ 时，$(4a+3)(2a-5)>(4a+5)(2a-3)$.

说明：这里取差后经计算得 $-12a$，其正、负情况由 a 决定，而 a 的正、负情况又分三类：$a>0$，$a=0$，$a<0$. 作分类讨论必须做到不重不漏.

有时也把 $a>0$，$a=0$ 两种情况，缩写成 $a\geqslant 0$.

练习 1-1

1. 求使下列不等式两边的式子都有意义的 x 的取值集合：

(1) $\frac{1}{2}x+3>\sqrt{2}x^2-x$；

(2) $\frac{x}{x-1}+x<\frac{3}{x+2}-2x$；

(3) $\sqrt{2x-3}\geqslant\sqrt{8-2x}$；

(4) $\lg x^2+\lg(1-x)\leqslant\lg(2-x)$.

2. 比较 $(x+4)(x-2)$ 与 $(x+5)(x-3)$ 的大小.

3. 已知 $a\neq 0$，比较 a^4+a^2+1 与 $(a^2+1)^2$ 的大小.

4. 比较 $2\sqrt{m}-3)^2$ 与 $(4\sqrt{m}-3)(\sqrt{m}-3)$ 的大小.

5. 比较$\frac{2x^2+1}{x^2+1}$与 $2-\frac{x+1}{x^2+1}$的大小.

6. 已知 $p\neq 0$，比较 $(p^2+\sqrt{2}p+1)(p^2-\sqrt{2}p+1)$ 与 $(p^2+p+1)\cdot(p^2-p+1)$ 的大小.

1.2 不等式的性质

无论解不等式还是不等式的证明都需要对不等式作出适当的变形，为了给这种变形提供理论依据，下面来学习不等式的性质.

请思考，应该建立哪些不等式的性质？它们的正确性又如何证明？

性质 1 如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$，即

$$\boxed{a>b \Leftrightarrow b<a.}$$

证明：由正数的相反数是负数，负数的相反数是正数，得

$$a>b\Rightarrow a-b>0\Rightarrow -(a-b)<0$$
$$\Rightarrow b-a<0\Rightarrow b<a.$$
$$b<a\Rightarrow b-a<0\Rightarrow -(b-a)>0$$
$$\Rightarrow a-b>0\Rightarrow a>b.$$

性质 1 在“$a>b$”与“$b<a$”这两个“异向不等式”之间建立起了等价关系. 此后不等式的性质只需对“$>$”作研究.

性质 2 如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$，即

$$\boxed{a>b,\ b>c \Rightarrow a>c.}$$

证明：由两个正数的和仍为正数，得

$$a>b,\ b>c \Rightarrow a-b>0,\ b-c>0$$
$$\Rightarrow (a-b)+(b-c)>0$$
$$\Rightarrow a-c>0$$
$$\Rightarrow a>c.$$

由性质 2，性质 1，有

$$c<b,\ b<a\Rightarrow c<a.$$

性质 2 告诉我们，两个实数 a，c 比较大小，可以通过 b 间接比大小. 应注意 $a>b$，$b>c$ 仅是 $a>c$ 的充分条件，而非必要条件.

下面来研究对于给出的一个不等式 $a>b$，对其可能进行的等价变换的依据. 请思考，应该是什么？

性质 3　如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$；如果 $a+c>b+c$，那么 $a>b$，即

$$\boxed{a>b \Leftrightarrow a+c>b+c.}$$

性质 4　当 $c>0$ 时，

如果 $a>b$，那么 $ac>bc$；

如果 $ac>bc$，那么 $a>b$，即

$$\boxed{\text{当 } c>0 \text{ 时，} a>b \Leftrightarrow ac>bc.}$$

性质 5　当 $c<0$ 时，

如果 $a>b$，那么 $ac<bc$；

如果 $ac<bc$，那么 $a>b$，即

$$\boxed{\text{当 } c<0 \text{ 时，} a>b \Leftrightarrow ac<bc.}$$

性质 6　当 $a>0$，$b>0$，$n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1$ 时，

如果 $a>b$，那么 $a^n>b^n$；

如果 $a^n>b^n$，那么 $a>b$，即

$$\boxed{\text{当 } a>0,\ b>0,\ n\in\mathbf{N} \text{ 且 } n>1 \text{ 时，} a>b \Leftrightarrow a^n>b^n.}$$

请同学们自己完成性质 3、性质 4、性质 5 的证明.

性质 6 的证明可自己完成，也可以参考以下证法：

由性质 4 及指数函数的单调性，得

$$\left.\begin{array}{r} a>0,\ b>0,\ a>b\Rightarrow \dfrac{a}{b}>1 \\ \text{又 } n>1>0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^n>\left(\frac{a}{b}\right)^0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^n>1$$

$$\Rightarrow\frac{a^n}{b^n}>1$$

$$\Rightarrow a^n>b^n.$$

再用反证法证明其逆命题的正确性：

假定正数 a 不大于正数 b，则有 $a<b$ 或 $a=b$.

由前已证明的性质及性质 1，当 $a<b$ 时，有 $a^n<b^n$；当 $a=b$ 时，有 $a^n=b^n$.

这些都与已知 $a^n>b^n$ 相矛盾.

因此，$a>b$.

性质 3，4，5，6 提供了对一个不等式作等价变换的依据，其中涉及加、减、乘、除、乘方、开方诸种运算. 运用时，要注意有关的附加条件.

由性质 3 可以得到：

$$a+b>c \Leftrightarrow a>c-b.$$

也就是说，**不等式中任意一项改变符号后，可以把它从一边移到另一边.**

最后来研究对于给出的两个不等式进行变换的依据.

性质 7 如果 $a>b$，且 $c>d$，那么 $a+c>b+d$，即

$$\boxed{\begin{cases} a>b, \\ c>d \end{cases} \Rightarrow a+c>b+d.}$$

性质 8 如果 $a>b$，且 $c<d$，那么 $a-c>b-d$，即

$$\boxed{\begin{cases} a>b, \\ c<d \end{cases} \Rightarrow a-c>b-d.}$$

性质 9 如果 $a>b>0$，且 $c>d>0$，那么 $ac>bd$，即

$$\boxed{\begin{cases} a>b>0, \\ c>d>0 \end{cases} \Rightarrow ac>bd.}$$

以上三个性质的证明可以有多种方法，既可以直接用“取差问号”法，也可以运用前面已经得到的不等式性质作证明，大家不妨一试.

下面仅写出性质 9 的两种证法，供参考.

证法 1：

$$ac-bd=ac-bc+bc-bd$$
$$=c(a-b)+b(c-d),$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{又 } a>b\Rightarrow a-b>0,\\ c>d\Rightarrow c-d>0,\\ \text{又 } c>0, b>0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}c(a-b)>0,\\ b(c-d)>0\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow c(a-b)+b(c-d)>0$$
$$\Rightarrow ac-bd>0$$
$$\Rightarrow ac>bd.$$

证法 2：

$$\left.\begin{array}{l}a>b,\ c>0\Rightarrow ac>bc,\\ c>d,\ b>0\Rightarrow bc>bd\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd.$$

请思考：

（1）性质 7，8，9 的逆命题是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，举出反例.

（2）请把性质 7，9 推广到三个不等式，四个不等式，…，n 个不等式的情形，并写出推广后得到的结果.

例 1 判断下列各命题的真假，并说明理由：

（1）如果 $a<b$，那么 $a-c<b-c$；

（2）如果 $a>b$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

（3）如果 $a<b<0$，那么 $a^2>b^2$；

（4）如果 $ac^2>bc^2$，那么 $a>b$；

（5）如果 $a>b$，$e>f$，$c>0$，那么 $a-cf>b-ce$.

解：（1）真命题. 由性质 1，3 可知它是真命题.

（2）假命题. 取 $a=3$，$b=-2$，满足 $a>b$，但是 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

（3）真命题. $a<b<0\Rightarrow(-a)>(-b)>0\Rightarrow(-a)^2>(-b)^2\Rightarrow a^2>b^2$.

（4）真命题. 注意 $ac^2>bc^2$ 成立，隐含着 $c\neq0$，所以 $c^2>0$. 两边都同乘正数 $\frac{1}{c^2}$ 得 $a>b$.

(5) 真命题. $\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}e>f,\\ c>0\end{array}\right\}\Rightarrow ce>cf\\ \qquad\qquad \text{又 } a>b\end{array}\right\}\Rightarrow a-cf>b-ce.$

例 2 已知 $a<b<0$，$c<d<0$，求证$\frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$.

证明： $\left.\begin{array}{l}a<b<0\Rightarrow(-a)>(-b)>0\\ c<d<0\Rightarrow(-c)>(-d)>0\end{array}\right\}$

$\Rightarrow(-a)(-c)>(-b)(-d)$

$\Rightarrow ac>bd.$

两边同乘正数$\frac{1}{abcd}$，得

$$\frac{1}{bd}>\frac{1}{ac},$$

所以 $\frac{1}{ac}<\frac{1}{bd}$.

练习 1-2

1. 证明不等式的性质 3，4，5，7，8.
2. 判断下列各命题的真假，并说明理由：
   (1) 如果 $a>b$，那么 $b-c<a+c$；
   (2) 如果 $a>b$，那么 $ac^2>bc^2$；
   (3) 如果 $a>b>0$，$c<0$，那么$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$；
   (4) 如果 $a^3<-4$，那么 $a^4>-4a$.
3. 用"能"或"不能"回答下列问题. 若回答能，给出证明；若回答不能，举出反例.
   (1) 如果 $a>b$，$c<d$，能否断定 $a+c$ 与 $b+d$ 谁大谁小？
   (2) 如果 $a<b$，$c<d$，能否断定 ac 与 bd 谁大谁小？
   (3) 如果 $a>b>c$，$n\in\mathbf{N}_+$，能否断定 $(a-b)^n$ 与 $(b-c)^n$ 谁大谁小？
   (4) 如果 $a<b<0$，$c<d<0$，能否断定 $\sqrt{ac}$与 $\sqrt{bd}$谁大谁小？
4. 利用不等式的性质证明：
   (1) 若 $a>b$，$ab<0$，则$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；

(2) 若 $a>b$，$c<d$，则 $3a+2d>3b+2c$；

(3) 若 $a>b>0$，$c<d<0$，则 $ac<bd$.

习 题 一

A 组

1. 设 $a\neq 1$，比较 $3a^2+2a-5$ 与 $(2a-2)(a+3)$ 的大小.

2. 设 $x\neq 0$，比较 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 与 $(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$ 的大小.

3. 设 $t>-1$，比较 $1-t$ 与 $\frac{1}{1+t}$ 的大小.

4. 比较 $(3x+2)(2x-1)$ 与 $(2x+2)(3x-4)$ 的大小.

5. 比较 p^3-1 与 p^2-p 的大小.

6. 求证：

   (1) 如果 $a>b$，$e>f$，$c>0$，那么 $f-ac<e-bc$；

   (2) 如果 $a>b>0$，那么 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$；

   (3) 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$；

   (4) 如果 $0<x<y<a<1$，那么 $\log_a(xy)>2$.

7. 已知 $a+b>0$，$b<0$，试把 a，$-a$，b，$-b$ 按从小到大的顺序排列起来.

8. 给出命题："若 $a>b>0$，则 $\lg a^4>\lg b^4$".

   (1) 证明以上命题的正确性；

   (2) 以上命题的逆命题是什么？正确吗？

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，对于满足 $a+b>0$ 的任意实数 a，b，证明 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$.

*10. 如果 $12<a<60$，$15<b<36$，求 $a+b$，$2a-b$ 及 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

B 组

1. 设 $a>0$，$b>0$，$a\neq b$，试比较$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{a^2}$与 $a+b$ 的大小.

2. 若 $a=(x+1)(x+2)$，$b=(3-x)(x+6)$，求证 $3^{-a}<3^{b}$.

3. 设 α 为第一象限角，$a=\frac{1}{2}\tan\alpha$，$b=\tan\frac{\alpha}{2}$，试比较 a，b 的大小.

4. 给出三个不等式：①$ab>0$；②$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$；③$bc>ad$.

   以其中两个不等式为条件，剩下的一个不等式为结论构成的命题中，有几个真命题？写出所有的真命题，并给以证明.

5. 已知函数 $\frac{f(x)}{x}$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数，对于任意正数 a，b，求证：$f(a+b)<f(a)+f(b)$.

第二章　不等式的解法

我们已经学习过一元一次不等式、一元二次不等式和简单的绝对值不等式的解法．本章将继续学习另外一些类型的不等式的解法．

与解方程相类似，解不等式的基本思路是要通过等价变形，把它转化为一元一次不等式（组）或一元二次不等式（组）来求解．由于不等式的解集一般都是无限集，很难用检验的方法剔除增根，因此，解不等式内容的学习要加强对怎样进行等价变换以及依据是什么的思考．

2.1　含绝对值的不等式

例1　解不等式 $|x^2-3x-1|<3$.

分析：解含绝对值的不等式，其基本思路是经过等价变形，转化成不含绝对值的不等式．其转化的依据有：

（1）$a\in\mathbf{R}$，则 $|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

（2）当 $a>0$ 时，

$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a\Leftrightarrow x^2<a^2$；

$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a\Leftrightarrow x^2>a^2$.

解：原不等式 $\Leftrightarrow -3<x^2-3x-1<3$，

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x-1>-3, & ①\\ x^2-3x-1<3. & ②\end{cases}$$

解不等式①，得解集

$\{x\mid x<1$ 或 $x>2\}$.

解不等式②，得解集