· 经济数学基础 ·

# 概率论与数理统计

姚孟臣 主编

中国人民大学出版社

·经济数学基础·

# 概率论与数理统计

姚孟臣　主编

中国人民大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/姚孟臣主编.
北京：中国人民大学出版社，2006
(经济数学基础)
ISBN 7-300-07699-8

Ⅰ.概…
Ⅱ.姚…
Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材
Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 124781 号

经济数学基础
**概率论与数理统计**
姚孟臣　主编

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 中国人民大学出版社 | | |
| **社　　址** | 北京中关村大街 31 号 | **邮政编码** | 100080 |
| **电　　话** | 010—62511242 (总编室) | | 010—62511398 (质管部) |
| | 010—82501766 (邮购部) | | 010—62514148 (门市部) |
| | 010—62515195 (发行公司) | | 010—62515275 (盗版举报) |
| **网　　址** | http://www.crup.com.cn | | |
| | http://www.ttrnet.com(人大教研网) | | |
| **经　　销** | 新华书店 | | |
| **印　　刷** | 北京东君印刷有限公司 | | |
| **规　　格** | 170 mm×228 mm　16 开本 | **版　　次** | 2006 年 12 月第 1 版 |
| **印　　张** | 13.25　插页 1 | **印　　次** | 2006 年 12 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 263 000 | **定　　价** | 18.00 元 |

# 总　　序

随着教学改革的不断深入和办学规模的扩大，我国各高校经济与管理类专业的学生情况、不同专业对公共数学基础课的要求都有很大变化，教学内容的更新、教学课时量的调整都对数学基础课的教学工作和教材建设提出了新的要求。与此同时，全国硕士研究生入学统一考试的规模不断扩大，其中数学考试对于高校公共数学基础课的影响也愈来愈大。对于许多院校经济与管理类专业而言，经过多年调整，实际教学大纲与经济类研究生入学统一考试的考试大纲所涉及的内容已日趋一致。经济数学基础系列丛书正是适应我国高校经济和管理类专业教学改革的新形势、新变化，适时推出的一套教材。全套教材分为五个分册：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《实用运筹学》和《高级经济数学教程》。

本套教材具有以下特点：作为经济和管理类专业公共数学基础课的主干课程，《微积分》分册、《线性代数》分册、《概率论与数理统计》分册的编写大纲，融括了目前各高校经济和管理类专业普遍采用的教学大纲和教育部颁布的经济类研究生入学统一考试考试大纲所要求的范围；突出了对其中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法的介绍和训练；内容完整紧凑，难度适中，便于组织教学，能够在规定的课时内达到各个专业对公共数学基础课教学的基本要求和目的。

考虑到一些经济和管理类专业对公共数学基础课有更高的要求和分级教学的需要，本套教材推出了《高级经济数学教程》分册，该书将为相关专业的学生提供更多面向经济学的高等数学知识。另外，作为高等数学知识的进一步延伸和扩展，本套教材同时推出了《实用运筹学》分册，该书将为经济和管理类专业提供数学在经济和管理中应用的实用知识，并同时介绍相关的计算机应用软件。

本套教材还有一个重要特点是，基础课教材每个分册都配套推出学习辅导书。辅导书主要通过精选典型例题，对教材的每个章节进行系统的归纳总结、说明重点难点、进行答疑解惑，其中包括对教材中多数习题提供解答，以便于学生自习。另一方面，《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》三个分册还要着重对教材中的题目类型做必要的补充，增加相当数量的研究生入学考试试题题型，力求在分析问题和综合运用知识解决问题的能力培养方面，帮助学生实现跨越，达到并适应经济类全国硕士研究生入学考试对数学的要求。因此，这三个分册完全具备硕士研究生入学考试数学复习参考书的功能，将在读者日后备考研究生时发挥积极作用。

经济数学基础丛书的编写人员由中国人民大学、北京大学、清华大学的专家、教授组成，绝大多数编者具有20年以上从事经济数学研究和公共基础课教学的工作经历，还有许多人从事过多年研究生入学考试数学考前辅导工作，有相当高的知名度。因此，作者在把握经济和管理类公共数学基础课程的教学内容和要求、课时安排和难易程度，以及教学与考研之间的协调关系等方面均具有丰富的经验，这为本套教材的编写质量提供了非常可靠的保障。

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断的磨练和广大读者的支持与帮助，我们热诚欢迎广大读者在使用过程中对本套教材存在的错误和不足之处提出批评和建议。

经济数学基础丛书编写组

2006年10月

# 目　录

# 第 1 章　随机事件及其概率

概率论是从数量上研究随机现象统计规律性的一门数学学科，其应用非常广泛，是科技、管理、经济等领域的工作者必备的数学工具. 本章将向大家介绍概率论中的几个基本概念，随机事件的基本关系与基本运算，以及概率的性质及其计算方法.

## §1.1　随机事件

### 一、随机现象与随机试验

在客观世界中存在着两类不同的现象：一类称为**确定性现象**，另一类称为**随机现象**.

所谓**确定性现象**，是指在一定的条件下必然发生或必然不发生的现象. 例如，在一个标准大气压下，纯净的水加热到 100℃ 时必然会沸腾；从 10 件产品(其中 2 件是次品，8 件是正品)中，任意地抽取 3 件进行检验，这 3 件产品绝不会全是次品；向上抛掷一枚硬币必然下落，等等. 这些都是确定性现象. 这类现象的一个共同点是事先可以断定其结果.

所谓**随机现象**，是指在一定的条件下，具有多种可能发生的结果的现象. 例如，从 10 件产品(其中 2 件是次品，8 件是正品)中，任取 1 件出来，可能是正品，也可能是次品；向上抛掷一枚硬币，落下以后可能是正面朝上，也可能是反面朝上；将要出生的婴儿可能是男性，也可能是女性. 这类现象的一个共同点是事先不能预知多种可能结果中究竟出现哪一种.

人们在研究客观现象时都离不开对其进行观察(测)或进行实验. 为了简便起见，我们把对某现象或对某事物的某个特征的观察(测)，以及各种各样的科学实验，统称为**试验**. 为了研究随机现象，同样需要进行试验. 人们经过长期实践和深入研究以后发现，对于随机现象来说，尽管就个别的实验或观测而言，究竟会出现什么样的结果不能事先断定，即随机现象有不确定性的一面；但是当我们对随机现象进行大量重复实验或观测时就会发现，各种结果的出现都具有某种固有的规律性.

例如，在相同的条件下，多次抛掷同一枚硬币，就会发现“出现正面”和“出现反面”的次数大约各占总抛掷次数的 1/2 左右. 又如掷一枚骰子可能出现 1 点，2 点，…，6 点，掷一次时不能预先断定出现几点，但多次重复后就会发现它的规律性，即出现 1，2，…，6 点的次数大约各占 1/6 左右.

由以上的例子可以看出，随机现象具有两重性：表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性. 随机现象的偶然性又称为它的随机性. 在一次实验或观察中，结果的不确定性就是随机现象随机性的一面；在相同的条件下进行大量重复实验或观察时呈现出来的规律性是随机现象必然性的一面，称随机现象的必然性为**统计规律性**. 概率论就是研究随机现象统计规律性的一门科学.

为了获得随机现象的统计规律，必须在相同的条件下，大量重复地做试验. 在概率统计中，把这类试验称为**随机试验**，它具有下述三点特性：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果在试验前是明确的，而每次试验必有其中的一个结果出现，并且也仅有一个结果出现；

(3) 每次试验的可能结果不止一个，而究竟会出现哪一个结果，在试验前不能准确地预知.

随机试验也简称**试验**，一般用字母 $E$ 或 $E_1, E_2$ 等表示.

## 二、样本空间

在随机试验中，每一个可能出现的不再分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**，用 $\omega$ 表示；而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，记为 $\Omega$.

**例 1** 设 $E_1$ 为抛掷一枚匀称的硬币，观察正、反面出现的情况. 记 $\omega_1$ 是出现正面，$\omega_2$ 是出现反面. 于是，$\Omega$ 由两个基本事件 $\omega_1, \omega_2$ 构成，即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$.

**例 2** 设 $E_2$ 为掷一枚骰子，观察出现的点数. 记 $\omega_i$ 为出现 $i$ 个点($i=1,2,\cdots,6$). 于是，有 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$.

**例 3** 设 $E_3$ 为从 10 件产品(其中 2 件次品，8 件正品)之中任取 3 件，观察其中次品的件数. 记 $\omega_i$ 为恰有 $i$ 件次品($i=0,1,2$)，于是，$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$.

**例 4** 设 $E_4$ 为在相同条件下接连不断地向同一个目标射击，直到第一次击中目标为止，观察射击的次数. 记 $\omega_i$ 为射击 $i$ 次($i=1,2,\cdots$)，于是，$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$.

**例 5** 设 $E_5$ 为某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过，乘客对于列车通过该站的时间完全不知道，观察乘客候车的时间. 记乘客的候车时间为 $\omega$. 显然有 $\omega \in [0,5)$，即 $\Omega=[0,5)$.

通过上面的几个例子可以看出，随机试验可以分成只有有限个可能结果(如

$E_1, E_2, E_3$);有可列个可能结果(如 $E_4$)和有不可列个可能结果(如 $E_5$)这三种情况.

应该说明的是,一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的.例如,度量人的身高时,一般说来某一个区间中的任一实数都可以是一个样本点;但是,如果测量身高只是为了表明乘客是否必须购买全票、半票或者免票,这时只需要考虑 3 个样本点就可以了.另外,一个随机试验的条件有的是人为的,有的是客观存在的(例如地震等).在后一种情况下,每当试验条件实现时,人们便会观测到一个结果 $\omega$.虽然我们无法事先准确地说出试验的结果,但是能够指出它出现的范围 $\Omega$.因此,我们所讨论的随机试验是有着十分广泛的含义的.

## 三、随机事件

有了样本空间的概念,我们就可以描述随机事件了.所谓**随机事件**是指样本空间 $\Omega$ 的一个子集,随机事件简称为**事件**,用字母 $A,B,C$ 等表示.因此,某个事件 $A$ 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 $\omega$ 发生,记为 $\omega\in A$.

在例 2 中,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$,而 $E_2$ 中的一个事件是具有某些特征的样本点组成的集合.例如,设事件 $A=\{$出现偶数点$\}$,$B=\{$出现的点数大于 4$\}$,$C=\{$出现 3 点$\}$,可见它们都是 $\Omega$ 的子集.显然,如果事件 $A$ 发生,那么子集 $\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ 中的一个样本点一定发生,反之亦然,故有 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$;事件 $B$ 发生就是指出现了样本点 $\omega_5$ 或 $\omega_6$,否则我们就说事件 $B$ 没有发生,故 $B=\{\omega_5,\omega_6\}$;类似地,有 $C=\{\omega_3\}$.一般而言,在 $E_2$ 中,任一由样本点组成的 $\Omega$ 的子集也都是随机事件.这里需要特别指出的是,我们把样本空间 $\Omega$ 也作为一个事件.因为在每次试验中,必定有 $\Omega$ 中的某个样本点发生,即事件 $\Omega$ 在每次试验中必定发生,所以 $\Omega$ 是一个必定发生的事件.在每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**,记作 $U$.在例 2 中$\{$点数小于等于 6$\}$就是一个必然事件.在例 3 中$\{$至少有一件正品$\}$也是一个必然事件.任何随机试验的样本空间 $\Omega$ 都是必然事件.类似地,我们把不包含任何样本点的空集 $\varnothing$ 也作为一个事件.显然,它在每次试验中都不发生,所以 $\varnothing$ 是一个不可能发生的事件.在每次试验中都必定不会发生的事件称为**不可能事件**,记为 $V$.在例 2 中$\{$点数等于 7$\}$,$\{$点数小于 1$\}$等都是不可能事件.在例 3 中$\{$不出现正品$\}$也是不可能事件.我们知道,必然事件 $U$ 与不可能事件 $V$ 都不是随机事件.因为作为试验的结果,它们都是确定的.但是,为了今后讨论问题方便起见,我们也将它们视为随机事件来处理.

## 四、随机事件间的关系与运算

由于事件是样本空间的子集,故事件之间的关系与运算和集合论中集合之间

的关系与运算完全类似，但要注意其特有的事件意义.

设 $\Omega$ 是给定的一个随机试验的样本空间，事件 $A,B,C$，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 都是 $\Omega$ 的子集.

1. 包含关系

若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $B$ **包含**事件 $A$，或称 $A$ 是 $B$ 的**子事件**，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

在这种情况下，组成事件 $A$ 的样本点都是组成 $B$ 的样本点. 这种包含关系的几何直观图如图 1-1 所示.

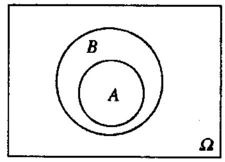

**图 1-1　$A\subset B$**

例如，在例 2 中，若 $A$ 表示{出现奇数点}，即事件{1,3,5}，若 $B$ 表示{出现的点数不超过 5}，即事件{1,2,3,4,5}，显然 $B\supset A$.

2. 相等关系

若 $B\supset A$ 且 $A\supset B$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ **相等**或**等价**，记为 $A=B$. 其直观意义是事件 $A$ 与 $B$ 的样本点完全相同. 这就是说，在一次试验中，等价的两个事件同时发生或同时不发生，因此可以把它们看成是一样的.

在例 3 中，设 $A=${至少有一件次品}，$B=${至多有两件正品}，显然有 $A=B$.

3. 事件的并

{事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生}称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**并**或**和**，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 事件 $A\cup B$ 是属于 $A$ 或属于 $B$ 的样本点组成的集合，其几何直观图如图 1-2 所示(见阴影部分).

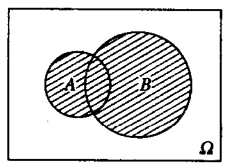

**图 1-2　$A\cup B$**

例如，在例 2 中，设 $A$ 表示{出现偶数点}，即 $A=\{2,4,6\}$，$B$ 表示{出现的点数大于 4}，即 $B=\{5,6\}$，则 $A\cup B$ 表示 $\{2,4,5,6\}$.

一般地，把{事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生}称为 $n$ 个事件的并，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

类似地，把{可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生}称为可列个事件的并，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$，或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

例如，在 $E_4$ 中记 $B_i=\{\omega_i\}(i=1,2,\cdots)$，$A=${至少射击 4 次}，则

$$A=\bigcup_{i=4}^{\infty}B_i.$$

4. 事件的交

{事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生}称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**交**或**积**，记为 $A\cap B$ 或 $AB$. 事件 $A\cap B$ 是由既属于事件 $A$ 又属于事件 $B$ 的样本点组成的集合，其几何直

观图如图 1-3 所示(见阴影部分).

例如,在例 3 中,设 $A$ 表示{取出的 3 件中最多有一件次品},即 $A=\{\omega_0,\omega_1\}$;$B$ 表示{取出的 3 件中至少有一件次品},即 $B=\{\omega_1,\omega_2\}$,则 $A\cap B=\{\omega_1\}$,即 $A\cap B$ 表示{取出的 3 件产品中恰有一件次品}.它是由既属于事件 $A$ 又属于事件 $B$ 的样本点组成的子集.

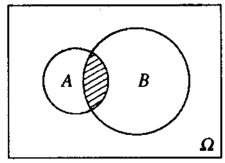

图 1-3　$A\cap B$

一般地,把{事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生}称为 $n$ 个事件的积事件,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,或简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

类似地,把{可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生}称为可列个事件的积事件,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$,或简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5. 互不相容(或互斥)关系

若事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称这两个事件是**互不相容(或互斥)的**.显然,互不相容的事件 $A$ 与事件 $B$ 没有公共的样本点,几何直观图如图 1-4 所示.

例如,在例 3 中,若设 $A$ 表示{取出的 3 件都是正品},即 $A=\{\omega_0\}$;$B$ 表示{取出的 3 件中有两件是次品},即 $B=\{\omega_2\}$.显然事件 $A$ 与 $B$ 没有公共的样本点,因此它们不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$.

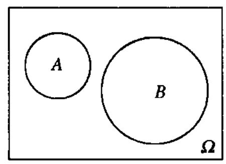

图 1-4　$AB=\varnothing$

6. 事件的逆

对于事件 $A$,我们把不包含在 $A$ 中的所有样本点构成的集合称为事件 $A$ 的**逆**(或称为 $A$ 的**对立事件**),记为 $\overline{A}$.这就是说,事件 $\overline{A}$ 表示在一次试验中事件 $A$ 不发生.于是,我们有

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega,$$

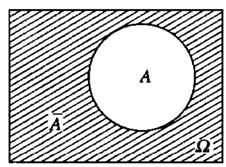

图 1-5　$\overline{A}$

由于 $A$ 也是 $\overline{A}$ 的对立事件,故 $\overline{A}$ 与 $A$ 又称为**相互对立(或互逆)事件**,其几何直观图如图 1-5 所示.

例如,在 $E_1$ 中,设 $A=\{$出现正面$\}$,$B=\{$出现反面$\}$,显然事件 $A$ 与 $B$ 是互逆的,即 $B=\overline{A}$.由定义可知 $\overline{(\overline{A})}=A$,即 $A$ 是 $\overline{A}$ 的逆.

与集合的运算一样,事件间的基本运算(并、交、逆)满足下述运算规律:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$;

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律:$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$, $A(B\cup C)=AB\cup AC$;

(4) 对偶(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算规律都可以仿照证明集合相等的方法加以证明，这里仅用事件运算的意义给出对偶律的证明：

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B}&=\overline{\{A\text{ 与 }B\text{ 中至少有一个发生}\}}=\{A\text{ 与 }B\text{ 都不发生}\}\\&=\{\overline{A}\text{ 与}\overline{B}\text{ 同时发生}\}=\overline{A}\,\overline{B}.\end{aligned}$$

又因为

$$AB=\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}=\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})},$$

所以

$$\overline{AB}=\overline{\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

交换律、结合律、分配律、对偶律都可以推广到任意多个事件的情形. 但要注意这些运算规律不是从初等代数运算移过来的，因此不能简单套用代数运算规律，必须通过事件运算的含义来理解. 例如，利用事件运算的含义及上述运算规律还可以得到一些运算规律：

$$A\cup A=A,\quad AA=A;\quad A\cup\Omega=\Omega,\quad A\Omega=A;$$

$A\cup\varnothing=A$，$A\varnothing=\varnothing$；特别是，若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$.

这些规律的正确性都要通过相应运算的含义来理解.

7. 事件的差

{事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生}称为事件 $A$ 与 $B$ 的**差**，记为 $A-B$(或 $A\setminus B$). 事件 $A-B$ 是由属于事件 $A$ 但不属于事件 $B$ 的样本点组成的子集，其几何直观图如图 1-6 所示(见阴影部分)，并注意 $A-B=A-AB$.

需要指出的是，事件的差不是事件的基本运算，也不满足上面的运算规律. 因此，在进行事件的运算时，先将 $A-B$ 用 $A\overline{B}$ 来表示.

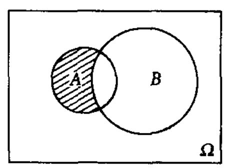

**图 1-6　$A-B$**

8. 样本空间的划分(或完备事件组)

为了研究某些较复杂的事件，常常需要把试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 按样本点的某些属性，划分成若干个事件. 一般地，设 $\Omega$ 被划分成 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，它们满足：

(1) 互斥性：$A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，

(2) 完全性：$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，

则称这 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成样本空间 $\Omega$ 的一个**划分**(或构成一个**完备事件组**).

显然，对任一试验相应的样本空间 $\Omega$，若 $A\subset\Omega$，则由 $A$ 与 $\overline{A}$ 构成 $\Omega$ 的一个划分(这时完备事件组由两个事件构成). 例如，在例 3 中，若将 $\Omega$ 的样本点按所含次品的数量分成三类事件：$A_i=\{$取出的 3 件产品中恰有 $i$ 件次品$\}$，$i=0,1,2$，则事件 $A_0,A_1,A_2$ 构成 $\Omega$ 的一个划分；若设事件 $A=\{$取出的 3 件中有两件是次品$\}$，则由事件 $A$ 与 $\overline{A}$ 构成 $\Omega$ 的另一个划分.

**例 6** 设 $A_1, A_2, A_3$ 为三个事件，试用它们表示下列事件：

(1) $A=\{A_1$ 发生而 $A_2$ 与 $A_3$ 均不发生$\}$；

(2) $B=\{$三个事件中恰有两个发生$\}$；

(3) $C=\{$三个事件中至少有两个发生$\}$；

(4) $D=\{$三个事件中最多有两个发生$\}$.

**解** (1) $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $A=A_1-A_2-A_3$ 或

$A=A_1-(A_2\cup A_3)$.

(2) $B=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$ 或

$B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$.

(3) $C=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1$ 或

$C=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$.

(4) $D=\overline{A_1A_2A_3}$ 或

$$D=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$
$$+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3.$$

**例 7** 化简下列各式：

(1) $(A\cup B)-(A-B)$；　　(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})$；

(3) $(A-\overline{B})(\overline{A\cup B})$.

**解** (1)
$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A-B)&=(A\cup B)\overline{(A-B)}\\&=(A\cup B)\overline{(A\overline{B})}=(A\cup B)(\overline{A}\cup B)\\&=A\overline{A}\cup B\overline{A}\cup AB\cup B=B\overline{A}\cup AB\cup B=B.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(A\cup B)(A\cup\overline{B})&=A\cup BA\cup A\overline{B}\cup B\overline{B}\\&=A\cup A(B\cup\overline{B})\cup\varnothing=A\cup A\Omega=A.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(A-\overline{B})\overline{(A\cup B)}&=(A\overline{\overline{B}})(\overline{A}\,\overline{B})=(AB)(\overline{A}\,\overline{B})\\&=(A\overline{A})(B\overline{B})=\varnothing.\end{aligned}$$

通过上例可见，进行事件运算时，运算的先后顺序是先求逆运算(即求对立事件)，再求积运算，最后再进行和的运算；若有括号，则括号内运算优先.

## §1.2 随机事件的概率

对于一般的随机事件来说，虽然在一次试验中是否发生我们不能预先知道，但是如果我们独立地重复进行这一试验就会发现不同的事件发生的可能性是有大小之分的. 这种可能性的大小是事件本身固有的一种属性，这是不以人们的意志为转

移的.例如掷一枚骰子,如果骰子是匀称的,那么事件{出现偶数点}与事件{出现奇数点}的可能性是一样的;而事件{出现奇数点}要比事件{出现3点}的可能性更大.为了定量地描述随机事件的这种属性,我们先介绍频率的概念.

## 一、概率的统计定义

### 1. 频率

**定义 1.1** 在一组不变的条件 $S$ 下,独立地重复 $n$ 次试验 $E$.如果事件 $A$ 在 $n$ 次试验中出现了 $\mu$ 次,则称比值 $\mu/n$ 为在 $n$ 次试验中事件 $A$ 出现的频率,记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(A) = \frac{\mu}{n},$$

其中,$\mu$ 称为事件 $A$ 发生的**频数**.

频率具有下述性质:

**性质 1** $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

**性质 2** $f_n(\Omega) = 1$;

**性质 3** 若事件 $A$ 与事件 $B$ 互斥,即 $AB = \varnothing$,则

$$f_n(A+B) = f_n(A) + f_n(B).$$

性质1,2是显然的.关于性质3的证明如下:

设在 $n$ 次试验中,事件 $A$ 与事件 $B$ 发生的频数分别为 $n_A, n_B$,因 $A$ 与 $B$ 互斥,故 $A+B$ 发生的频数 $n_{A+B} = n_A + n_B$,故

$$f_n(A+B) = \frac{n_{A+B}}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_n(A) + f_n(B).$$

性质3还可以推广到 $n$ 个两两互斥事件的情形,即设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互斥的事件,则

$$f_n\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f_n(A_i).$$

例如,在抛掷一枚硬币时,我们规定条件组 $S$ 为:硬币是匀称的,放在手心上,用一定的动作垂直上抛,让硬币落在一个有弹性的平面上,等等.当条件组 $S$ 大量重复实现时,事件 $A=${出现正面}发生的次数 $\mu$ 能够体现出一定的规律性.例如,进行50次试验出现了24次正面,这时

$$n = 50, \quad \mu = 24, \quad f_{50}(A) = 24/50 = 0.48.$$

一般来说,随着试验次数的增加,事件 $A$ 出现的次数 $\mu$ 约占总试验次数的一半,换句话说,事件 $A$ 的频率接近于1/2.

历史上,不少统计学家,例如皮尔逊(Pearson)等人,做过成千上万次抛掷硬币